

グレイド付き空間プロセス代数による近似解析

磯部祥尚 佐藤豊 大蒔和仁

並行プロセスを解析する数学的道具としてプロセス代数が知られており、既に目的に応じた多種のプロセス代数が提案されている。しかし、並行プロセス数の増加と共に観測可能なアクションの列が急激に増加するため、大規模システムの仕様記述は複雑になる問題がある。

我々は、アクションに重要度と発生位置の情報を付加して、遠くの重要でないアクションを無視した近似解析が可能なプロセス代数 CCSG を提案する。CCSG には 2 つの等価性が定義されており、1 つは観測者の位置を移動するためのシフト (s) 等価、もう 1 つは遠方の重要でないアクションを無視するためのレベル (r) 等価である。これら 2 つの等価性により全体的な仕様と任意の位置における局所的な仕様とを関係づけることが可能である。

1 はじめに

並行プロセスの動作は複数のプロセスの相互作用の結果であり、逐次プロセスの動作に比べてその全体の動作を理解することは困難である。プロセス代数は並行プロセスの動作を解析する数学的な道具として知られており、動作を式の形で記述することによって、並行プロセス (実現) の動作と逐次プロセス (仕様) の動作の等価性を代数的に検証することが可能である。このような並行プロセスの解析において問題となるのは、プロセス数の増加にともなって実行可能なアクション列が急激に増加

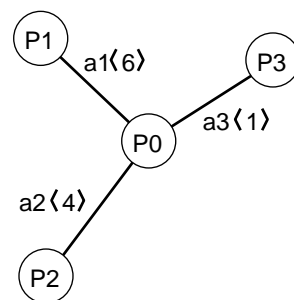


図 1 星型構造の例

することである。つまり、大規模並行システムの仕様は極めて複雑になると予想される [12]。

我々は近似的にプロセスを解析可能なプロセス代数 CCSG (a Calculus of Communicating Systems with Graded spatial actions) を提案する。CCSG では、各アクションがその重要度を示すグレイドとその発生位置を示す経路の情報をもっており、遠くの重要でないアクションは観測できないという仮定を基にした近似解析を行なうことが可能である。

遠くのアクションの重要度を減少させるために、グレイドの損失を伴うルータを用いる。ルータは図 1 に示すように星型にプロセスと接続される。ノードがプロセスを表し、枝がルータを表している。ルータは名前 a とグレイドの損失値 r をもち、 $a\langle r \rangle$ の形で記述される。グレイドの損失値は 0 以上の実数である。例えば図 1 では、プロセス P_0 と P_1 の間にルータ $a_1\langle 6 \rangle$ が存在し、名前と損失値は各々 a_1 と 6 である。2 点間の経路とは、その間にあるルータの列のことである。例えば図 1 において、 P_2 から P_3 までの経路は $(a_2\langle 4 \rangle a_3\langle 1 \rangle)$ として表される。

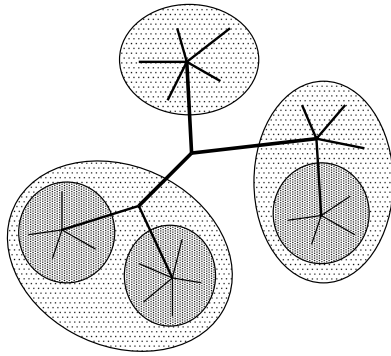


図2 階層的星型構造

ルータの接続は図2に示すように階層的に星型に接続することが可能である。

CCSGは、代表的なプロセス代数として知られているCCS[7]を基に作られている。CCSGの構文はCCSにほぼ同じであるが、CCSGには経路を表す演算子@が加えられている。例えば図1のシステムは、プロセス P_0 を観測位置として、

$S_0 \equiv P_0|(P_1@a_1(6))|(P_2@a_2(4))|(P_3@a_3(1))$ のように記述される。ここで、 \equiv は構文的に等しいことを表し、 $|$ は並行合成演算子である。CCSGで重要なことの1つに観測位置によって記述が変化することがあげられる。例えば、 S_0 は P_2 、または P_3 を観測位置として次のように書き換えられる。

$S_2 \equiv P_2|((P_0|(P_1@a_1(6))|(P_3@a_3(1))))@a_2(4)$
 $S_3 \equiv P_3|((P_0|(P_1@a_1(6))|(P_2@a_2(4))))@a_3(1)$
この S_2 は、 P_1 と P_3 がルータ $a_1(6)$ と $a_3(1)$ を通して P_0 に接続され、さらに P_0 がルータ $a_2(4)$ を通して P_2 に接続されていることを表している。このような、違う位置で観測された結果を関係付けるために、我々はシフト(s)等価 $\sim_{(s)}$ を与える。ここで、 s は左辺の観測位置から右辺の観測位置までの経路を表すパラメータである。例えば、 P_2 から P_3 への経路は $(a_2(4)a_3(1))$ であるから、

$$S_2 \sim_{(a_2(4)a_3(1))} S_3$$

が成り立つ。特に、シフト(ϵ)等価 $\sim_{(\epsilon)}$ は、両辺の観測者の位置が同じであることを意味し、強等価[7] \sim と同じである(ϵ は空列を表す)。

CCSGのアクションは、ラベル α 、グレイド r 、経路 s から構成され、 $\alpha(r)@s$ の形で記述される。ここで使われている@は前述のプロセス位置を明記する演算子ではなく、アクションの位置を明記するために使われている。共に位置を表し、構文から区別可能であるので同じ記号を採用する。 $\alpha(r)@s$ は、経路 s で示される位置で生じたグレイド r をもつアクション α を表している。グレイド r は実数であり、重要なアクションには正の数、重要でないアクションには負の数を与えられる。 s はアクションが生じた位置からそれが観測(記述)された位置までの経路である。アクションの生じた位置が観測位置ならば経路 s は空列 ϵ であり、しばしば $\alpha(r)@\epsilon$ は $\alpha(r)$ と略記される。例えば図1の P_1 の位置で生じたアクション $\alpha(7)$ は、 P_2 の位置では $\alpha(7)@(a_1(6)a_2(4))$ として観測される。

2点間の経路に含まれる全てのルータの損失値の和を、その2点間の損失距離と呼ぶ。例えば、図1の P_1 と P_2 の間の損失距離は $(6+4)=10$ である。重要なことは、離れたところで生じたアクションのグレイドは、その間の損失距離だけ減少して観測されることである。この減少して観測される実際に有効となるグレイドを実効グレイドと呼ぶ。例えば、 $\alpha(7)@(a_1(6)a_2(4))$ の実効グレイドは $(7-(6+4))=-3$ である。

CCSGでは、2つのアクションが同期するために、次の条件を満たすことを必要としている。

2つのアクションのグレイドの和が、それらの発生位置の間の損失距離以上である。(条件1)

例えば図1の P_1 と P_2 の位置で、各々アクション $\alpha(9)$ と $\bar{\alpha}(3)$ が起ったとする。この2つのアクションのグレイドの和は $(9+3)=12$ であり、 P_1 と P_2 の損失距離は $(6+4)=10$ であるから、この2つのアクションは同期可能である。

アクションの同期を制限する演算子として、CCSには制限演算子\が用意されている。あるシステムを構築して制限演算子でアクションを制限すれば、そのアクションに外部から同期することは完全に不可能になる。グレイドによる同期の制限では、外部で起こるアクションのグレイドに同期の可能性が依存している。

実際のネットワークでは、メッセージの無限ルーティ

ングを回避するために、TTL(Time To Live)と呼ばれる値をメッセージに与えている。例えば、経路制御情報プロトコル(RIP)では、送信時の TTL の初期値は 15 であり、ルータを通過する毎に TTL は 1 ずつ減算される。そして、TTL が 0 になったときに、そのメッセージは破棄される。これは、送信側のグレイドを 15、受信側のグレイドを 0、各ルータの損失を 1 に設定したときの CCSG の特別の場合に相当する。また、送信者が放送範囲を TTL で指定でき、ルータも任意の損失と閾値をもつことができる通信方式として MBone[13] が知られている。TTL はルータを通過する毎に指定された損失だけ減少し、TTL の値が閾値以下のメッセージはそのルータを通過できない。CCSG の通信方式はこのような TTL と損失を基にしている。ただし、MBone はブロードキャスト通信であり、CCSG は 1 対 1 通信であるため、MBone に対応するためには CCSG を拡張する必要がある。

実際には、アクションのグレイドやルータの損失を決めるために、参考になる値を与えておく必要がある。例えば MBone では、その送信範囲を TTL で指定するが、TTL が 31 以下で組織内、TTL が 127 以下で国内全体、TTL が 128 以上で海外までと目安が決められている。ルータの損失は、ネットワークが太い程小さく、その値はグレイド(TTL)との関係で決められる。

大規模システムにおいては、全ての動作を理解することは困難になる。そこで、まず遠くの重要でないアクションを無視して動作の概要を得ることは、全体を理解するためにも有効であると考えられる。CCSG では、観測位置での実効グレイドの低いアクションを無視した近似的な解析が可能である。この近似的解析を行なうために、我々はパラメータとして類似のレベル r をもつレベル $\langle r \rangle$ 等価 $=_{\langle r \rangle}$ を与える。レベル $\langle r \rangle$ 等価とは、次の仮定のもとで等しい関係を表している。

観測位置での実効グレイドが $-r$ 未満であるアクションは観測できない。(仮定 1)

また、このような仮定のもとで行なわれる観測をレベル $\langle r \rangle$ 観測と呼ぶ。類似のレベル r が大きいほどグレイドの低いアクションまで考慮し、 $=_{\langle \infty \rangle}$ は観測合同[7] =

に相当する。例えば $=_{\langle 2 \rangle}$ に対して次の関係が成り立つ。

$$(\alpha(1)@a(2)).P \neq_{\langle 2 \rangle} \tau.P$$

$$(\alpha(1)@a(4)).P =_{\langle 2 \rangle} \tau.P$$

$(\alpha(1)@a(2)).P$ はアクション $(\alpha(1)@a(2))$ を起こした後、プロセス P のように振舞うプロセスを表している。 τ は観測できない内部アクションである。 $(\alpha(1)@a(2))$ の実効グレイドは $1 - 2 = -1$ であり、 -2 以上であるので観測されなければならない、等式は成り立たない。一方、 $(\alpha(1)@a(4))$ の実効グレイドは $1 - 4 = -3$ であり、 -2 未満になるため観測されず、上の等式は成り立つ。

$=_{\langle r \rangle}$ に関する有益な結果の 1 つに、 $=_{\langle r \rangle}$ が並行合成演算子によって保存されることがあげられる。つまり、近似関係を保ったままプロセスを並行合成することができる。

以下、2 節では CCSG のアクション、経路、構文、意味を定義する。3 節ではシフト (s) 等価とレベル $\langle r \rangle$ 弱等価を双模倣関係をもとに定義し、いくつかの命題を与える。レベル $\langle r \rangle$ 等価はレベル $\langle r \rangle$ 弱等価をもとに定義される。この近似的なレベル $\langle r \rangle$ 等価と観測合同(レベル $\langle \infty \rangle$ 等価に相当)を比較するために、有限な逐次プロセスのレベル $\langle r \rangle$ 等価に対する健全で完全な公理系 $A\langle r \rangle$ を与える。さらに、レベル $\langle r \rangle$ 弱等価をプロセス論理の充足関係を用いて特徴付ける。4 節では CCSG による近似解析の例を示す。5 節では関連研究について述べる。

2 CCSG の定義

2.1 小節では CCSG で用いる各集合を定義する。2.2 小節ではプロセスの位置関係を代数的に扱う方法を示す。残りの 2 つの小節で CCSG の構文と意味を定義する。

2.1 各集合の定義

我々は名前の無限集合 \mathcal{N} が与えられていると仮定し、 \mathcal{N} の要素を a で表す。ルータの集合 Ω は、名前の集合 \mathcal{N} と非負の実数の集合 \mathcal{R}^+ の直積集合

$$\Omega = \{a\langle r \rangle : a \in \mathcal{N}, r \in \mathcal{R}^+\}$$

として定義され、その要素は ω によって表される。CCSG ではルータの接続方法について次の仮定を導入する^{†1}

^{†1} $a_1\langle r_1 \rangle = a_2\langle r_2 \rangle$ (i.e. 区別不可) $\Leftrightarrow a_1 = a_2$ かつ $r_1 = r_2$

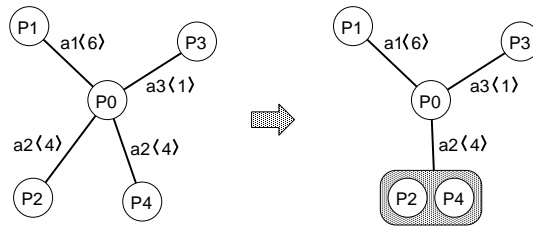


図3 区別不可能なルータによる結合の解釈

1つのノードに接続されているルータは全て区別可能である。(仮定2)

例えば図3に示されるように、もし P_2 と P_4 が区別できない2つのルータ $a_2(4)$ を通して P_0 に接続されているならば、 P_2 と P_4 は同じ場所にあると解釈される。つまり、 P_2 と P_4 の間の経路は $(a_2(4)a_2(4))$ ではなく空列 ε となる。よって、任意の2点間の経路は、区別できないルータを続けることなく表現できる。そこで、経路の集合 Ψ を、次のように定義する。

$$\Psi = \{s \in \Omega^* \mid \text{No-adjacent}(s)\}$$

ここで、 Ω^* は有限ルータ列の集合を表し、 $\text{No-adjacent}(s)$ は s が2つの連続した区別できないルータ列をもたないことを表している。例えば、 $(a_2(4)a_2(4)) \notin \Psi$ である。

