

三次元有限要素モデル生成の現状と展望
-フリーメッシュ法，ボクセルメッシュ法，従来メッシュ法-

**通商産業省工業技術院
機械技術研究所**

手塚 明
(e-mail:akira@mel.go.jp)

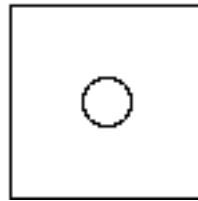
- 1 メッシュジェネレーション**
- 2 メッシュジェネレーションの新しい動き**
- 3 アダプティブメッシュジェネレーション**

1 メッシュ・ジェネレーション

- ◆メッシュ・ジェネレータの分類
- ◆メッシュ・ジェネレータへの要求仕様
- ◆ドロネイ変換法
- ◆格子法
- ◆逐次法(アドバンシング・フロント法)
- ◆格子・逐次法
- ◆バブル法
- ◆ドロネイ変換法とアドバンシング・フロント法の比較
- ◆基本ロジック
- ◆格子法による要素生成(第一段階)
- ◆逐次法:対処アルゴリズム
- ◆閉領域への新節点の発生法
- ◆トポロジースムージング
- ◆四面体要素と六面体要素
- ◆六面体要素生成法

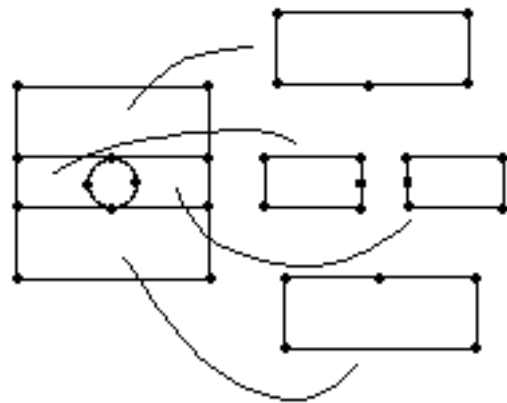
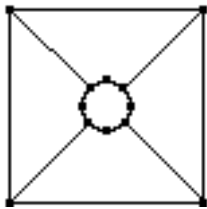
■メッシュ・ジェネレータの分類■

○ 機能による分類



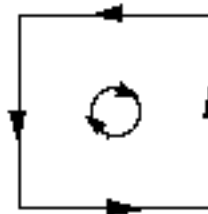
領域

・対話式



人間による前処理

・非対話式



境界形状のみの入力データ

○ 方法による分類

・写像法

・非写像法

アドバンシング・フロント法(逐次法)

ドロネイ網変換法

格子・逐次法

バブル法

■メッシュ・ジェネレータへの要求仕様■

- (1) 誰が使っても同一のメッシュが生成可能。
- (2) 境界データのみでメッシュ生成が可能。（非対話式）
- (3) 任意の形状に対応。
- (4) 要素寸法が一定。形状が良好。
- (5) ロバストで生成効率が良い。
- (6) （多重解析領域に適用可。）
- (7) （閉じた完全自動ではない。）
- (8) アダプティブメッシュ生成が可能。

実際には、

- ・領域形状が単純で凸体。
- ・領域を機械系CADより作成。（単純な図形の組み合わせ。）
- ・2.5次元の領域。
- ・要素寸法が一定でなくても良い。
- ・形状が良好でなくても良い。

