暫定版
修正・加筆の可能性あり

（付録）
「マクスウェルの方程式：真空中（２）」

注意
1．本付録：「マクスウェルの方程式：微分型」を使用
2．マクスウェルの方程式を数学的に取扱います。
3．マクスウェルの方程式の物理的な意味、導出に至る背景などは「付録：２０４、２０５」で確認してください。
4．平面波のみを対象とします。
5．磁性体は扱いません。透磁率は常に「真空中の透磁率」になります。

おことわり

電場でお馴染みの「Ｅ」と「Ｄ」

本付録では「電場Ｅ」、「電束密度Ｄ」と記す。　　　　　　単位

- 電場Ｅ：electric field　　　V/m

- 電束密度Ｄ：electric flux density
- 電気変位Ｄ：electric displacement field　　　C/m^2
- Ｃ：クーロン

磁場でお馴染みの「Ｈ」と「Ｂ」
注意：英語ではＨもＢもmagnetic fieldと呼ばれる。混同しやすい。

本付録では「磁場Ｈ」、「磁場Ｂ」と記す。　　　　　　単位

- 磁場H：magnetic H field　　　A/m
- 磁場の強さ：magnetic field intensity

- 磁場B：magnetic B field　　　$T = Wb/m^2$
- 磁束密度：magnetic flux density
- Ｔ：テスラ、Ｗｂ：ウェーバー

振幅ベクトル：直線偏波（直線偏光）
初期位相零：正実数（赤字）として扱う

電磁波（光波）の姿：真空中

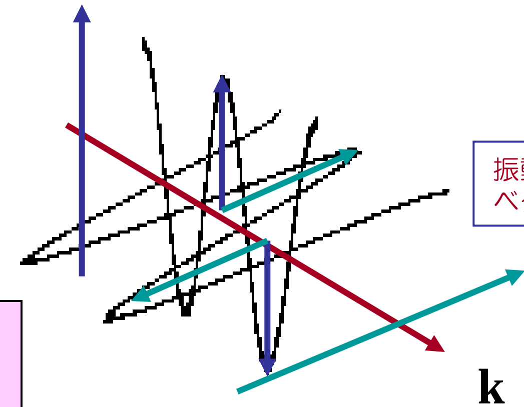
簡単のため：平面進行波　Plane traveling wave

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0\cos(\omega t-\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}),\quad \mathbf{E}_0=\left(E_{0x},E_{0y},E_{0z}\right)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\mathbf{H}_0\cos(\omega t-\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}),\quad \mathbf{H}_0=\left(H_{0x},H_{0y},H_{0z}\right)$$

振動磁場H
ベクトル

H：磁場の強さ



振動電場E
ベクトル

進行方向

質問：もし、自然界がマクスウェルの方程式で記述されるなら
- 真空中に波として振舞う電場と磁場が存在する。特徴は？

答え：右図参照
- 電場や磁場は時間振動すると同時に同じ位相速度で進む「縦波」
- 振動電場のみ振動磁場のみの存在は不可
- 振動電場と振動磁場はいつも一緒：電磁波
- 電場と磁場の振動方向は直角（進行方向：電場→磁場へ右ねじ ）
- ちなみに「光波」は「電磁波」の一種です。（参照：201-1）

重要な関係：右手系

$$\mu_0\omega\mathbf{H}_0=\mathbf{k}\times\mathbf{E}_0$$

波数ベクトルの大きさ

$$|\mathbf{k}|=\omega/c_0$$

真空中の光速度

振幅ベクトル：振動電場Eと振動磁場H

$$\mu_0\omega|\mathbf{H}_0|=|\mathbf{k}||\mathbf{E}_0|\xrightarrow{|\mathbf{k}|=\frac{\omega}{c_0}}|\mathbf{E}_0|=\mu_0c_0|\mathbf{H}_0|$$

再確認：真空中
1. 振動電場Eと電束密度Dは平行
2. 振動磁場HとBは平行
3. 進行方向：電場→磁場へ右ねじ

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E},\quad \mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}$$

$$\mathbf{E}_0\perp\mathbf{H}_0\perp\mathbf{k}\rightarrow\mathbf{E}\perp\mathbf{H}\perp\mathbf{k}$$