余名の集合 $\bar{\mathcal{N}}$ を $\{\bar{a} : a \in \mathcal{N}\}$ として与える。ここで、 $\bar{\cdot}$ は名前と余名の間の全単射であり、 $\bar{\bar{a}} = a$ である。 \mathcal{N} と $\bar{\mathcal{N}}$ の和集合 $\mathcal{N} \cup \bar{\mathcal{N}}$ をラベルの集合 \mathcal{A} と呼び、その要素を α で表す。観測可能なアクションの集合 Act は、ラベルの集合 \mathcal{A} と実数の集合 \mathcal{R} と経路の集合 Ψ の直積集合

$$\text{Act} = \{\alpha(r)@s : \alpha \in \mathcal{A}, r \in \mathcal{R}, s \in \Psi\}$$

として与えられる。最後に内部アクションを表す τ を Act に加えてアクションの集合

$$\text{Act}_\tau = \text{Act} \cup \{\tau\}$$

を得る。

表1に集合の要素を表す変数をまとめておく。

2.2 経路上の演算子

図1において、 P_1 から P_2 への経路 s_{12} は $(a_1(6)a_2(4))$ であり、 P_2 から P_3 への経路 s_{23} は $(a_2(4)a_3(1))$ であ

表1 各集合の要素を表す変数

集合	要素の名前	要素上の変数
\mathcal{N}	名前	a, a', a_1, \dots
$\bar{\mathcal{N}}$	余名	$\bar{a}, \bar{a}', \bar{a}_1, \dots$
\mathcal{R}	実数	r, r', r_1, \dots
\mathcal{A}	ラベル	$\alpha, \alpha', \alpha_1, \dots$
Ω	ルータ	$\omega, \omega', \omega_1, \dots$
Ψ	経路	s, s', s_1, \dots
Act_τ	アクション	μ, μ', μ_1, \dots

る。このとき、 s_{12} と s_{23} の和は、(仮定2)によって、 P_1 から P_3 への経路 $(a_1(6)a_3(1))$ であることが期待される。つまり経路の和は、 $(a_1(6)a_2(4)a_2(4)a_3(1))$ のような単なる文字列の結合ではない。

この小節では、経路上に和、差、反転の演算子を定義し、それらに関する命題を与える。2つの経路 s_1 と s_2 の和とは、 s_1 の終点と s_2 の始点を同じ位置にしてできる、 s_1 の始点から s_2 の終点までの経路のことであり、 $(s_1 \circ s_2)$ と記述される。和の演算子 \circ は次のように、結合点の同じルータを順次消去することによって定義される。

定義 2.1 和の演算子 $\circ : \Psi \times \Psi \rightarrow \Psi$ を次のように定義する。

$$s_1 \circ s_2 = \begin{cases} s'_1 \circ s'_2 & : (s_1 = s'_1 \omega, s_2 = \omega s'_2) \\ s_1 s_2 & : (\text{otherwise}) \end{cases}$$

図4を用いて経路の計算方法を説明する。図中 ω_i がルータ、 s_i が経路を表し、各経路は $s_1 = \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4$ 、 $s_2 = \omega_4 \omega_3 \omega_5$ 、 $s_3 = \omega_1 \omega_2 \omega_5$ のように与えられている。このとき、 s_3 は s_1 と s_2 の和になっており、 s_1 と s_2 から

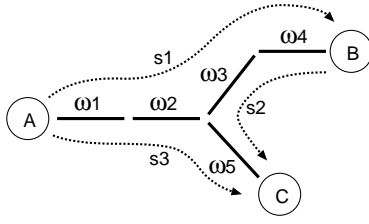


図4 経路演算の例

次のように求められる．

$$\begin{aligned} s_1 \circ s_2 &= \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \circ \omega_4 \omega_3 \omega_5 = \omega_1 \omega_2 \omega_3 \circ \omega_3 \omega_5 \\ &= \omega_1 \omega_2 \circ \omega_5 = \omega_1 \omega_2 \omega_5 = s_3 \end{aligned}$$

次に経路の向きを反転する演算子 rev を定義する．

定義 2.2 反転の演算子 $\text{rev} : \Psi \rightarrow \Psi$ を次のように定義する．

$$\text{rev}(s) = \begin{cases} \text{rev}(s_2)\text{rev}(s_1) & : (s = s_1 s_2) \\ \omega & : (s = \omega) \\ \varepsilon & : (s = \varepsilon) \end{cases}$$

最後に差の演算子を定義する．2つの経路 s_1 と s_2 の差とは， s_1 の終点と s_2 の終点を同じ位置にできる， s_1 の始点から s_2 の始点までの経路のことであり， $(s_1 \triangleleft s_2)$ と記述される．差の演算子 \triangleleft は，和と反転の演算子を用いて定義できる．

定義 2.3 差の演算子 $\triangleleft : \Psi \times \Psi \rightarrow \Psi$ を次のように定義する．

$$s_1 \triangleleft s_2 = s_1 \circ \text{rev}(s_2)$$

例えば，図4の s_1 は s_3 と s_2 の差になっており， s_3 と s_2 から次のように求められる．

$$\begin{aligned} s_3 \triangleleft s_2 &= s_3 \circ \text{rev}(s_2) = \omega_1 \omega_2 \omega_5 \circ \text{rev}(\omega_4 \omega_3 \omega_5) \\ &= \omega_1 \omega_2 \omega_5 \circ \omega_5 \omega_3 \omega_4 = \omega_1 \omega_2 \circ \omega_3 \omega_4 \\ &= \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 = s_1 \end{aligned}$$

CCSG では (条件 1) による同期の可能性を調べるために，2点間の損失距離を求めることが重要である．そこで経路の損失距離を求める関数 π を定義する．

定義 2.4 関数 $\pi : \Psi \rightarrow \mathcal{R}^+$ を次のように定義する．

$$\pi(s) = \begin{cases} \pi(s_1) + \pi(s_2) & : (s = s_1 s_2) \\ r & : (s = \alpha \langle r \rangle) \\ 0 & : (s = \varepsilon) \end{cases}$$

2つの経路が与えられ，かつそれらの終点が同じであるとき，それらの2つの始点の間の損失距離を求めるこ

とが，しばしば必要となる．例えば，図4の AB 間の損失距離は s_3 と s_2 を用いて， $\pi(s_3 \triangleleft s_2)$ によって求められる．

この経路の演算はベクトルの演算に似ており，命題 2.1 に示すような関係が成り立つ．

命題 2.1 任意の $s, s_i \in \Psi$ について，次式が成り立つ．

- (1) $s \circ \varepsilon = \varepsilon \circ s = s$
- (2) $s \triangleleft s = \varepsilon$
- (3) $(s_1 \circ s_2) \circ s_3 = s_1 \circ (s_2 \circ s_3)$
- (4) $(s_1 \triangleleft s_2) \triangleleft s_3 = s_1 \triangleleft (s_3 \circ s_2)$
- (5) $(s_1 \circ s_2) \triangleleft s_3 = s_1 \circ (s_2 \triangleleft s_3)$
- (6) $(s_1 \circ s_2) \triangleleft s_3 = s_1 \triangleleft (s_3 \triangleleft s_2)$
- (7) $s_1 \triangleleft s_2 = (s_1 \circ s) \triangleleft (s_2 \circ s)$
- (8) $s_1 \circ s_2 = s_3$ iff $s_1 = s_3 \triangleleft s_2$
- (9) $\pi(s_1 \circ s_2) \geq |\pi(s_1) - \pi(s_2)|$
- (10) $\pi(s_1 \circ s_2) \leq \pi(s_1) + \pi(s_2)$

証明 (3) と (9) の証明のみ示す．他は (3) か (9) と同様に，またはより簡単に証明できる．

(3) s_2 の長さについて場合分けをする． $s_2 = \varepsilon$ の場合は簡単． s_2 の長さが 2 以上の場合は帰納法を用いる． $s_1 = s'_1 \omega$ かつ $s_2 = \omega$ かつ $s_3 = \omega s'_3$ の場合が最も重要である．このとき，

$$\begin{aligned} (s_1 \circ s_2) \circ s_3 &= (s'_1 \omega \circ \omega) \circ \omega s'_3 = (s'_1 \circ \varepsilon) \circ \omega s'_3 \\ &= (s'_1 \varepsilon) \circ \omega s'_3 = s'_1 \circ \omega s'_3, \\ s_1 \circ (s_2 \circ s_3) &= s'_1 \omega \circ (\omega \circ \omega s'_3) = s'_1 \omega \circ (\varepsilon \circ s'_3) \\ &= s'_1 \omega \circ (\varepsilon s'_3) = s'_1 \omega \circ s'_3. \end{aligned}$$

となる．ここで，もし $s'_1 = s'_1 \omega'$ ならば， $s_1 = s'_1 \omega' \omega \in \Psi$ より， $\omega \neq \omega'$ である．同様に，もし $s'_3 = \omega'' s''_3$ ならば， $\omega \neq \omega''$ である．よって，

$$s'_1 \circ \omega s'_3 = s'_1 \omega s'_3 = s'_1 \omega \circ s'_3$$

を得る．これ以外の場合はこの場合より簡単である．

(9) $s_1 = \varepsilon$ か $s_2 = \varepsilon$ の場合は簡単なので省略する． $s_1 = s'_1 \omega$ かつ $s_2 = \omega s'_2$ の場合は次のように帰納法を適用する．

$$\begin{aligned} \pi(s_1 \circ s_2) &= \pi(s'_1 \omega \circ \omega s'_2) = \pi(s'_1 \circ s'_2) \\ &\geq |\pi(s'_1) - \pi(s'_2)| \\ &= |\pi(s'_1) + \pi(\omega) - (\pi(\omega) + \pi(s'_2))| \\ &= |\pi(s'_1 \omega) - \pi(\omega s'_2)| = |\pi(s_1) - \pi(s_2)|. \end{aligned}$$

それ以外の場合，つまり $\omega \neq \omega'$ で $s_1 = s'_1 \omega$ かつ $s_2 = \omega' s'_2$ の場合は，任意の $s \in \Psi$ について $\pi(s) \geq 0$

であるから、次のように直接示される。

$$\begin{aligned}\pi(s_1 \circ s_2) &= \pi(s_1 s_2) = \pi(s_1) + \pi(s_2) \\ &\geq |\pi(s_1) - \pi(s_2)|\end{aligned}$$

2.3 CCSG の構文論

プロセス代数では、プロセスの動作はプロセス式と呼ばれる式の形で記述される。我々は、プロセス変数の集合 \mathcal{X} とプロセス定数の集合 \mathcal{K} が与えられていると仮定する。CCSG のプロセス式の集合 \mathcal{E} (要素を E, F, \dots で表す) は次のように定義される。

定義 2.5 プロセス式の集合 \mathcal{E} は次の式を含む最小の集合である

X : プロセス変数 ($X \in \mathcal{X}$)

A : プロセス定数 ($A \in \mathcal{K}$)

0 : 無動作プロセス

$\mu.E$: プレフィクス ($\mu \in Act_\tau$)

$E + F$: 選択

$E|F$: 合成

$E[f]$: リラベリング (f はリラベリング関数)

$E \setminus_{(r)}^L(s)$: 局所制限 ($r \in \mathcal{R}^+, s \in \Psi, L \subseteq A$)

$E@s$: 経路 ($s \in \Psi$)

ここで、 E, F はすでに \mathcal{E} の要素であるとする。

リラベリング関数 f とは、 $f(\bar{\alpha}) = \overline{f(\alpha)}$ を満たすラベルからラベルへの関数である。任意の $i \in \{1, \dots, n\}$ について $f(\alpha_i) = \alpha'_i$, それ以外では $f(\alpha) = \alpha$ であるようなリラベリング関数 f を、

$$(\alpha'_1/\alpha_1, \alpha'_2/\alpha_2, \dots, \alpha'_n/\alpha_n)$$

と記述する。便宜的に $f(\alpha \langle r \rangle @s) = f(\alpha) \langle r \rangle @s$ かつ $f(\tau) = \tau$ とし、 f をアクションの集合 Act_τ まで拡張する。この条件にみられるように、ルータの名前を変えることはできない。

プロセス変数を含まないプロセス式をプロセスと呼び、プロセスの集合を \mathcal{P} , その要素を P, Q, \dots で表す。プロセス定数は定義式によって意味を与えられるプロセスであり、全てのプロセス定数 A について、 $A \stackrel{\text{def}}{=} P$ の定義式があると仮定する。

以下、各演算子の役割と、プロセス式の位置関係について説明する。

- $\mu.E$ はアクション μ を起こした後は E のように振舞うことを表す。プロセス式 $\mu.E$ とその部分式 E

の位置は同じである。 $\mu = \alpha \langle r \rangle @s$ ならば、 s はアクションが起こった位置から E の位置までの経路を表している。