エネルギー密度（１）

目的：電磁波エネルギー密度とポインティング・ベクトルの関係をマクスウェルの方程式から調べる

ベクトル解析の公式からスタート：参照603-15

$$\mathbf{div}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)=\mathbf{H}\bullet\mathrm{rot}\mathbf{E}-\mathbf{E}\bullet\mathrm{rot}\mathbf{H}$$

$$\nabla\bullet\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)=\mathbf{H}\bullet\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)-\mathbf{E}\bullet\left(\nabla\times\mathbf{H}\right)$$

ファラデーの電磁誘導の法則
Faraday's law of induction

右辺第一項

計算例：参照

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=-\mu_0\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\mathbf{H}\bullet\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)=\mathbf{H}\bullet\left(-\mu_0\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu_0\mathbf{H}\bullet\mathbf{H}\right)$$

アンペールの法則（変位電流追加）
Amp è re's circuital law withdisplacement current

$$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

$$-\mathbf{E}\bullet\left(\nabla\times\mathbf{H}\right)=-\mathbf{E}\bullet\left(\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}\bullet\mathbf{E}\right)$$

重要な関係式

$$\nabla\bullet\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)=-\frac{\partial U_{em}}{\partial t},\qquad\because U_{em}=\frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}\bullet\mathbf{E}+\frac{1}{2}\mu_0\mathbf{H}\bullet\mathbf{H}$$

エネルギー密度（2）

単位の確認

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathbf{E}\bullet\mathbf{E} \rightarrow \left[\frac{s^4\bullet A^2}{m^3\bullet kg}\right]\left[\frac{V}{m}\right]^2 \xrightarrow[J=W\bullet s]{W=V\bullet A} \left[\frac{s^2\bullet J^2}{m^5\bullet kg}\right]$$

$$\xrightarrow{J=N\bullet m=kg\bullet \frac{m}{s^2}\bullet m} \left[\frac{J^2}{\left(kg\bullet \frac{m}{s^2}\bullet m\right)\bullet m^3}\right] = \left[\frac{J}{m^3}\right]$$

単位から推察すると
振動電場Eのエネルギー密度

$$\frac{1}{2}\mu_0 \mathbf{H}\bullet\mathbf{H} \rightarrow \left[\frac{m\bullet kg}{s^2\bullet A^2}\right]\left[\frac{A}{m}\right]^2 \rightarrow \left[\frac{kg}{s^2\bullet m}\right] = \left[\left(kg\frac{m}{s^2}m\right)\frac{1}{m^3}\right] \rightarrow \left[\frac{J}{m^3}\right]$$

単位から推察すると
振動磁場Hのエネルギー密度

単位体積当たりの電磁波エネルギー（エネルギー密度）：真空中

$$U_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathbf{E}\bullet\mathbf{E} + \frac{1}{2}\mu_0 \mathbf{H}\bullet\mathbf{H}$$

振動電場Eのエネルギー密度　　振動磁場Hのエネルギー密度

単位体積当たりの電磁波エネルギー
別名：エネルギー密度

1. 振動電場Eのエネルギー密度
2. 振動磁場Hのエネルギー密度
3. 両者の和：電磁波エネルギー密度
4. 振動電場と振動磁場はいつも一緒：電磁波

ポインティング・ベクトル（１）

単位の確認

$$\mathbf{E}\times\mathbf{H}\rightarrow\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right]\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right]\rightarrow\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]$$

ポインティング・ベクトルの導入
1. Poynting vector
2. Poyntingは考案者の名前
3. John Henry Poynting

$$\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$$

単位から推測すれば、ポインティング・ベクトルは単位面積（断面積）当たりの電磁波パワーに相当

1. パワー：電気回路で言えば「電力」「仕事率」に等しい！
2. 仕事率：「単位時間内にどれだけのエネルギーが仕事で消費されるか」を示す物理量である。
3. 電磁波の場合：「単位時間内にどれだけのエネルギーが断面積を通過するか」を示す物理量である。
4. 単位断面積：「絵解き」で考える！（603-8）

重要な関係式：参照：603-4

Uem：電磁波エネルギー密度

$$\nabla\bullet\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)=-\frac{\partial U_{em}}{\partial t},\qquad \because U_{em}=\frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}\bullet\mathbf{E}+\frac{1}{2}\mu_0\mathbf{H}\bullet\mathbf{H}$$

式の意味：大雑把に言えば
1. 右辺：「ある領域（単位体積）」内の電磁波エネルギー「Uem」の単位時間当たりの減少量
2. 右辺：「Uem」は「電磁波エネルギー密度」と呼ばれる。
3. 左辺：「ある領域（単位体積）」から単位時間内に流出する「正味の」電磁波エネルギー

ポインティング・ベクトル（２）

ポインティング・ベクトルの導入：定義

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

重要な関係式：参照：603-4

Uem：電磁波エネルギー密度

$$\nabla \bullet \mathbf{S} = -\frac{\partial U_{em}}{\partial t}, \qquad \because U_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathbf{E} \bullet \mathbf{E} + \frac{1}{2}\mu_0 \mathbf{H} \bullet \mathbf{H}$$

左辺：「ある領域（単位体積）」から単位時間内に流出する「正味の」電磁波エネルギー

簡略化

$$\mathbf{S} = \left(0, 0, S_z\right)$$

微小領域

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$$

青枠の意味：次頁参照
「微小領域」から単位時間内に流出する正味の電磁波エネルギー
「正味の流出量」とは？：流出量－流入量

流入量
単位時間内に「微小領域」に流入する電磁波エネルギー

$$\boxed{\left(\nabla \bullet \mathbf{S}\right)\Delta V} = \frac{\partial S_z}{\partial z}\Delta V \simeq \frac{S_z\left(z + \Delta z\right) - S_z\left(z\right)}{\Delta z}\Delta V = \underline{S_z\left(z + \Delta z\right)\Delta x \Delta y} - \underline{S_z\left(z\right)\Delta x \Delta y}$$

流出量：単位時間内に「微小領域」から流出する電磁波エネルギー

絵解き：ポインティング・ベクトル（１）

ポインティング・ベクトルの向き
1. 電磁波エネルギー流の向き
2. 簡略化：＋ｚ方向

微小領域

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$$

微小断面積：水色

$$\Delta x \Delta y$$

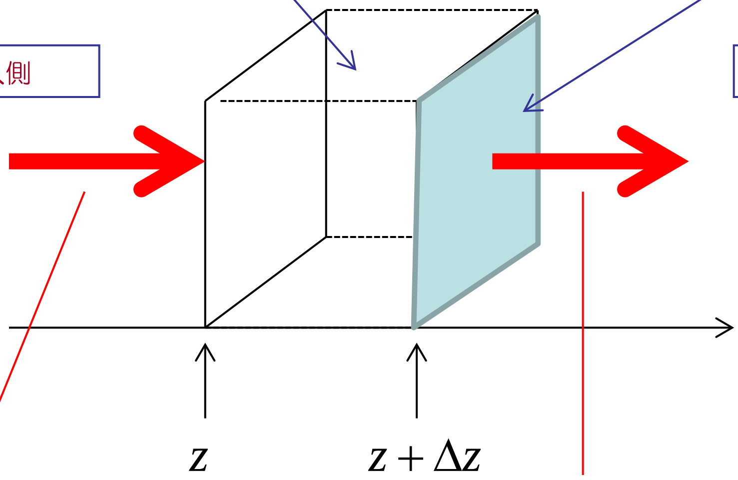
流入側

流出側

電磁場
エネルギー流

ｚ軸上の位置

ｚ軸



単位時間内に「微小領域」に流入する電磁波エネルギー
- 微小断面Δｘ Δｙを＋z向きに通過する電磁波エネルギー

「微小領域」から流出する電磁波エネルギー
- 微小断面Δｘ Δｙを＋z向きに通過する電磁波エネルギー

流入量：位置ｚ

$$S_z(z)\Delta x \Delta y$$

流出量：位置ｚ＋Δｚ

$$S_z(z+\Delta z)\Delta x \Delta y$$

Sｚ（赤線部分）：ポインティング・ベクトルのｚ成分
1. 単位時間内に単位断面積を通過する電磁波エネルギー
2. 通過する方向：ポインティング・ベクトルの向き（＋ｚ方向：右側）