- $E + F$ は E か F の選択動作を表す。選択は E か F のアクションによって行なわれる。 $E + F$, E , F の位置は全て同じである。
- $E|F$ は E と F の並行動作を表す。 $E|F$, E , F の位置は全て同じである。
- $E[f]$ は、 E の全てのアクションのラベルがリラベリング関数 f によって変更されていることを除いて、 E と同じように振舞う。 $E[f]$ と E の位置は同じである。
- $E \setminus_{(r)}^L(s)$ は制限領域の中心における制限力が r である局所制限を行なう。 s はその領域の中心から E の位置までの経路を表している。制限領域の中心から経路 s' 離れた位置で生じたアクションに対する制限力はその損失距離 $\pi(s')$ だけ減少しており、その実際に有効になる制限力 ($r - \pi(s')$) を実効制限力と呼ぶ。アクションのグレードの絶対値がその実効制限力以下であり、そのラベルが L に含まれるならば、そのアクションは制限される (2.4 小節の例参照)。 $E \setminus_{(r)}^L(s)$ と E の位置は同じである。
- $E@s$ は E から $E@s$ までの位置が経路 s だけ離れていることを表す。

例えば $E@s|F@s'$ では、 $E@s$ と $F@s'$ と $E@s|F@s'$ が同じ位置にある。つまり、 E から $E@s|F@s'$ までの経路は s であり、 F から $E@s|F@s'$ までの経路は s' である。さらに、 E から F までの経路は $(s \triangleleft s')$ によって求められる。

演算子の結合の優先順位は { 局所制限, リラベリング, 経路 } > プレフィクス > 合成 > 選択, である。

2.4 CCSG の意味論

プロセス式の意味は CCS と同様にラベル付遷移システム $(\mathcal{E}, Act_\tau, \{ \xrightarrow{\mu} : \mu \in Act_\tau \})$ をもとに与えられる。例えば、 $E \xrightarrow{\mu} E'$ はプロセス式 E がアクション μ を実行することができ、その実行後はプロセス式 E' のように振舞うことを意味している。

定義 2.6 プロセス式間の遷移関係 $\xrightarrow{\mu}$ は図 5 の推論規則を満たす最小の関係である。ここで、横棒の上が 0 個以

$\text{Act} \frac{}{\mu.E \xrightarrow{\mu} E}$	$\text{Con} \frac{P \xrightarrow{\mu} P'}{A \xrightarrow{\mu} P'} (A \stackrel{\text{def}}{=} P)$
$\text{Choice}_1 \frac{E \xrightarrow{\mu} E'}{E + F \xrightarrow{\mu} E'}$	$\text{Choice}_2 \frac{F \xrightarrow{\mu} F'}{E + F \xrightarrow{\mu} F'}$
$\text{Com}_1 \frac{E \xrightarrow{\mu} E'}{E F \xrightarrow{\mu} E' F}$	$\text{Com}_2 \frac{F \xrightarrow{\mu} F'}{E F \xrightarrow{\mu} E F'}$
$\text{Com}_3 \frac{E \xrightarrow{\alpha(r_1)@s_1} E' \quad F \xrightarrow{\bar{\alpha}(r_2)@s_2} F'}{E F \xrightarrow{\tau} E' F'} (r_1 + r_2 \geq \pi(s_1 \triangleleft s_2))$	
$\text{Res}_1 \frac{E \xrightarrow{\alpha(r_1)@s_1} E'}{E \setminus_{\langle r_2 \rangle(s_2)} \xrightarrow{\alpha(r_1)@s_1} E' \setminus_{\langle r_2 \rangle(s_2)}} \left(\begin{array}{l} \alpha, \bar{\alpha} \notin L \text{ or} \\ r_1 > r_2 - \pi(s_1 \triangleleft s_2) \end{array} \right)$	
$\text{Res}_2 \frac{E \xrightarrow{\tau} E'}{E \setminus_{\langle r \rangle(s)} \xrightarrow{\tau} E' \setminus_{\langle r \rangle(s)}}$	$\text{Rel} \frac{E \xrightarrow{\mu} E'}{E[f] \xrightarrow{f(\mu)} E'[f]}$
$\text{Rou}_1 \frac{E \xrightarrow{\alpha(r)@s_1} E'}{E @_{s_2} \xrightarrow{\alpha(r)@(s_1 \circ s_2)} E' @_{s_2}}$	$\text{Rou}_2 \frac{E \xrightarrow{\tau} E'}{E @_s \xrightarrow{\tau} E' @_s}$

図5 CCSGの状態遷移規則

上の仮定, 右横が条件, 下が結果を表している. ■

CCSとの違いは, Rou_1 , Com_3 , Res_1 にあられる. 以下, これらの規則について説明する.

Rou_1 の E のアクション $\alpha(r)@s_1$ は, アクションが生じた位置から E までの経路が s_1 であることを表している. $E@s_2$ は E から経路 s_2 だけ離れているので, このアクションが生じた位置から $E@s_2$ までの経路は $(s_1 \circ s_2)$ となる.

CCSと同様に, Com_3 は相補的なラベル $(\alpha, \bar{\alpha})$ をもつ2つのアクションの同期を表している. ただし, (条件1)を考慮して条件 $r_1 + r_2 \geq \pi(s_1 \triangleleft s_2)$ が付加されている. 2.2小節で述べたように $\pi(s_1 \triangleleft s_2)$ は2つのアクションの損失距離である.

Res_1 の条件 $|r_1| > r_2 - \pi(s_1 \triangleleft s_2)$ は, グレイド r_1 の絶対値が実効制限力 $(r_2 - \pi(s_1 \triangleleft s_2))$ より大きいときは, ラベルが L に含まれていても制限できないことを表している. r_2 は s_2 で示される制限領域の中心での制限力であり, その中心からアクションの生じた位置までの損失距離は $\pi(s_1 \triangleleft s_2)$ によって表される.

局所制限について, 次の例を用いて説明する.

$$SYS \equiv (P@s_1) \setminus_{\langle 7 \rangle(s_2)}^{\{\alpha\}}, \quad P \equiv (\alpha\langle 5 \rangle @ \varepsilon).0$$

ここで, $s_1 = a_2\langle 1 \rangle a_1\langle 4 \rangle$, $s_2 = a_3\langle 2 \rangle a_1\langle 4 \rangle$ である. P はアクション $\alpha\langle 5 \rangle$ を起こすと停止するプロセスである.

P から SYS までは経路 s_1 離れており, SYS は α の局所制限を行なっている. 制限領域の中心から SYS までは経路 s_2 離れており, 中心における制限力は7である. このとき, P から制限領域の中心までの損失距離は次のように求められる.

$$\begin{aligned} \pi(s_1 \triangleleft s_2) &= \pi(s_1 \circ \text{rev}(s_2)) \\ &= \pi((a_2\langle 1 \rangle a_1\langle 4 \rangle) \circ (a_1\langle 4 \rangle a_3\langle 2 \rangle)) \\ &= \pi(a_2\langle 1 \rangle a_3\langle 2 \rangle) = 3 \end{aligned}$$

よって, P に対する実効制限力は $(7 - 3) = 4$ となり, P の $\alpha\langle 5 \rangle$ は制限されない.

3 CCSGにおける等価性

3.1小節では, 1節で紹介したシフト (s) 等価を定義し, その命題を与える. 3.2小節で, レベル $\langle r \rangle$ 弱等価を定義する. 1節で紹介したレベル $\langle r \rangle$ 等価は, このレベル $\langle r \rangle$ 弱等価をもとにして, 3.3小節で定義される. レベル $\langle r \rangle$ 等価は, 選択演算子 $+$ によって保存され, かつレベル $\langle r \rangle$ 弱等価に含まれる最大の同値関係である. 3.4小節では, 有限逐次プロセスのレベル $\langle r \rangle$ 等価に対する健全で完全な公理系 $\mathcal{A}\langle r \rangle$ を与える. 3.5小節では, レベル $\langle r \rangle$ 観測のもとでのプロセス論理の充足関係を定義し, これをもとにしたレベル $\langle r \rangle$ 弱等価の解釈を与える.

3.1 シフト (s) 等価

観測位置によってシステムが異なって観測されるため、それらの観測結果を関係付けるためにシフト (s) 等価を、次のシフト (s) 双模倣をもとに定義する。

定義 3.1 $s \in \Psi$ とする。プロセス上の関係 S がシフト (s) 双模倣であるとは、 $(P, Q) \in S$ ならば、任意の $\alpha\langle r \rangle @ s' \in Act$ について、次の 4 つの条件が成り立つことである。

- (i) $P \xrightarrow{\alpha\langle r \rangle @ s'} P'$ ならば、ある Q' が存在して、
 $Q \xrightarrow{\alpha\langle r \rangle @ (s' \circ s)} Q'$ かつ $(P', Q') \in S$ を満たす。
- (ii) $P \xrightarrow{\tau} P'$ ならば、ある Q' が存在して、
 $Q \xrightarrow{\tau} Q'$ かつ $(P', Q') \in S$ を満たす。
- (iii) $Q \xrightarrow{\alpha\langle r \rangle @ s'} Q'$ ならば、ある P' が存在して、
 $P \xrightarrow{\alpha\langle r \rangle @ (s' \triangleleft s)} P'$ かつ $(P', Q') \in S$ を満たす。
- (iv) $Q \xrightarrow{\tau} Q'$ ならば、ある P' が存在して、
 $P \xrightarrow{\tau} P'$ かつ $(P', Q') \in S$ を満たす。

定義 3.2 もし、あるシフト (s) 双模倣 S において $(P, Q) \in S$ ならば、プロセス P と Q はシフト (s) 等価であるといい、 $P \sim_{(s)} Q$ と書く。

定義 3.1 の (i) と (iii) の $(s' \circ s)$ と $(s' \triangleleft s)$ が、右辺と左辺の観測者の位置の違い s を補正している。 $\sim_{(s)}$ は同値関係ではないが、次のようにパラメータ付きの反射律、対称律、推移律が成り立つ。

命題 3.1

- (1) $P \sim_{(\varepsilon)} P$
- (2) $P \sim_{(s)} Q$ ならば $Q \sim_{(\text{rev}(s))} P$
- (3) $P \sim_{(s_1)} Q$ かつ $Q \sim_{(s_2)} R$ ならば $P \sim_{(s_1 \circ s_2)} R$

証明 (1) については、 $s \circ \varepsilon = s \triangleleft \varepsilon = s$ より明らか。

(2) については、 $s' \circ \text{rev}(s) = s' \triangleleft s$ と $s' \triangleleft \text{rev}(s) = s' \circ s$ より明らか。

(3) について、 $P \sim_{(s_1)} Q$ と $Q \sim_{(s_2)} R$ を仮定する。すなわち、 $(P, Q) \in S_1$ のようなシフト (s_1) 双模倣 S_1 と $(Q, R) \in S_2$ のようなシフト (s_2) 双模倣 S_2 が存在する。このとき $S_1 S_2$ がシフト $(s_1 \circ s_2)$ 双模倣となることを示す。ここでは最も興味深い、定義 3.1 の (iii) を満たすことのみ示す。

$R \xrightarrow{\alpha\langle r \rangle @ s} R'$ とする。 $(Q, R) \in S_2$ より、ある Q' で $Q \xrightarrow{\alpha\langle r \rangle @ (s \triangleleft s_2)} Q'$ かつ $(Q', R') \in S_2$ を得る。さらに、

$(P, Q) \in S_1$ より、ある P' で $P \xrightarrow{\alpha\langle r \rangle @ ((s \triangleleft s_2) \triangleleft s_1)} P'$ かつ $(P', Q') \in S_1$ を得る。ここで、命題 2.1(4) より $(s \triangleleft s_2) \triangleleft s_1 = s \triangleleft (s_1 \circ s_2)$ である。よって、 $P \xrightarrow{\alpha\langle r \rangle @ (s \triangleleft (s_1 \circ s_2))} P'$ かつ $(P', R') \in S_1 S_2$ を得る。

この命題が示すように、全ての $s \in \Psi$ について $\sim_{(s)}$ の和集合をとってつくられる関係は同値関係になる。また、 $s \circ \varepsilon = s \triangleleft \varepsilon = s$ であるので、 $\sim_{(\varepsilon)}$ は CCS の強等価に同じである。便宜上、我々も $\sim_{(\varepsilon)}$ のために \sim の記号を用いる。強等価の経路演算子に関する等式を次に示す。

命題 3.2 次の等式が成り立つ。

- (1) $((\alpha\langle r \rangle @ s).P) @ s' \sim (\alpha\langle r \rangle @ (s \circ s')).(P @ s')$
- (2) $(P_1 | P_2) @ s \sim (P_1 @ s) | (P_2 @ s)$
- (3) $(P @ s_1) @ s_2 \sim P @ (s_1 \circ s_2)$

証明 各々の等式について、シフト (ε) 双模倣をみつける。例として、(2) のために、

$S = \{((P_1 | P_2) @ s, (P_1 @ s) | (P_2 @ s)) : s \in \Psi, P_i \in \mathcal{P}\}$ がシフト (ε) 双模倣であることを示す。ここでは、重要な Com_3 による同期の場合のみ示す。