微小断面積：水色

$$\Delta x \Delta y$$

正味の流出量

$$S_z(z+\Delta z)\Delta x \Delta y - S_z(z)\Delta x \Delta y \simeq (\nabla \bullet \mathbf{S})\Delta V$$

絵解き：ポインティング・ベクトル（２）

簡略化しません！

$$\mathbf{S}=\left(S_x,S_y,S_z\right)$$

微小領域

$$\Delta V=\Delta x\Delta y\Delta z$$

青枠の意味：次頁参照
「微小領域」から単位時間内に流出する正味の電磁波エネルギー、「正味の流出量」とは？：流出量ー流入量

$$\boxed{\left(\nabla\bullet\mathbf{S}\right)\Delta V}=\left(\frac{\partial S_x}{\partial x}+\frac{\partial S_y}{\partial y}+\frac{\partial S_z}{\partial z}\right)\Delta V\simeq\frac{S_z\left(z+\Delta z\right)-S_z\left(z\right)}{\Delta z}\Delta V$$

$$+\frac{S_z\left(z+\Delta z\right)-S_z\left(z\right)}{\Delta z}\Delta V+\frac{S_z\left(z+\Delta z\right)-S_z\left(z\right)}{\Delta z}\Delta V$$

総流出量　　総流入量

$$=\begin{array}{|c|}\hline S_x\left(x+\Delta x\right)\Delta y\Delta z\\ S_y\left(y+\Delta y\right)\Delta z\Delta x\\ S_z\left(z+\Delta z\right)\Delta x\Delta y\\ \hline\end{array}\begin{array}{c}-\\-\\-\end{array}\begin{array}{|c|}\hline S_x\left(x\right)\Delta y\Delta z\\ S_y\left(y\right)\Delta z\Delta x\\ S_z\left(z\right)\Delta x\Delta y\\ \hline\end{array}$$

単位時間内に「微小領域」に流入する電磁波エネルギー
- 第一行：＋ｘ向きに流入
- 第二行：＋ｙ向きに流入
- 第三行：＋ｚ向きに流入

単位時間内に「微小領域」から流出する電磁波エネルギー
- 第一行：＋ｘ向きに流出する電磁波エネルギー
- 第二行：＋ｙ向きに流出する電磁波エネルギー
- 第三行：＋ｚ向きに流出する電磁波エネルギー

「正味の流出量」とは？
- 総流出量ー総流入量

ポインティング・ベクトル：再確認（１）

ポインティング・ベクトルの各成分：　$\mathbf{S}=\left(S_x,S_y,S_z\right)$

各成分の物理的意味：単位時間内に
1. Ｓｘ：単位断面積（ｘ方向に垂直な面）を通過する電磁波エネルギー：通過方向：＋ｘ方向
2. Ｓｙ：単位断面積（ｙ方向に垂直な面）を通過する電磁波エネルギー：通過方向：＋ｙ方向
3. Ｓｚ：単位断面積（ｚ方向に垂直な面）を通過する電磁波エネルギー：通過方向：＋ｚ方向

全体で考えると：ポインティング・ベクトルで電磁波エネルギー流（大きさ＆向き）を表現

1. ポインティング・ベクトルの大きさ：単位時間内に単位断面積を通過する電磁波エネルギー
2. ポインティング・ベクトルの向き：通過方向（断面積はベクトルの向きと垂直な面）

単位断面積・単位時間当たりの電磁波（光波）エネルギーの流量
ポインティング・ベクトル

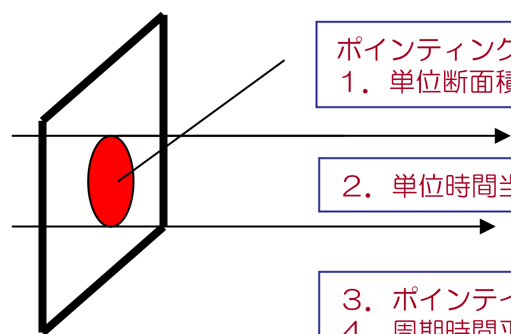
ポインティング・ベクトル
ベクトルの向き：流れる方向

$$\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$$

単位断面積当たり光強度：参照：206-6
求め方：ポインティング・ベクトルの周期時間平均
単位：W/m^2

$$\overline{\mathbf{S}}=\overline{\mathbf{E}\times\mathbf{H}}$$

光強度について興味がある場合：参照：206-6



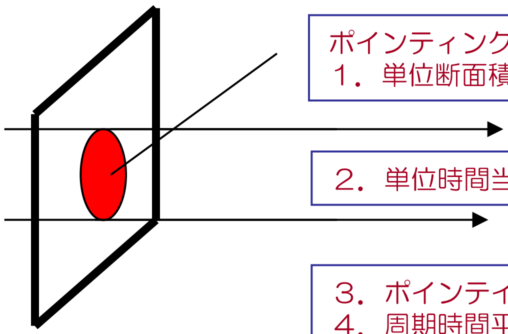
ポインティング・ベクトルとは
１．単位断面積を通過する

２．単位時間当たりのエネルギー流量

３．ポインテイング・ベクトルの向き
４．周期時間平均
５．単位断面積当たりの光強度

ポインティング・ベクトル：再確認（２）

ポインティング・ベクトル
- ベクトルの大きさ：単位断面積・単位時間当たりの電磁波（光波）エネルギーの流量
- ベクトルの向き：流れる方向



ポインティング・ベクトルとは
１．単位断面積を通過する

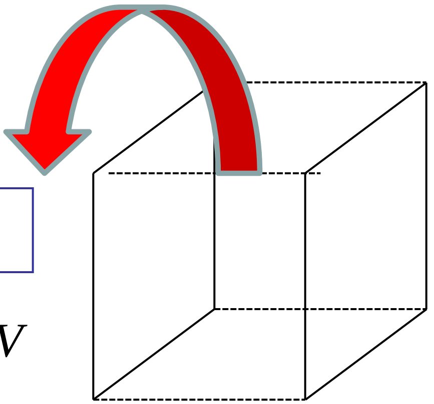
２．単位時間当たりのエネルギー流量

３．ポインテイング・ベクトルの向き
４．周期時間平均
５．単位断面積当たりの光強度

$$\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H},\quad \because \mathbf{S}=\left(S_x,S_y,S_z\right)$$

ところが：発散（divergence）を考えると
- 微小領域ΔVに関して
- 単位時間内に流出する「正味の」電磁波エネルギー

$$\left(\nabla\bullet\mathbf{S}\right)\Delta V=\left(\frac{\partial S_x}{\partial x}+\frac{\partial S_y}{\partial y}+\frac{\partial S_z}{\partial z}\right)\Delta V$$



単位時間内
正味の流出量

$$\left(\nabla\bullet\mathbf{S}\right)\Delta V$$

$$\Delta V=\Delta x\Delta y\Delta z$$

微小領域

重要な関係式

微小領域ΔVを省略：参照：603-4

$$\left(\nabla\bullet\mathbf{S}\right)\Delta V=-\frac{\partial U_{em}}{\partial t}\Delta V\quad\rightarrow\quad\nabla\bullet\mathbf{S}=-\frac{\partial U_{em}}{\partial t}$$

式の意味：微小領域ΔVに関して
1. 左辺：単位時間内に流出する「正味の」電磁波エネルギー
2. 右辺：「微小領域内」電磁波エネルギー「Uem」の単位時間当たりの減少量
3. Uem：電磁波エネルギー密度

電磁波エネルギー密度：流れとは無関係

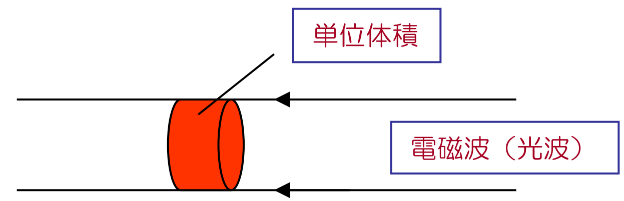
電磁波エネルギー密度：詳細は
参考文献：和田純夫「電磁気学のききどころ」
p.１１２、岩波書店