$(P_1 | P_2) @ s \xrightarrow{\tau} P'$ とする。このとき Rou_2 より、 $P_1 | P_2 \xrightarrow{\tau} P'_{12}$ かつ $P' \equiv P'_{12} @ s$ が得られる。さらに、 Com_3 より、 $P_1 \xrightarrow{\alpha\langle r_1 \rangle @ s_1} P'_1$ かつ $P_2 \xrightarrow{\bar{\alpha}\langle r_2 \rangle @ s_2} P'_2$ かつ $P'_{12} \equiv P'_1 | P'_2$ かつ $P' \equiv (P'_1 | P'_2) @ s$ かつ $r_1 + r_2 \geq \pi(s_1 \triangleleft s_2)$ が得られる。 P_1 と P_2 について、 Rou_1 より、 $P_1 @ s \xrightarrow{\alpha\langle r_1 \rangle @ (s_1 \circ s)} P'_1 @ s$ と $P_2 @ s \xrightarrow{\bar{\alpha}\langle r_2 \rangle @ (s_2 \circ s)} P'_2 @ s$ を得る。また、命題 2.1(7) より、 $(s_1 \circ s) \triangleleft (s_2 \circ s) = s_1 \triangleleft s_2$ である。よって、 $r_1 + r_2 \geq \pi(s_1 \triangleleft s_2) = \pi((s_1 \circ s) \triangleleft (s_2 \circ s))$ 。故に、 Com_3 より、 $(P_1 @ s) | (P_2 @ s) \xrightarrow{\tau} Q'$ かつ $Q' \equiv (P'_1 @ s) | (P'_2 @ s)$ を得る。ここで、 $(P', Q') \equiv ((P'_1 | P'_2) @ s, (P'_1 @ s) | (P'_2 @ s)) \in S$ である。

同様に、 $(P_1 @ s) | (P_2 @ s) \xrightarrow{\tau} Q'$ ならば、 $(P_1 | P_2) @ s \xrightarrow{\tau} P'$ かつ $(P', Q') \in S$ のような P' をみつけることができる。

(1) 式と (2) 式は、各々プレフィクスと合成への経路の分配則であり、(3) は経路の結合則に相当する。

次の命題は経路演算子 @ を使って観測位置を経路 s' だけ移動したとき、シフト (s) 等価がどのように保存さ

れるかを表している．

命題 3.3

- (1) $P \overset{\sim}{\sim}_{(s)} Q$ ならば, $P \overset{\sim}{\sim}_{(s \circ s')} Q @ s'$
- (2) $P \overset{\sim}{\sim}_{(s)} Q$ ならば, $P @ \text{rev}(s') \overset{\sim}{\sim}_{(s' \circ s)} Q$

証明 (1) について, 次の S がシフト $(s \circ s')$ 双模倣であることを示す．

$$S = \{(P, Q @ s') : P, Q \in \mathcal{P}, P \overset{\sim}{\sim}_{(s)} Q\}$$

$(P_0, Q_0 @ s') \in S$ と仮定する．ここでは, 定義 3.1 の (iii) のみ示す． $Q_0 @ s' \xrightarrow{\alpha(r) @ s'_0} Q'$ とする． Rou_1 より, $Q_0 \xrightarrow{\alpha(r) @ s_0} Q'_0$ かつ $Q' \equiv Q'_0 @ s'$ かつ $s'_0 = s_0 \circ s'$ を得る． $P_0 \overset{\sim}{\sim}_{(s)} Q_0$ より, ある P'_0 で $P_0 \xrightarrow{\alpha(r) @ (s_0 \triangleleft s)} P'_0$ かつ $P'_0 \overset{\sim}{\sim}_{(s)} Q'_0$ を得る．ここで, 命題 2.1(8) より, $s_0 = s'_0 \triangleleft s'$ である．さらに, 命題 2.1(4) より, $s_0 \triangleleft s = (s'_0 \triangleleft s') \triangleleft s = s'_0 \triangleleft (s_0 \circ s')$ である．それゆえ, $P_0 \xrightarrow{\alpha(r) @ (s'_0 \triangleleft (s_0 \circ s'))} P'_0$ かつ $(P'_0, Q'_0 @ s') \in S$ を得る．

(2) についても同様である． ■

次の命題は, $\overset{\sim}{\sim}_{(s)}$ が合成演算子 | によって保存されることを示している．

命題 3.4 $P_i \overset{\sim}{\sim}_{(s)} Q_i$ ($i \in \{1, 2\}$) ならば

$$P_1 | P_2 \overset{\sim}{\sim}_{(s)} Q_1 | Q_2 \text{ である.}$$

証明 次の S がシフト (s) 双模倣であることを示す．

$$S = \{(P_1 | P_2, Q_1 | Q_2) : (P_i, Q_i \in \mathcal{P}), P_i \overset{\sim}{\sim}_{(s)} Q_i\}$$

$(P_1 | P_2, Q_1 | Q_2) \in S$ とする．ここでは, 最も重要な, 定義 3.1 の (ii) の Com_3 による場合のみ示す．

$(P_1 | P_2) \xrightarrow{\tau} P'$ を仮定する． Com_3 より, $P_1 \xrightarrow{\alpha(r_1) @ s_1} P'_1$ かつ $P_2 \xrightarrow{\bar{\alpha}(r_2) @ s_2} P'_2$ かつ $P' \equiv P'_1 | P'_2$ かつ $r_1 + r_2 \geq \pi(s_1 \triangleleft s_2)$ を得る．ここで, 各 $i \in \{1, 2\}$ について $P_i \overset{\sim}{\sim}_{(s)} Q_i$ より, $Q_1 \xrightarrow{\alpha(r_1) @ (s_1 \circ s)} Q'_1$ かつ $Q_2 \xrightarrow{\bar{\alpha}(r_2) @ (s_2 \circ s)} Q'_2$ かつ $P'_i \overset{\sim}{\sim}_{(s)} Q'_i$ を得る．

また命題 2.1(7) より, $r_1 + r_2 \geq \pi(s_1 \triangleleft s_2) = \pi((s_1 \circ s) \triangleleft (s_2 \circ s))$ ．故に, Com_3 より, $(Q_1 | Q_2) \xrightarrow{\tau} Q'$ かつ $Q' \equiv (Q'_1 | Q'_2)$ を得る．ここで, $(P', Q') \equiv (P'_1 | P'_2, Q'_1 | Q'_2) \in S$ である． ■

3.2 レベル $\langle r \rangle$ 弱等価

この小節では, (仮定 1) に基づく近似的な同値関係であるレベル $\langle r \rangle$ 弱等価を定義する．レベル $\langle r \rangle$ 等価はこのレベル $\langle r \rangle$ 弱等価をもとに小節 3.3 で与えられる．まず, 必要な記法を準備する．

Act_τ^* を空列 ε を含む有限アクション列の集合とし, その要素を t, t', t_1, \dots で表す． $t = \mu_1 \dots \mu_n \in Act_\tau^*$ について, もし $E \xrightarrow{\mu_1} \dots \xrightarrow{\mu_n} E'$ ならば, $E \xrightarrow{t} E'$ と書く．特に, $E \xrightarrow{\varepsilon} E'$ は $E' \equiv E$ を意味する．

次に (仮定 1) を考慮して, アクションの実効グレードが $-r$ より低いアクションを無視するための閾値関数を定義する．

定義 3.3 関数 $\phi : Act_\tau^* \times \mathcal{R} \rightarrow Act^*$ を次のように定義する．

$$\phi(t, r) = \begin{cases} \phi(t_1, r) \phi(t_2, r) & : (t = t_1 t_2, t_1 \neq \varepsilon, t_2 \neq \varepsilon) \\ \alpha \langle r' \rangle @ s & : (t = \alpha \langle r' \rangle @ s, r' - \pi(s) \geq -r) \\ \varepsilon & : (\text{otherwise}) \end{cases}$$

この近似解析で注意しなければならないことは, 「グレードの高過ぎるアクションも不確定要素をもつ」ことである．直観的には, 無視されるほど低いグレードをもつアクションと同期する可能性があるためである．これは高感度な受信機がノイズを拾ってしまう現象に似ている．具体的には, 観測位置から経路 s 離れた位置では, 観測レベルは $r - \pi(s)$ まで減少しているため, このレベルを超えるアクションは不確定要素をもつ．このことを考慮し, 次の関数も定義する．

定義 3.4 関数 $\theta : Act_\tau^* \times \mathcal{R} \rightarrow Act^*$ を次のように定義する．

$$\theta(t, r) = \begin{cases} \theta(t_1, r) \theta(t_2, r) & : (t = t_1 t_2, t_1 \neq \varepsilon, t_2 \neq \varepsilon) \\ \alpha \langle r' \rangle @ s & : (t = \alpha \langle r' \rangle @ s, |r'| \leq r - \pi(s)) \\ \varepsilon & : (\text{otherwise}) \end{cases}$$

つまり, レベル $\langle r \rangle$ 観測ではアクションを次の 3 種類に分類できる．

- (1) 常に観測できないアクション．
- (2) 常に観測できるアクション．
- (3) 時々観測できないアクション．

グレードが低ければ観測できず, グレードが高ければ観測できる．ただし, グレードの高過ぎるアクションは観測できないアクションと同期する可能性があるため, その実行が観測できない場合がある．このアクションを不確定なアクションと呼ぶ．

次の例は, 2 つの閾値関数 ϕ と θ の特徴をよく表して

いる .

$\phi(\alpha\langle -2 \rangle @ \varepsilon, 1) = \varepsilon$, $\theta(\alpha\langle -2 \rangle @ \varepsilon, 1) = \varepsilon$
 $\phi(\bar{\alpha}\langle 0 \rangle @ \varepsilon, 1) = \bar{\alpha}\langle 0 \rangle @ \varepsilon$, $\theta(\bar{\alpha}\langle 0 \rangle @ \varepsilon, 1) = \bar{\alpha}\langle 0 \rangle @ \varepsilon$
 $\phi(\bar{\alpha}\langle 2 \rangle @ \varepsilon, 1) = \bar{\alpha}\langle 2 \rangle @ \varepsilon$, $\theta(\bar{\alpha}\langle 2 \rangle @ \varepsilon, 1) = \varepsilon$
 レベル $\langle 1 \rangle$ 観測では , $(\alpha\langle -2 \rangle @ \varepsilon)$ は観測不可能なアクションであり , このアクションと同期できる $(\bar{\alpha}\langle 2 \rangle @ \varepsilon)$ は不確定なアクションである . $(\bar{\alpha}\langle 0 \rangle @ \varepsilon)$ は $(\alpha\langle -2 \rangle @ \varepsilon)$ と同期することはできず , 不確定要素をもたない .

次に , 各 $r \in \mathcal{R}$ について , 状態遷移システム

$$(\mathcal{E}, Act_\tau^*, \{\xrightarrow{t}_{\langle r \rangle} : t \in Act_\tau^*\})$$

を定義する . この $\xrightarrow{t}_{\langle r \rangle}$ は (グレイドの高過ぎる) 不確定なアクションと (グレイドの低過ぎる) 観測不可能なアクションを暗に含む状態遷移関係であり , 次のように与えられる .

定義 3.5 $r \in \mathcal{R}$ とする . $t \in Act_\tau^*$ について , $\theta(t, r) = \varepsilon$ かつ $E \xrightarrow{t}_{\langle r \rangle} E'$ ならば $E \xrightarrow{\varepsilon}_{\langle r \rangle} E'$ である . この $\xrightarrow{\varepsilon}_{\langle r \rangle}$ は $\Longrightarrow_{\langle r \rangle}$ と略記される . さらに $t = \mu_1 \cdots \mu_n$ について , $E \xrightarrow{\mu_1}_{\langle r \rangle} \xrightarrow{\mu_2}_{\langle r \rangle} \cdots \xrightarrow{\mu_n}_{\langle r \rangle} E'$ ならば , $E \xrightarrow{t}_{\langle r \rangle} E'$ である . ■

この状態遷移関係を用いて , レベル $\langle r \rangle$ 弱等価を次のレベル $\langle r \rangle$ 双模倣をもとに定義する .

定義 3.6 $r \in \mathcal{R}$ とする . プロセス上の関係 S がレベル $\langle r \rangle$ 双模倣であるとは , $(P, Q) \in S$ ならば , 任意の $\mu \in Act$ について , 次の 2 つの条件が成り立つことである .

- (i) $P \xrightarrow{\mu}_{\langle r \rangle} P'$ ならば , ある Q' が存在して ,
 $Q \xrightarrow{\phi(\mu, r)}_{\langle r \rangle} Q'$ かつ $(P', Q') \in S$ を満たす .
 (ii) $Q \xrightarrow{\mu}_{\langle r \rangle} Q'$ ならば , ある P' が存在して ,
 $P \xrightarrow{\phi(\mu, r)}_{\langle r \rangle} P'$ かつ $(P', Q') \in S$ を満たす . ■

定義 3.7 もし , あるレベル $\langle r \rangle$ 双模倣 S において $(P, Q) \in S$ ならば , プロセス P と Q はレベル $\langle r \rangle$ 弱等価であるといい , $P \approx_{\langle r \rangle} Q$ と書く . ■

定義 3.6 の $\Longrightarrow_{\langle r \rangle}$ の上には θ ではなく ϕ が使われている . これは , グレイドの高いアクションは不確定要素をもっているが無視されてはならないためである .

$\approx_{\langle r \rangle}$ の基本的な性質を次に示す .

命題 3.5

- (1) $\approx_{\langle r \rangle}$ は同値関係である .
 (2) $r \geq r'$ ならば $\approx_{\langle r \rangle} \subseteq \approx_{\langle r' \rangle}$ である .

証明 (1) の反射律と対称律は容易に示される . 推移律については付録の補題 A.1 を用いる . (2) については ,

付録の補題 A.2 を用いる . ■

十分にレベル r を高くとれば , 観測できないアクションは内部アクション τ のみとなる . 特に , レベル $\langle \infty \rangle$ 弱等価は [7] で定義されている弱等価 \sim に相当する .