電磁波（光波）のエネルギー密度
ある時刻、ある空間に注目：単位体積に含まれる電磁波エネルギー

$$U_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathbf{E}\bullet\mathbf{E} + \frac{1}{2}\mu_0 \mathbf{H}\bullet\mathbf{H}$$

真空中の誘電率

真空中の透磁率



ある時刻に限定：
定在波でも進行波でも光エネルギーの定義は同じ

単位断面積・単位時間当たりの電磁波（光波）エネルギーの流量 ポインティング・ベクトル

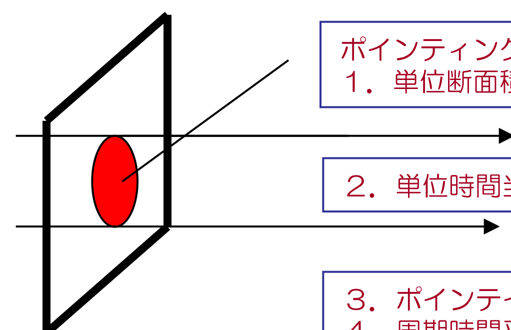
ポインティング・ベクトル
ベクトルの向き：流れる方向

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

単位断面積当たり光強度：参照
求め方：ポインティング・ベクトルの周期時間平均
単位：W/m^2

$$\overline{\mathbf{S}} = \overline{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}$$

光強度について興味がある場合：参照：206-6



ポインティング・ベクトルとは
１．単位断面積を通過する

２．単位時間当たりのエネルギー流量

３．ポインテイング・ベクトルの向き
４．周期時間平均
５．単位断面積当たりの光強度

両者の関係（１）

簡単のため：電場Eはｘ成分のみ、磁場Hはｙ成分のみ、波数ベクトルはｚ成分のみ

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0\cos(\omega t-\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}),\quad \mathbf{E}_0=(E_0,0,0)\rightarrow E_x(z,t)=E_0\cos(\omega t-kz)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\mathbf{H}_0\cos(\omega t-\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}),\quad \mathbf{H}_0=(0,H_0,0)\rightarrow H_y(z,t)=H_0\cos(\omega t-kz)$$

重要な関係式：参照：603-4

Uem：電磁波エネルギー密度

$$\nabla\bullet(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=-\frac{\partial U_{em}}{\partial t},$$

$$\because U_{em}=\frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}\bullet\mathbf{E}+\frac{1}{2}\mu_0\mathbf{H}\bullet\mathbf{H}$$

ポインティング・ベクトル：z成分のみ

$$\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H},\quad \because \mathbf{S}=(S_x,S_y,S_z)$$

$$S_x=0,\ S_y=0,\ S_z=E_xH_y=E_0H_0\cos^2(\omega t-kz)\xrightarrow{H_0=\frac{E_0}{\eta}}\frac{E_0^2}{\eta}\cos^2(\omega t-kz)$$

$$\xrightarrow{\eta=\frac{1}{c_0\varepsilon_0}}S_z=c_0\varepsilon_0E_0^2\cos^2(\omega t-kz)$$