次の命題が示すように $\approx_{\langle r \rangle}$ は合成演算子によって保存され , 制限演算子によっても条件付きで保存される .

命題 3.6 $P_1 \approx_{\langle r \rangle} P_2$ ならば , 次の関係が成り立つ .

- (1) $P_1|Q \approx_{\langle r \rangle} P_2|Q$
 (2) $P_1 \setminus_{\langle r' \rangle \langle s' \rangle}^L \approx_{\langle r \rangle} P_2 \setminus_{\langle r' \rangle \langle s' \rangle}^L$ if $r' + \pi(s') \leq r$
 (3) $P_1 @ s' \approx_{\langle r' \rangle} P_2 @ s'$ if $r' + \pi(s') \leq r$

証明 (1) について , 次の S がレベル $\langle r \rangle$ 双模倣であることを示す .

$S = \{(P_1|P_0, P_2|P_0) : (P_0, P_1, P_2 \in \mathcal{P}), P_1 \approx_{\langle r \rangle} P_2\}$
 $(P_1|P_0, P_2|P_0) \in S$ を仮定する . ここでは , \mathbf{Com}_3 による同期の場合のみ示す .

$P_1|P_0 \xrightarrow{\tau} P'$ とする . \mathbf{Com}_3 より , $P_1 \xrightarrow{\alpha\langle r_1 \rangle @ s_1} P'_1$ かつ $P_0 \xrightarrow{\bar{\alpha}\langle r_0 \rangle @ s_0} P'_0$ かつ $P' \equiv P'_1|P'_0$ かつ $r_1 + r_0 \geq \pi(s_1 \triangleleft s_0)$ (#1) を得る . さらに , $P_1 \approx_{\langle r \rangle} P_2$ より , $P_2 \xrightarrow{\phi(\alpha\langle r_1 \rangle @ s_1, r)}_{\langle r \rangle} P'_2$ かつ $P'_1 \approx_{\langle r \rangle} P'_2$ となる P'_2 が存在する . 次の 2 つの場合に分けて示す .

- $r_1 < \pi(s_1) - r$ (#2) の場合 . このとき , 次のようにして , $r_0 > r - \pi(s_0)$ (#3) を得る .

$$\begin{aligned} & r_0 - (r - \pi(s_0)) \\ & \geq \pi(s_1 \triangleleft s_0) - r_1 - (r - \pi(s_0)) \quad \text{by (\#1)} \\ & > \pi(s_1 \triangleleft s_0) - (\pi(s_1) - \pi(s_0)) \quad \text{by (\#2)} \\ & \geq \pi(s_1 \triangleleft s_0) - |\pi(s_1) - \pi(s_0)| \\ & = \pi(s_1 \circ \text{rev}(s_0)) - |\pi(s_1) - \pi(\text{rev}(s_0))| \\ & \geq 0 \quad \text{by 命題 2.1(9)} \end{aligned}$$

(#3) より , $\theta(\bar{\alpha}\langle r_0 \rangle @ s_0, r) = \varepsilon$ なので , $P_0 \Longrightarrow_{\langle r \rangle} P'_0$ である . また , (#2) より , $\phi(\alpha\langle r_1 \rangle @ s_1, r) = \varepsilon$ なので , $P_2 \Longrightarrow_{\langle r \rangle} P'_2$ である . \mathbf{Com}_1 と \mathbf{Com}_2 より , それらは $P_2|P_0 \Longrightarrow_{\langle r \rangle} Q'$ かつ $Q' \equiv P'_2|P'_0$ を導く . ここで , $\phi(\tau, r) = \varepsilon$ より , $P_2|P_0 \xrightarrow{\phi(\tau, r)}_{\langle r \rangle} Q'$ かつ $(P', Q') \in S$ を得る .

- それ以外の場合 (すなわち , $r_1 \geq \pi(s_1) - r$) . このとき , $\phi(\alpha\langle r_1 \rangle @ s_1, r) = \alpha\langle r_1 \rangle @ s_1$ である . \mathbf{Com}_1 と \mathbf{Com}_3 より , それらは $P_2|P_0 \xrightarrow{\tau}_{\langle r \rangle} Q'$ かつ $Q' \equiv P'_2|P'_0$ を導く . ここで , $\theta(\tau, r) = \varepsilon$ より , $P_2|P_0 \Longrightarrow_{\langle r \rangle} Q'$ を得る . さらに , $\phi(\tau, r) = \varepsilon$ より , $P_2|P_0 \xrightarrow{\phi(\tau, r)}_{\langle r \rangle} Q'$ かつ $(P', Q') \in S$ を得る .

(2) については、付録の補題 A.3 を用いて証明できる。

(3) については (2) と似た方法で証明できる。 ■

(2) の条件 ($r' + \pi(s') \leq r$) は直観的には、制限領域 (中心までの損失距離 $\pi(s')$, 半径 r' の内側) が観測不可能領域 (半径 r の外側) に入らないことを意味している。

3.3 レベル $\langle r \rangle$ 等価

レベル $\langle r \rangle$ 弱等価は弱等価と同様に選択演算子 $+$ によって保存されない問題がある。この小節では、選択演算子 $+$ によって保存され、かつレベル $\langle r \rangle$ 弱等価に含まれる最大の同値関係として、レベル $\langle r \rangle$ 等価が与えられる。まず、アクション上の関係 $\succeq_{\langle r \rangle} (\subset Act_\tau \times Act_\tau)$ を次のように定義する。

定義 3.8 $r \in \mathcal{R}$ とする。レベル $\langle r \rangle$ 代用 $\succeq_{\langle r \rangle}$ は次のように定義されるアクション上の関係である。

$$\begin{aligned} \succeq_{\langle r \rangle} = & \{(\mu, \mu') : \mu \in Act_\tau, \phi(\mu, r) = \theta(\mu', r) = \varepsilon\} \\ & \cup \{(\mu, \mu') : \mu, \mu' \in Act_\tau, \phi(\mu, r) = \theta(\mu', r) = \varepsilon\} \end{aligned}$$

($\mu \succeq_{\langle r \rangle} \mu'$) は、レベル $\langle r \rangle$ 観測において、アクション μ の代わりにアクション μ' を対応させてもよいことを表している。例えば、次の関係は $\succeq_{\langle r \rangle}$ の特徴をよく表している。

$\tau \succeq_{\langle 1 \rangle} (\alpha \langle -2 \rangle @ \varepsilon)$, $(\alpha \langle -2 \rangle @ \varepsilon) \succeq_{\langle 1 \rangle} \tau$
 $\tau \succeq_{\langle 1 \rangle} (\alpha \langle 2 \rangle @ \varepsilon)$, $(\alpha \langle 2 \rangle @ \varepsilon) \not\succeq_{\langle 1 \rangle} \tau$
 レベル $\langle 1 \rangle$ 観測では、 $(\alpha \langle -2 \rangle @ \varepsilon)$ は観測不可能なアクションであり、 $(\alpha \langle 2 \rangle @ \varepsilon)$ は不確定なアクションである。観測不可能なアクションは内部アクション τ に同等であるが、不確定なアクションは同等ではない。不確定なアクションは内部アクションとして動作することができるが、逆はできない。それは、不確定なアクションは観測できるアクションと同期する可能性があるためである。

次にレベル $\langle r \rangle$ 等価を定義する。

定義 3.9 $r \in \mathcal{R}$ とする。もし、任意の $\mu \in Act$ について、次の 2 つの条件を満たすならば、 P と Q はレベル $\langle r \rangle$ 等価であるといい、 $P =_{\langle r \rangle} Q$ と書く。

- (i) $P \xrightarrow{\mu} P'$ ならば、ある Q' と μ' が存在して、
 $Q \xrightarrow{\mu'}_{\langle r \rangle} Q'$, $(P', Q') \in S$, $\mu \succeq_{\langle r \rangle} \mu'$ を満たす。
 (ii) $Q \xrightarrow{\mu} Q'$ ならば、ある P' と μ' が存在して、
 $P \xrightarrow{\mu'}_{\langle r \rangle} P'$, $(P', Q') \in S$, $\mu \succeq_{\langle r \rangle} \mu'$ を満たす。 ■

レベル $\langle r \rangle$ 弱等価 $\approx_{\langle r \rangle}$ との違いは、レベル $\langle r \rangle$ 等価 $=_{\langle r \rangle}$ では最初の各アクションについては、代用可能なアクションによって対応されなければならないことである。レベルが高くなるに従って、代用できるアクションの選択の幅は狭くなり、レベル $\langle \infty \rangle$ 等価 $=_{\langle \infty \rangle}$ は観測合同 $=$ に相当する。

レベル $\langle r \rangle$ 等価は、命題 3.7 に示されるように、選択演算子 $+$ によって保存され、かつレベル $\langle r \rangle$ 弱等価に含まれる最大の同値関係である。

命題 3.7(1) $P_1 =_{\langle r \rangle} P_2$ ならば、任意の $R \in \mathcal{P}$ について、 $P_1 + R =_{\langle r \rangle} P_2 + R$ である。

(2) Q を「 $Q \subseteq \approx_{\langle r \rangle}$ 」かつ「 $(P_1, P_2) \in Q$ ならば、任意の R について $(P_1 + R, P_2 + R) \in Q$ 」を満たす関係とする。このとき、 $\mathcal{L}(P_1) \cup \mathcal{L}(P_2) \neq \mathcal{A}^{\dagger 2}$ のような任意の $(P_1, P_2) \in Q$ について、 $P_1 =_{\langle r \rangle} P_2$ である。

証明 (1) $P_1 =_{\langle r \rangle} P_2$ を仮定する。今、 $P_1 + R \xrightarrow{\mu} P'$ とする。この状態遷移を導く次の 2 つの場合を考える。

- **Choice₁** より、 $P_1 + R \xrightarrow{\mu} P'$ から $P_1 \xrightarrow{\mu} P'$ を得る。 $P_1 =_{\langle r \rangle} P_2$ であるので、 $P_2 \xrightarrow{\mu'}_{\langle r \rangle} Q'$ かつ $P' \approx_{\langle r \rangle} Q'$ かつ $\mu \succeq_{\langle r \rangle} \mu'$ のような Q' と μ' が存在する。故に、**Choice₁** より、 $P_2 + R \xrightarrow{\mu'}_{\langle r \rangle} Q'$ を得る。
- **Choice₂** より、 $P_1 + R \xrightarrow{\mu} P'$ から $R \xrightarrow{\mu} P'$ を得る。よって、**Choice₂** より、 $P_2 + R \xrightarrow{\mu} P'$ を得る。これは、 $P_2 + R \xrightarrow{\mu}_{\langle r \rangle} P'$ を導く。ここで、 $\mu \succeq_{\langle r \rangle} \mu$ である。

$P_2 + R \xrightarrow{\mu} Q'$ についても対称の論法を適用し、 $P_1 + R =_{\langle r \rangle} P_2 + R$ を得る。

(2) $\mathcal{L}(P_1) \cup \mathcal{L}(P_2) \neq \mathcal{A}$ のような $(P_1, P_2) \in Q$ とする。 R として、 $A \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha_0 \langle r_0 \rangle @ \varepsilon).A$ のように定義される A をとる。ここで、 $\alpha_0 \notin \mathcal{L}(P_1) \cup \mathcal{L}(P_2)$ かつ $r_0 \geq -r$ とする。今、 $P_1 \xrightarrow{\mu} P'$ を仮定する。**Choice₁** より、 $P_1 + A \xrightarrow{\mu} P'$ を得る。 Q の仮定より $P_1 + A \approx_{\langle r \rangle} P_2 + A$ であるので、 $P_2 + A \xrightarrow{\phi(\mu, r)}_{\langle r \rangle} Q'$ かつ $P' \approx_{\langle r \rangle} Q'$ のような Q' が存在する。

もし μ が、 $r_1 \geq \pi(s_1) - r$ のような $(\alpha_1 \langle r_1 \rangle @ s_1)$ ならば、 $\phi(\alpha_1 \langle r_1 \rangle @ s_1, r) = \alpha_1 \langle r_1 \rangle @ s_1$ となる。この場合、 $P_2 \xrightarrow{\mu}_{\langle r \rangle} Q'$ かつ $P' \approx_{\langle r \rangle} Q'$ かつ $\mu \succeq_{\langle r \rangle} \mu$ の結

^{†2} $\mathcal{L}(P)$ は P が今後実行できる全てのアクションのラベルの集合を表す。

果は簡単に得られるので、この過程は省略する。

それ以外の場合 ($\phi(\mu, r) = \varepsilon$) を考える。つまり、 $P_2 + A \xrightarrow{\langle r \rangle} Q'$ である。先ず、 $Q' \neq P_2 + A$ を背理法を用いて示すために $Q' \equiv P_2 + A$ を仮定する。この場合、 $r_0 \geq -r$ より、 $\phi(\alpha_0 \langle r_0 \rangle @ \varepsilon, r) = \alpha_0 \langle r_0 \rangle @ \varepsilon$ であるので、 Q' は $(\alpha_0 \langle r_0 \rangle @ \varepsilon)$ アクションを起こさなければならない。さらに、 $P' \approx_{\langle r \rangle} Q'$ より、 P' もいつかは $(\alpha_0 \langle r_0 \rangle @ \varepsilon)$ アクションを起こさなければならない。しかし、 $\alpha_0 \notin \mathcal{L}(P') \subseteq \mathcal{L}(P_1)$ より、これは不可能である。よって $Q' \neq P_2 + A$ を得る。つまり、 $\theta(\mu', r) = \varepsilon$ かつ $P_2 + A \xrightarrow{\mu'} \langle r \rangle Q'$ のような μ' が存在する。ここで、もし、 $P_2 + A \xrightarrow{\mu'} \langle r \rangle Q'$ の状態遷移が A によって導かれた場合、 Q' は A となるため、再び P' はいつかは $(\alpha_0 \langle r_0 \rangle @ \varepsilon)$ アクションを起こさなければならない。よって、 $P_2 + A \xrightarrow{\mu'} \langle r \rangle Q'$ の状態遷移は P_2 によって導かれなければならない。それ故、 $P_2 \xrightarrow{\mu'} \langle r \rangle Q'$ かつ $P' \approx_{\langle r \rangle} Q'$ を得る。ここで、 $\phi(\mu, r) = \varepsilon = \theta(\mu', r)$ より、 $\mu \succeq_{\langle r \rangle} \mu'$ である。

$P_2 \xrightarrow{\mu} Q'$ についても対称的な論法を適用し、 $P_1 \equiv_{\langle r \rangle} P_2$ を得る。

レベル $\langle r \rangle$ 等価は、制限演算子や経路演算子によって保存されないため、合同関係ではない。ただし、レベル $\langle r \rangle$ 弱等価のための命題 3.6 は、レベル $\langle r \rangle$ 等価に置き換えても成り立ち、レベル $\langle r \rangle$ 等価も制限演算子や経路演算子によって条件付きでならば保存される。

3.4 公理系 $\mathcal{A}\langle r \rangle$

この小節で、レベル $\langle r \rangle$ 等価 $\equiv_{\langle r \rangle}$ と観測合同 \equiv を比較するために、有限逐次プロセスのための公理系を与える。有限逐次プロセスの構文は次のように定義される。

定義 3.10 有限逐次プロセスの集合 $\mathcal{P}_{seq} \subseteq \mathcal{P}$ は BNF 記法を用いて次のように定義される。

$$P ::= \mathbf{0} \mid \mu.P \mid P + P$$

ここで、 $\mu \in Act_\tau$ である。

レベル $\langle r \rangle$ 等価は、プレフィクスと選択演算子によって保存されるので、 \mathcal{P}_{seq} に対しては合同関係である。 \mathcal{P}_{seq} の観測合同に対する健全で完全な公理系 \mathcal{A}_∞ は、すでに文献 [7] の中で次のように与えられている。

定義 3.11 2つの有限逐次プロセス P と Q の等価性が公理系 \mathcal{A}_∞ から推論されるならば、 $\mathcal{A}_\infty \vdash P = Q$ と書

く。ここで、公理系 \mathcal{A}_∞ は次の等式から構成される。

$$\mathbf{M1} \quad P_1 + P_2 = P_2 + P_1$$

$$\mathbf{M2} \quad (P_1 + P_2) + P_3 = P_1 + (P_2 + P_3)$$

$$\mathbf{M3} \quad P = P + P$$

$$\mathbf{M4} \quad P = P + \mathbf{0}$$

$$\mathbf{T1} \quad \mu.\tau.P = \mu.P$$

$$\mathbf{T2} \quad P + \tau.P = \tau.P$$

$$\mathbf{T3} \quad \mu.(P + \tau.Q) + \mu.Q = \mu.(P + \tau.Q)$$

定理 3.1 $P, Q \in \mathcal{P}_{seq}$ とする。このとき、

$$P = Q \iff \mathcal{A}_\infty \vdash P = Q.$$

各 $r \in \mathcal{R}$ について、次のように公理系 $\mathcal{A}\langle r \rangle$ を定義する。

定義 3.12 $r \in \mathcal{R}$ とする。2つの有限逐次プロセス P と Q の等価性が公理系 $\mathcal{A}\langle r \rangle$ から推論されるならば、 $\mathcal{A}\langle r \rangle \vdash P = Q$ と書く。ここで、公理系 $\mathcal{A}\langle r \rangle$ は、公理系 \mathcal{A}_∞ の等式と次の等式から構成される。

$$\mathbf{A1}\langle r \rangle \quad (\alpha \langle r' \rangle @ s).P = \tau.P \quad \text{if } r' < -(r - \pi(s))$$

$$\mathbf{A2}\langle r \rangle \quad (\alpha \langle r' \rangle @ s).P = (\alpha \langle r' \rangle @ s).P + \tau.P$$

$$\text{if } r' > r - \pi(s)$$

$\mathbf{A1}\langle r \rangle$ と $\mathbf{A2}\langle r \rangle$ は、各々観測不可能アクションと不確定アクションのための等式である。

以下、 $\mathcal{A}\langle r \rangle$ がレベル $\langle r \rangle$ 等価に対して完全であることを示す準備をする。まず、次の標準形を定義する。

定義 3.13 次の P は、レベル $\langle r \rangle$ 標準形である^{†3}。

$$(i) \quad P \equiv \sum_{i=1}^m \mu_i.P_i \quad (\text{各 } P_i \text{ もレベル } \langle r \rangle \text{ 標準形}),$$

$$(ii) \quad r' < -(r - \pi(s)) \text{ ならば } P \xrightarrow{\alpha \langle r' \rangle @ s},$$

$$(iii) \quad P \xrightarrow{\alpha \langle r' \rangle @ s} P', \quad r' > r - \pi(s) \text{ ならば } P \xrightarrow{\tau} P'.$$

(ii) は内部アクション τ を除く全ての観測不可能なアクションは起こることができないことを意味しており、(iii) は全ての不確定アクションは内部アクションによってバイパスされなければならないことを意味している。

次の命題 3.8 によってプロセス間の関係を強めることができる。

命題 3.8 P と Q はレベル $\langle r \rangle$ 標準形であるとする。

$$(1) \quad P \approx_{\langle r \rangle} Q \text{ ならば } P \approx Q.$$

^{†3} もし $m \geq 1$ ならば、 $\sum_{i=1}^m P_i$ は $P_1 + P_2 + \dots + P_m$ の略記であり、それ以外では $\mathbf{0}$ である。

(2) $P =_{\langle r \rangle} Q$ ならば, $P = Q$.

証明 付録の補題 A.4 を用いて証明できる. ■

次の命題は \mathcal{P}_{seq} のレベル $\langle r \rangle$ 等価に対する $\mathcal{A}\langle r \rangle$ の完全性を示すために使われる.

命題 3.9 任意の $P \in \mathcal{P}_{seq}$ について, $\mathcal{A}\langle r \rangle \vdash P = P'$ のようなレベル $\langle r \rangle$ 標準形 P' が存在する.

証明 レベル $\langle r \rangle$ 標準形の条件 (ii) と (iii) は, 各々 $\mathbf{A1}\langle r \rangle$ と $\mathbf{A2}\langle r \rangle$ によって満たされる. ■

最後に, $\mathcal{A}\langle r \rangle$ が \mathcal{P}_{seq} のレベル $\langle r \rangle$ 等価に対して健全で完全であることを示す定理を与える.

定理 3.2 $P, Q \in \mathcal{P}_{seq}$ とする. このとき,

$$P =_{\langle r \rangle} Q \iff \mathcal{A}\langle r \rangle \vdash P = Q.$$

証明 (\Leftarrow) $\mathcal{A}\langle r \rangle$ の各等式について, レベル $\langle r \rangle$ 双模倣をみつけ, 定義 3.9 の条件 (i), (ii) をチェックする.

(\Rightarrow) 命題 3.9 より, $\mathcal{A}\langle r \rangle \vdash P = P'$ かつ $\mathcal{A}\langle r \rangle \vdash Q = Q'$ のような, レベル $\langle r \rangle$ 標準形 P' と Q' が存在する. $\mathcal{A}\langle r \rangle$ の健全性により, $P' =_{\langle r \rangle} Q'$ を得る. よって, 命題 3.8 より, $P' = Q'$ を得る. ここで, 定理 3.1 より, $\mathcal{A}_\infty \vdash P' = Q'$ である. 最後に, $\mathcal{A}_\infty \subset \mathcal{A}\langle r \rangle$ より, $\mathcal{A}\langle r \rangle \vdash P = P' = Q' = Q$ を得る. ■

3.5 プロセス論理

双模倣関係をもとにした同値関係が, プロセス論理によって特徴付けられることが知られている [3][7]. プロセス論理とは, プロセスをブラックボックスとみなし, アクションの観測可能性のみに焦点をあてた論理である. この小節では, レベル $\langle r \rangle$ 弱等価をプロセス論理を用いて特徴付ける.

プロセス論理の定義は [7] にほぼ同じであるが, 観測可能なアクションが観測レベルに依存するため, ここでは各レベルごとに次のように与える.

定義 3.14 $r \in \mathcal{R}$ とする. $\mathcal{PL}\langle r \rangle$ は, 次の構文規則によって与えられる論理式 F の集合である.

$$F ::= \text{true} \mid \llbracket \mu \rrbracket F \mid F \wedge F \mid \neg F$$

ここで, $\mu \in \text{Act}\langle r \rangle \cup \{\varepsilon\}$ である. $\text{Act}\langle r \rangle$ は, レベル $\langle r \rangle$ 観測のもとで観測可能なアクションの集合であり,

$$\text{Act}\langle r \rangle = \{\alpha\langle r' \rangle @ s \in \text{Act} : r' - \pi(s) \geq -r\}$$

により与えられる. ■

この論理式によりプロセスの性質を記述する. プロセス P がレベル $\langle r \rangle$ 観測のもとで, 論理式 $F \in \mathcal{PL}\langle r \rangle$ を

満たすことを $P \models_{\langle r \rangle} F$ と書き, 次のように定める.

定義 3.15 レベル $\langle r \rangle$ 観測における, プロセス P の論理式 $F \in \mathcal{PL}\langle r \rangle$ の充足性を, 次のように定義する.

- (1) 全ての P について, $P \models_{\langle r \rangle} \text{true}$
- (2) $P \models_{\langle r \rangle} F_1, P \models_{\langle r \rangle} F_2$ ならば, $P \models_{\langle r \rangle} F_1 \wedge F_2$
- (3) $P \models_{\langle r \rangle} F$ でないならば, $P \models_{\langle r \rangle} \neg F$
- (4) ある P' で, $P \xrightarrow{\mu}_{\langle r \rangle} P', P' \models_{\langle r \rangle} F,$
 $\mu \in \text{Act}\langle r \rangle$ ならば, $P \models_{\langle r \rangle} \llbracket \mu \rrbracket F$
- (5) ある P' で, $P \xrightarrow{\varepsilon}_{\langle r \rangle} P', P' \models_{\langle r \rangle} F$
ならば, $P \models_{\langle r \rangle} \llbracket \varepsilon \rrbracket F$

P が, レベル $\langle r \rangle$ 観測のもとで満たす全ての論理式の集合を $\mathcal{PL}\langle r \rangle(P)$ と記述する. つまり, $\mathcal{PL}\langle r \rangle(P) = \{F \in \mathcal{PL}\langle r \rangle : P \models_{\langle r \rangle} F\}$ である. このとき次の定理は, レベル $\langle r \rangle$ 観測のもとで, 1 つでも P で満たし Q で満たさない論理式が存在すること, P と Q がレベル $\langle r \rangle$ 弱等価ではないことは同じであることを示している.

定理 3.3 $P \approx_{\langle r \rangle} Q \iff \mathcal{PL}\langle r \rangle(P) = \mathcal{PL}\langle r \rangle(Q)$

証明 (\Rightarrow) は簡単である. (\Leftarrow) のためには,

$$S = \{(P, Q) : \mathcal{PL}\langle r \rangle(P) = \mathcal{PL}\langle r \rangle(Q)\}$$

がレベル $\langle r \rangle$ 双模倣であることを示せばよい. 背理法を用いるために, ある $(P, Q) \in S$ で, $P \xrightarrow{\mu} P'$ かつ全ての Q_i ($i \in I$) で $Q \xrightarrow{\phi(\mu, r)}_{\langle r \rangle} Q_i$ かつ $(P', Q_i) \notin S$ を満たす P' と μ が存在すると仮定する. 各 $i \in I$ について $(P', Q_i) \notin S$ より, $P' \models_{\langle r \rangle} F_i$ かつ $Q_i \not\models_{\langle r \rangle} F_i$ のような $F_i \in \mathcal{PL}\langle r \rangle$ が存在する. ここで, μ について場合分けをするが, $\mu \in \text{Act}\langle r \rangle$ の場合は, $\mu \notin \text{Act}\langle r \rangle$ の場合より簡単なので省略する. つまり, $\phi(\mu, r) = \varepsilon$ とする. このとき, $P \xrightarrow{\varepsilon}_{\langle r \rangle} P'$ と, 全ての $i \in I$ について, $Q \xrightarrow{\varepsilon}_{\langle r \rangle} Q_i$ を得る. よって, $F \equiv \llbracket \varepsilon \rrbracket (\bigwedge_{i \in I} F_i)^{\dagger 4}$ とすると, $P \models_{\langle r \rangle} F$ かつ $Q \not\models_{\langle r \rangle} F$ を得る. これは, $(P, Q) \in S$ の仮定に反する. ■

さらに, 次の論理記号を導入する.

$$\text{false} \equiv \neg \text{true}, \quad \llbracket \mu \rrbracket F \equiv \neg \llbracket \mu \rrbracket \neg F$$

true は全てのプロセスによって満たされるので, false を満たすプロセスは存在しない. また, $\llbracket \mu \rrbracket$ と $\llbracket \mu \rrbracket$ は各々, 可能性様相演算子, 必然性様相演算子と呼ばれる. $P \models_{\langle r \rangle} \llbracket \mu \rrbracket F$ は, P がアクション μ を起こすことがで

^{†4} $\bigwedge_{i \in I} F_i$ は, $I = \emptyset$ ならば true , それ以外ならば $F_1 \wedge \dots \wedge F_n$ を表す.