両者の関係（２）

Uem：電磁波エネルギー密度

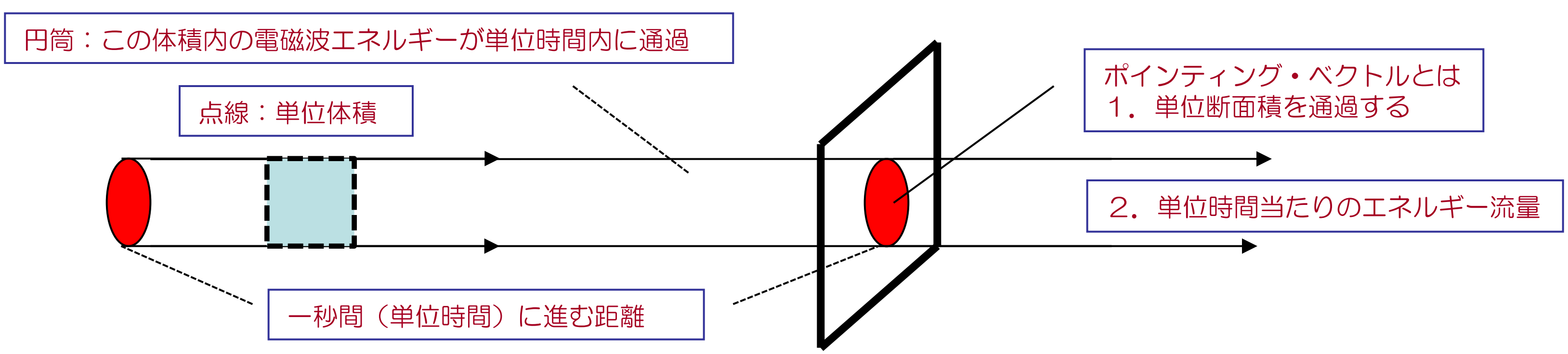
$$U_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathbf{E}\bullet\mathbf{E} + \frac{1}{2}\mu_0 \mathbf{H}\bullet\mathbf{H} \rightarrow \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) + \frac{1}{2}\mu_0 H_0^2 \cos^2(\omega t - kz)$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) + \frac{1}{2}\mu_0 \left(\frac{E_0}{\eta}\right)^2 \cos^2(\omega t - kz)$$

$$\xrightarrow{\eta=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}} \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz)$$

関係式
1. 単位断面積・単位時間当たりの電磁波（光波）エネルギーの流量は
2. 「単位体積内に含まれる電磁波エネルギー」×「一秒間（単位時間）に進む距離」に等しい。
3. 即ち、「電磁波エネルギー密度」×「真空中の光速度」に等しい。
4. 電磁波エネルギー密度：単位体積内に含まれる電磁波エネルギー
5. 単位体積：単位断面積と単位長さの積
6. 光速度：一秒間（単位時間）に進む距離

$$|\mathbf{S}| = c_0 U_{em}$$



付録：ベクトル解析（１）

ベクトル解析の公式

$$\nabla\bullet(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\mathbf{H}\bullet(\nabla\times\mathbf{E})-\mathbf{E}\bullet(\nabla\times\mathbf{H})$$

$$\mathbf{E}=\left(E_x,E_y,E_z\right),\quad \mathbf{H}=\left(H_x,H_y,H_z\right)$$

$$\mathbf{H}\bullet(\nabla\times\mathbf{E})-\mathbf{E}\bullet(\nabla\times\mathbf{H})$$

$$=\left(H_x,H_y,H_z\right)\bullet\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z},\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x},\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

$$-\left(E_x,E_y,E_z\right)\bullet\left(\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z},\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x},\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)$$

$$=H_x\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)+H_y\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)+H_z\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

$$-E_x\left(\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right)-E_y\left(\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)-E_z\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)$$

付録：ベクトル解析（２）

続き

$$\mathbf{E}\times\mathbf{H}=\left(E_yH_z-E_zH_y,E_zH_x-E_xH_z,E_xH_y-E_yH_x\right)$$

$$\nabla\bullet\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(E_yH_z-E_zH_y\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(E_zH_x-E_xH_z\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(E_xH_y-E_yH_x\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(E_yH_z\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(E_zH_x\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(E_xH_y\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(E_zH_y\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(E_xH_z\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(E_yH_x\right)$$

$$=E_y\frac{\partial H_z}{\partial x}+H_z\frac{\partial E_y}{\partial x}+E_z\frac{\partial H_x}{\partial y}+H_x\frac{\partial E_z}{\partial y}+E_x\frac{\partial H_y}{\partial z}+H_y\frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$-E_z\frac{\partial H_y}{\partial x}-H_y\frac{\partial E_z}{\partial x}-E_x\frac{\partial H_z}{\partial y}-E_x\frac{\partial H_z}{\partial y}-E_y\frac{\partial H_x}{\partial z}-H_x\frac{\partial E_y}{\partial z}$$

$$=H_x\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)+H_y\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)+H_z\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

$$-E_x\left(\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right)-E_y\left(\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)-E_z\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)$$