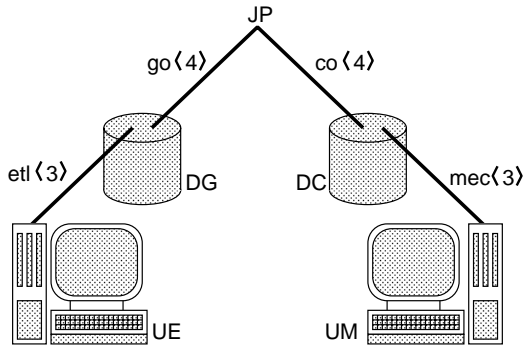


図6 デッドロックをもつシステムの例

き、その後には F を満たすプロセスが存在することを意味する。他方、 $P \models_{(r)} \llbracket \mu \rrbracket F$ は、 P がアクション μ を起こすことができるならば、その後の全てのプロセスは F を満たすことを意味する。

4 デッドロックをもつ並行システムの例

図6の並行システムを用いて CCSG による解析例を示す。図中、 DG と DC は各々国と企業が所有するデータベース、 UE は国立研究所 ETL の端末器、 UM は株式会社 MEC の端末器であり、各々階層的に4つのルータを通して接続されている。このシステムは図中 JP の位置を観測位置として次のように記述される。(局所制限の制限力が18である理由については後で説明する。)

$$SYS \stackrel{\text{def}}{=} ((GO@go\langle 4 \rangle) | (CO@co\langle 4 \rangle)) \setminus_{(18)(\varepsilon)} \{lk_1, lk_2, ul_1, ul_2\}$$

$$GO \stackrel{\text{def}}{=} DG | (UE@etl\langle 3 \rangle)$$

$$CO \stackrel{\text{def}}{=} DC | (UM@mec\langle 3 \rangle)$$

DG と DC へのアクセスにはロックが必要であるとす。簡単のためデータ操作は省略する。 UE と UM は、各々コマンド ac_1, ac_2 を受けると DG と DC のロックを試みる。ただし、各端末は近い方からロックを行なうとする。このとき、各プロセスは次の様に記述される。ここで、空経路 ε とグレード $\langle 0 \rangle$ の記述は省略されている(例えば、 ac_1 は $ac_1\langle 0 \rangle @ \varepsilon$ 、 $\overline{lk_1}\langle 3 \rangle$ は $\overline{lk_1}\langle 3 \rangle @ \varepsilon$ の略記である)。

$$UE \stackrel{\text{def}}{=} ac_1.\overline{lk_1}\langle 3 \rangle.\overline{lk_2}\langle 11 \rangle.su_1.\overline{ul_2}\langle 11 \rangle.\overline{ul_1}\langle 3 \rangle.UE$$

$$UM \stackrel{\text{def}}{=} ac_2.\overline{lk_2}\langle 3 \rangle.\overline{lk_1}\langle 11 \rangle.su_2.\overline{ul_1}\langle 11 \rangle.\overline{ul_2}\langle 3 \rangle.UM$$

$$DG \stackrel{\text{def}}{=} lk_1.ul_1.DG$$

$$DC \stackrel{\text{def}}{=} lk_2.ul_2.DC$$

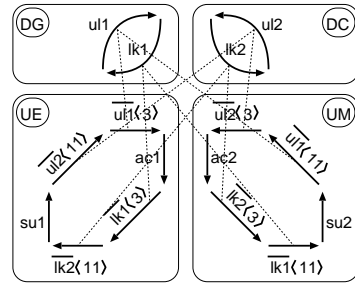


図7 SYSの状態遷移図

コマンド ac の入力とロック成功 su を知らせる出力は端末に局所的なアクションであるので、それらのグレードは0に設定してある。ロック lk とアンロック ul はその要求側(端末側)に十分なグレードを設定してある。例えば $\overline{lk_2}\langle 11 \rangle$ のグレード11は UE と DC の損失距離である。上の SYS で使われている制限力18は、JP から損失距離7離れた $\overline{lk_i}\langle 11 \rangle$ と $\overline{ul_i}\langle 11 \rangle$ を制限するために必要な最小値である。

図7に各プロセスの振舞いを状態遷移図で示す。各プロセスは独立にアクションを起こすことができるが、点線で結ばれた2つのアクションは同期することを表している。図7にみられるように、並行プロセスの全体の動作を理解することは、逐次プロセスの動作に比べて困難である。そこで、 SYS の動作に観測合同 \equiv となる逐次プロセス SP

$$SYS = SP$$

を次に与える。

$$SP \stackrel{\text{def}}{=} ac_1@s_1.R_1 + ac_2@s_2.R_2$$

$$R_1 \stackrel{\text{def}}{=} \tau.(\tau.(su_1@s_1.SP + ac_2@s_2.su_1@s_1.R_2) + ac_2@s_2.O_{12}) + ac_2@s_2.(\tau.O_{12} + \tau.O_{21})$$

$$R_2 \stackrel{\text{def}}{=} \tau.(\tau.(su_2@s_2.SP + ac_1@s_1.su_2@s_2.R_1) + ac_1@s_1.O_{21}) + ac_1@s_1.(\tau.O_{12} + \tau.O_{21})$$

$$O_{12} \stackrel{\text{def}}{=} \tau.su_1@s_1.R_2 + \tau.0$$

$$O_{21} \stackrel{\text{def}}{=} \tau.su_2@s_2.R_1 + \tau.0$$

$$s_1 = etl\langle 3 \rangle go\langle 4 \rangle$$

$$s_2 = mec\langle 3 \rangle co\langle 4 \rangle$$

図8に SP の状態遷移図を示す。この SP は合成演算子を含まず、 SYS の振舞いを明確に表している。そしてこの SP から SYS はデッドロック状態 0 をもつことを読みとることができる。しかし、 SP は SYS に観測

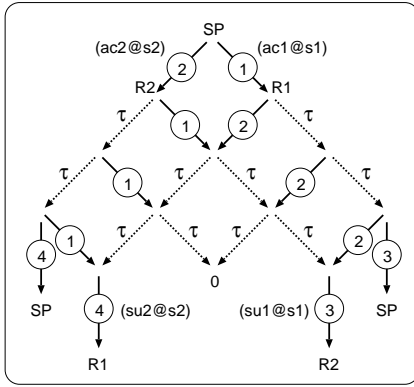


図8 SPの状態遷移図

等価な最も状態数の少ないプロセスであるにもかかわらず、簡単な SYS に対してさえやや複雑である。この原因は2つの端末の観測可能なアクションが独立に起こせるためである。この SP は端末器の増加とともに急激に複雑になる。

我々は、しばしば ETL の端末操作のみ可能で、遠くの重要でないアクションには興味をもたないことがある。このような解析に対して、シフト (s) 等価とレベル $\langle r \rangle$ 等価を有効に使うことができる。まず、観測位置を

$$SYS \overset{\sim}{(s_e)} SYS@s_e$$

によって JP から ETL に移動する。ここで、 s_e は JP から ETL までの経路で、 $s_e = go\langle 4 \rangle etl\langle 3 \rangle$ である。 SP_{ETL} を

$$SP_{ETL} \stackrel{\text{def}}{=} ac_1.(\tau.su_1.SP_{ETL} + \tau.0)$$

と定義すると、次の等式が成り立つ。

$$SYS@s_e \equiv_{\langle r \rangle} \tau.SP_{ETL}$$

$$SYS@s_e \approx_{\langle r \rangle} SP_{ETL}$$

ここで、 r は 14 未満の実数である。14 とは ETL - MEC 間の損失距離である。 $\equiv_{\langle r \rangle}$ の右側の $\tau.SP_{ETL}$ の τ は、 MEC の端末操作による観測できないアクションに対応するために最初の 1 回だけ必要である。 SP_{ETL} から、デッドロックが ac_1 の直後に起こる可能性があるが、 su_1 の直後には起こらないことを読みとることができる。

次に、プロセス論理を用いた SYS の動作の、 ETL の位置における検証例を示す。まず、0 以上の任意の r について、

$$SYS@s_e \models_{\langle r \rangle} \langle\langle ac_1 \rangle\rangle \langle\langle su_1 \rangle\rangle \mathbf{true}$$

が成り立つ。 ac_1 を起こした後、デッドロックを起こす可能性はあるが、 su_1 を起こせる可能性もあるので真である。また、0 以上 14 未満の r について、

$$SYS@s_e \models_{\langle r \rangle} \langle\langle ac_1 \rangle\rangle \langle\langle su_1 \rangle\rangle \mathbf{false} \quad (**)$$

が成り立つ。この $\langle\langle su_1 \rangle\rangle \mathbf{false}$ を満たすプロセスとは、 su_1 を起こせるならば、その後は必ず \mathbf{false} を満たすプロセスである。しかし、 \mathbf{false} を満たすプロセスは存在しないので、 $\langle\langle su_1 \rangle\rangle \mathbf{false}$ を満たすプロセスとは su_1 を起こせないプロセスのことである。これは、 SP にみられるデッドロック 0 に相当する。

ここで重要なことは、14 以上の r については $(**)$ は成り立たないことである。つまり、 ac_2 のような遠くの重要でないアクションを考慮しなければ、 su_1 のような重要なアクションが起こせなくなる可能性を見つけることができない。例えば、より多くの重要でないアクションが関係している場合は、その全てを考慮しなければ、デッドロックを見つけることができないかも知れない。この例はレベル r を 14 より低くすることによって、重要なアクション su_1 が実行できなくなる可能性を示しており、観測精度を落した近似的な論理を用いることによって、重要なアクションの実行可能性を調べることができる近似解析の有効性を示した例である。

5 関連研究

空間の概念をもつプロセス代数としては、 CCS を基に [3][6][9]、 ACP [1] を基に [2] 等が提案されている。

文献 [2] の特徴は時間と空間の統一的な表現にある。例えば、アクションの伝達速度を考慮して離れた位置にあるプロセス間通信の可能性を検証できる。 $CCSG$ には時間の概念は無いが、 $CCSG$ の目的は近似解析にあり、そのためにグレードや損失が導入されている。[2] にはグレードの概念は無く、近似的な解析は行なわれていない。また、 $CCSG$ に $TCCS$ [8] のような時間の概念を導入し、各ルータに遅延時間を明記することによって [2] と同様の解析が期待される。

CCS 系の 3 つの拡張 [3][6][9] では、アクションの生じた位置を考慮することにより、弱等価よりも詳細にプロセスを解析することを可能している。例えば、[3] の位置等価 (location equivalence) では、 $P_1 \equiv (\alpha_1.0|\alpha_2.0)$ と $P_2 \equiv (\alpha_1.\alpha_2.0 + \alpha_2.\alpha_1.0)$ は、位置等価にはならな

い。これは、次の位置付状態遷移にみられるように、 P_1 の α_1 と α_2 の位置は独立であるのに対し、 P_2 の α_1 と α_2 の位置は独立でないためである。

$$P_1 \xrightarrow{\alpha_1}_{u_1} (u_1 :: \mathbf{0}) | (\alpha_2. \mathbf{0}) \xrightarrow{\alpha_2}_{u_2} (u_1 :: \mathbf{0}) | (u_2 :: \mathbf{0}),$$

$$P_2 \xrightarrow{\alpha_1}_{u_1} u_1 :: \alpha_2. \mathbf{0} \xrightarrow{\alpha_2}_{u_1 u_2} u_1 u_2 :: \mathbf{0}.$$

ここで、 $\xrightarrow{\alpha}_u$ の u は α の位置を表している。つまり、 P_2 の位置付状態遷移の α_2 の位置 $u_1 u_2$ は、 α_1 の位置 u_1 に依存していることを表している。この位置付状態遷移の位置情報 u は自動的に付加され、逐次プロセスと並行プロセスを区別するために使われる。

CCSG では、アクションの位置は明示的に記述され、必ずしも逐次プロセスと並行プロセスを区別しない。例えば、次の P'_1 と P'_2 はレベル $\langle \infty \rangle$ 等価となる。

$$P'_1 \equiv (\alpha_1. \mathbf{0}) @_{s_1} | (\alpha_2. \mathbf{0}) @_{s_2},$$

$$P'_2 \equiv (\alpha_1 @_{s_1}). (\alpha_2 @_{s_2}). \mathbf{0} + (\alpha_2 @_{s_2}). (\alpha_1 @_{s_1}). \mathbf{0}$$

位置付状態遷移によって自動的に付加される位置と CCSG で明示的に記述される位置は矛盾することがあるので、CCSG に位置付状態遷移を導入することは意味がない。我々は損失距離を求めるために位置を導入している。

また、位置付状態遷移 $\xrightarrow{\alpha}_u$ を一般の状態遷移 $\xrightarrow{\alpha}$ によって解釈する方法が [11] に提案されている。

6 おわりに

我々は CCS に、アクションの重要性を明記するためにグレード、プロセス間の空間的距離を考慮するために経路を導入して、CCSG を提案した。CCSG におけるプロセスの等価性としては、観測位置を移動するためにシフト (s) 等価、遠くの重要でないアクションを無視するためにレベル $\langle r \rangle$ 弱等価とレベル $\langle r \rangle$ 等価を与えた。これらにより、CCSG では、任意の観測位置における近似的な (局所的な) 解析が可能になっている。

さらに、レベル $\langle r \rangle$ 等価と観測合同の違いを明確にするために、有限逐次プロセスのレベル $\langle r \rangle$ 等価に対する健全で完全な公理系 $\mathcal{A}\langle r \rangle$ を与えた。また、双模倣関係をもとに定義されたレベル $\langle r \rangle$ 弱等価を、プロセス論理の充足関係を用いて解釈を与えた。

4節では、システム SYS と局所的仕様 SP_{ETL} との近似的な関係を示した。 SP_{ETL} は全体の仕様 SP に比

べて簡単であり、ETL における SYS の動作を理解するために有効である。ただし、仕様が簡単になってもその等価性判定の計算量が減るわけではない。この近似解析の利点は、システムの設計者や分析者が、自分に必要なアクションを取り出し、遠方の重要でないアクションを無視することによって、可読性の高い仕様書を得ることができることにある。つまり、利用者の負担を軽減するところを目的にしている。

今後は、ネットワークの構造を階層的星型接続から複数経路の記述可能なグラフ状へと拡張する。また、1節で紹介した MBone に対応するために、CCSG とブロードキャストをもつプロセス代数 CBS [10] や CCB [4] との融合も検討している。

謝辞

本研究の機会を与えて頂いている、太田公廣情報アーキテクチャ部長に感謝いたします。また、日頃熱心に御討論頂く言語システム研究室の木下佳樹博士をはじめ、情報ベース研究室の皆様へ感謝いたします。

参考文献

- [1] Baeten, J.C.M. and Weijland, W.P.: Process Algebra, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 18, Cambridge University Press, 1990.
- [2] Baeten, J.C.M. and Bergstra, J.A.: Real Space Process Algebra, CONCUR'91, LNCS 527, Springer-Verlag, pp.96 - 110, 1991
- [3] Boudol, G., Castellani, I., Hennessy, M., and Kiehn, A.: Observing localities, Theoretical Computer Science, Vol.114, pp.31-61, 1993.
- [4] Isobe, Y., Sato, Y., and Ohmaki, K.: A Calculus of Countable Broadcasting Systems, AMAST'95, LNCS 936 Springer-Verlag, pp.489-503, 1995.
- [5] Isobe, Y., Sato, Y., and Ohmaki, K.: Approximative Analysis by Process Algebra with Graded Spatial Actions, AMAST'96, LNCS, Springer-Verlag, July 1-5, 1995, Germany. (To be published)
- [6] Krishnan, P.: Distributed CCS, CONCUR'91, LNCS527, Springer-Verlag, pp.393-407, 1991.
- [7] Milner, R.: Communication and Concurrency, Prentice-Hall, 1989.
- [8] Moller, F. and Tofts, C.: An overview of TCCS, Proc. of EUROMICRO'92, Athens, 1992.
- [9] Montanari, U. and Yankelevich, D.: A Parametric Approach to Localities, ICALP'92, LNCS 623, Springer-Verlag, pp.617 - 628, 1992.
- [10] Prasad, K.V.S.: A Calculus of Broadcasting Systems, TAPSOFT'91, Vol.1:CAAP, LNCS 493,

Springer-Verlag, pp.338 - 358, 1991.

- [11] Sangiorgi, D.: Locality and True-concurrency in calculi for mobile processes, TACS'94, LNCS 789, Springer-Verlag, pp.405 - 424, 1994.
- [12] Tsujigao, M., Hikita, T., and Ginbayashi, J.: Process Composition and Interleave Reduction in Parallel Process Specification, Proceedings of JCSE'93, Japan, pp.218 - 225, 1993.
- [13] JP MBone 運用グループ : JP MBone 実験参加の手引, ftp://ftp.nic.ad.jp/pub/jepg-ip/mbone-jp-intro.txt, 1994.

A 付録

付録節で、4つの補題を与える。補題 A.1と A.2は命題 3.5の証明、補題 A.3は命題 3.6の証明、補題 A.4は命題 3.8の証明に使われている。

補題 A.1

- (1) S をレベル $\langle r \rangle$ 双模倣とする。 $(P, Q) \in S$ のとき、
- (i) $P \Longrightarrow_{\langle r \rangle} P'$ ならば、ある Q' が存在して、
 $Q \Longrightarrow_{\langle r \rangle} Q'$ かつ $(P', Q') \in S$ を満たす。
- (ii) $Q \Longrightarrow_{\langle r \rangle} Q'$ ならば、ある P' が存在して、
 $P \Longrightarrow_{\langle r \rangle} P'$ かつ $(P', Q') \in S$ を満たす。
- (2) S をレベル $\langle r \rangle$ 双模倣とする。 $(P, Q) \in S$ のとき、

任意の $\mu \in Act$ について、

- (i) $P \xrightarrow{\phi(\mu, r)}_{\langle r \rangle} P'$ ならば、ある Q' が存在して、
 $Q \xrightarrow{\phi(\mu, r)}_{\langle r \rangle} Q'$ かつ $(P', Q') \in S$ を満たす。
- (ii) $Q \xrightarrow{\phi(\mu, r)}_{\langle r \rangle} Q'$ ならば、ある P' が存在して、
 $P \xrightarrow{\phi(\mu, r)}_{\langle r \rangle} P'$ かつ $(P', Q') \in S$ を満たす。

証明 (1) について、 $(P, Q) \in S$ を仮定し、 $P \Longrightarrow_{\langle r \rangle} P'$ とする。 $P \Longrightarrow_{\langle r \rangle} P'$ は $\theta(t, r) = \varepsilon$ のような t で $P \xrightarrow{t} P'$ を導く。 t の長さに帰納法を適用する。 $t = \varepsilon$ の場合は明らかである。

$\theta(t_n, r) = \varepsilon$ かつ $\theta(\mu, r) = \varepsilon$ のような $P \xrightarrow{t_n} P_n \xrightarrow{\mu} P'$ の場合を示す。帰納法により、 $Q \Longrightarrow_{\langle r \rangle} Q_n$ かつ $(P_n, Q_n) \in S$ のような Q_n が存在する。さらに $(P_n, Q_n) \in S$ より、 $Q_n \xrightarrow{\phi(\mu, r)}_{\langle r \rangle} Q'$ かつ $(P', Q') \in S$ のような Q' が存在する。ここで、 θ と ϕ の定義より、 $\theta(\mu, r) = \varepsilon$ ならば $\theta(\phi(\mu, r), r) = \varepsilon$ である。よって、 $Q \Longrightarrow_{\langle r \rangle} Q_n \Longrightarrow_{\langle r \rangle} Q'$ を得る。

(2) は (1) を用いて簡単に示される。 ■

補題 A.2

- (1) $P \Longrightarrow_{\langle r \rangle} P'$ ならば、任意の $r' \leq r$ について $P \Longrightarrow_{\langle r' \rangle} P'$ である。

- (2) $P \xrightarrow{\phi(\mu, r)}_{\langle r \rangle} P'$ ならば、任意の $r' \leq r$ について $P \xrightarrow{\phi(\mu, r')}_{\langle r' \rangle} P'$ である。

証明 (1) θ の定義より、 $\theta(t, r) = \varepsilon$ ならば、任意の $r' \leq r$ について、 $\theta(t, r') = \varepsilon$ であることから明らか。

(2) $r' \leq r$ とする。 $P \xrightarrow{\phi(\mu, r)}_{\langle r \rangle} P'$ より、ある P_1 と P_2 で、 $P \Longrightarrow_{\langle r \rangle} P_1 \xrightarrow{\phi(\mu, r)} P_2 \Longrightarrow_{\langle r \rangle} P'$ である。補題 A.2(1) より、 $P \Longrightarrow_{\langle r' \rangle} P_1$ と $P_2 \Longrightarrow_{\langle r' \rangle} P'$ を得る。 μ について次の3つの場合分けを行なう。

- $|r_1| \leq r' - \pi(s)$ のような $\mu = \alpha\langle r_1 \rangle @s$ の場合。 $r' \leq r$ より、 $\phi(\mu, r) = \alpha\langle r_1 \rangle @s = \phi(\mu, r')$ である。よって、 $P_1 \xrightarrow{\phi(\mu, r')} P_2$ を得る。
- $r' - \pi(s) < |r_1| \leq r - \pi(s)$ のような $\mu = \alpha\langle r_1 \rangle @s$ の場合。このとき、 $\phi(\mu, r) = \alpha\langle r_1 \rangle @s$ かつ $\phi(\mu, r') = \varepsilon$ である。よって、 $P_1 \xrightarrow{\alpha\langle r_1 \rangle @s} P_2$ である。さらに、 $|r_1| > r' - \pi(s)$ より、 $\theta(\alpha\langle r_1 \rangle @s, r') = \varepsilon$ であるので、 $P_1 \Longrightarrow_{\langle r' \rangle} P_2$ を得る。よって、 $\phi(\mu, r') = \varepsilon$ より、 $P_1 \xrightarrow{\phi(\mu, r')}_{\langle r' \rangle} P_2'$ を得る。
- 上記以外の場合。 $\phi(\mu, r) = \varepsilon = \phi(\mu, r')$ より、 $P_1 \xrightarrow{\phi(\mu, r')} P_2$ を得る。

以上の結果をまとめて $P \xrightarrow{\phi(\mu, r')}_{\langle r' \rangle} P'$ を得る。 ■

補題 A.3 $P \Longrightarrow_{\langle r \rangle} P'$ かつ $r' + \pi(s') \leq r$ ならば、

$$P \setminus_{\langle r' \rangle (s')}^L \Longrightarrow_{\langle r \rangle} P' \setminus_{\langle r' \rangle (s')}^L \text{ である。}$$

証明 $r' + \pi(s') \leq r$ ($\#1$) かつ $P \Longrightarrow_{\langle r \rangle} P'$ を仮定する。 $P \Longrightarrow_{\langle r \rangle} P'$ より、 $\theta(t, r) = \varepsilon$ のような t で $P \xrightarrow{t} P'$ である。 t の長さに帰納法を適用する。

$t = \varepsilon$ の場合は明らか。

$t'\mu = t$ かつ $P \xrightarrow{t'} P_1 \xrightarrow{\mu} P'$ の場合を示す。仮定より、 $\theta(t', r) = \varepsilon$ かつ $\theta(\mu, r) = \varepsilon$ 。帰納法を適用して $P \setminus_{\langle r' \rangle (s')}^L \Longrightarrow_{\langle r \rangle} P_1 \setminus_{\langle r' \rangle (s')}^L$ を得る。また、 $\theta(\mu, r) = \varepsilon$ であるので、 μ は内部アクション τ か、または $|r_1| > r - \pi(s_1)$ ($\#2$) のような $\mu = \alpha_1\langle r_1 \rangle @s_1$ である。 $\mu = \tau$ の場合は簡単であるので $\mu = \alpha_1\langle r_1 \rangle @s_1$ の場合のみ示す。このとき、次のようにして $|r_1| > r' - \pi(s_1 \triangleleft s')$

(#3) を得る .

$$\begin{aligned}
 & |r_1| - (r' - \pi(s_1 \triangleleft s')) \\
 & > r - \pi(s_1) - r' + \pi(s_1 \triangleleft s') \quad \text{by (\#2)} \\
 & \geq r - \pi(s_1) - (r - \pi(s')) + \pi(s_1 \triangleleft s') \quad \text{by (\#1)} \\
 & = -\pi(s_1) + \pi(s') + \pi(s_1 \triangleleft s') \\
 & \geq -\pi(s_1) + \pi(s') + |\pi(s_1) - \pi(s')| \quad \text{by 命題 2.1(9)} \\
 & \geq 0
 \end{aligned}$$

よって, Res_1 より, $P_1 \xrightarrow{\alpha_1 \langle r_1 \rangle @ s_1} P'$ は, (#3) を満たすので, $P_1 \setminus_{\langle r' \rangle (s')}^L \xrightarrow{\alpha_1 \langle r_1 \rangle @ s_1} P' \setminus_{\langle r' \rangle (s')}^L$ を導く. ここで, $\theta(\alpha_1 \langle r_1 \rangle @ s_1, r) = \theta(\mu, r) = \varepsilon$ より,

$P_1 \setminus_{\langle r' \rangle (s')}^L \xRightarrow{\langle r \rangle} P' \setminus_{\langle r' \rangle (s')}^L$ を得る. ■

補題 A.4P をレベル $\langle r \rangle$ 標準形とする. このとき, $P \xrightarrow{\mu} P'$ かつ $\theta(\mu, r) = \varepsilon$ ならば, $P \xrightarrow{\tau} P'$ である.

証明 $\theta(\mu, r) = \varepsilon$ より, μ は τ か, または $|r'| > \pi(s') - r$ のような $(\alpha \langle r' \rangle @ s')$ でなければならない. もし $\mu = \tau$ ならば, 明らかに $P \xrightarrow{\tau} P'$ である. $\mu = (\alpha \langle r' \rangle @ s')$ ならば, レベル $\langle r \rangle$ 標準形の条件 (ii) により, $r' > \pi(s') - r$ でなければならない. さらに, レベル $\langle r \rangle$ 標準形の条件 (iii) より, $P \xrightarrow{\tau} P'$ を得る. ■