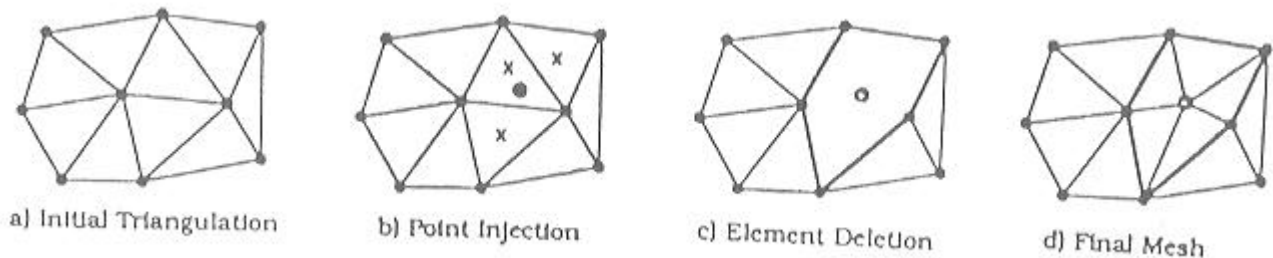
→要素分割法としての難易度は極端に下がる。

■ドロネイ変換法■

・原理

点群に一意対応するドロネイ網(≠有限要素)を領域に適合。

ドロネイ網: d 次元空間で $d + 1$ 個の点からなる多面体の外接球内部に他の点が存在しない多面体の集まり



・Watson[10]のドロネイ網生成法

0) 領域全体を包含する2個の四面体(ドロネイ網)を生成。

1) ドロネイ網に新たに点Aを加える。

2) 外接球内に点Aを有する四面体を消去。

3) 点Aと点Aの周りで1度のみ使用の面とで四面体を作成。

4) 1) から3) を全ての点を加え終わるまで続行。

「うまく分布された」 n 点に対して $O(n^{2-1/d})$ のオーダー。

Watsonの方法を改良したものとしてSloan[12]の方法等。

最高速のドロネイ網生成法でも高々 $O(n \log n)$ のオーダー。

・境界適合によるドロネイ網の有限要素への変換

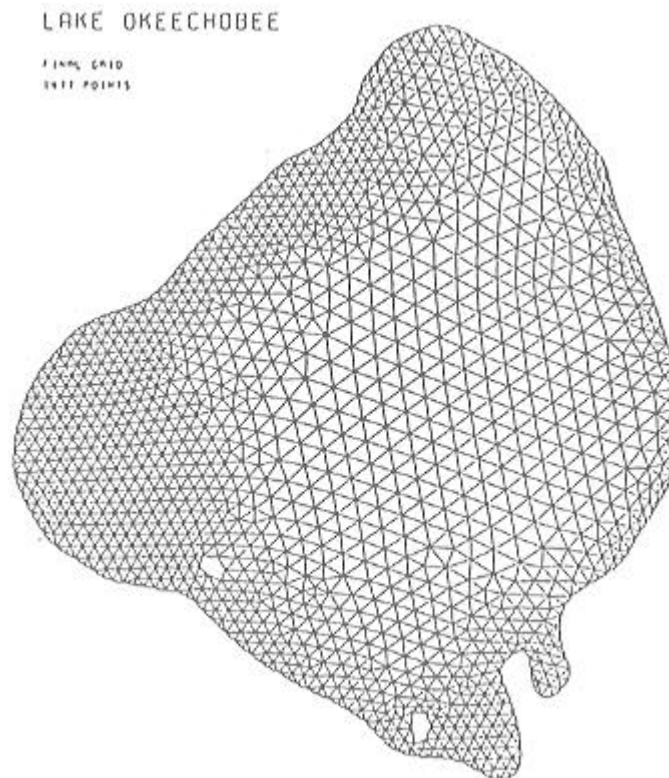
ドロネイ網/有限要素は点群/領域に対して定義。

凸領域: ドロネイ網 = 有限要素

凹領域: ドロネイ網 ≠ 有限要素、1) 領域外の網の除去、2) 境界線と干渉する網の境界線との適合の処理が必要。

なお、谷口[24]は二次元についてドロネイ網生成時に境界との適合を行なう修正ドロネイ網生成法を提案。

■格子法■

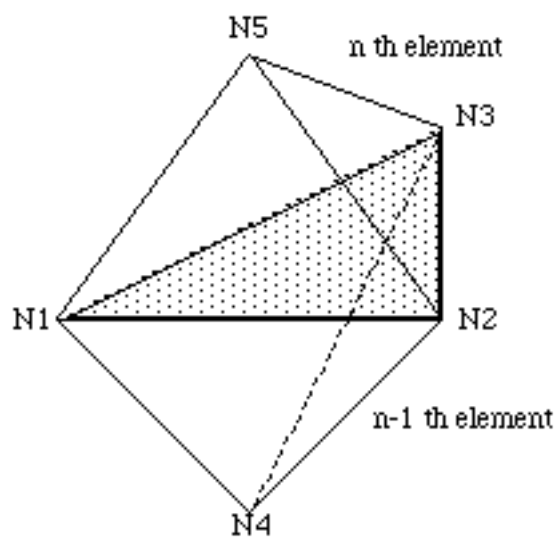


Thacker, Gonzalez and Putland (1980)

■逐次法(アドバンシング・フロント法)■

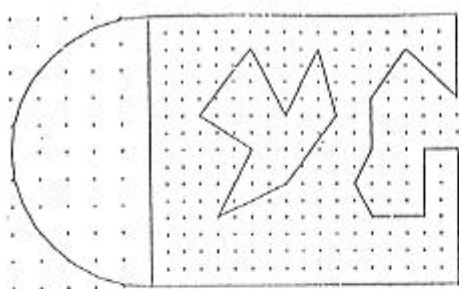
・原理

既に生成された要素との干渉をしつつ、基面と要素寸法だけ離れた節点とを結び、逐次、要素生成を行う。

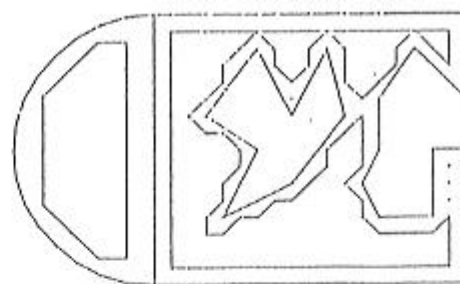


n 番目の要素生成

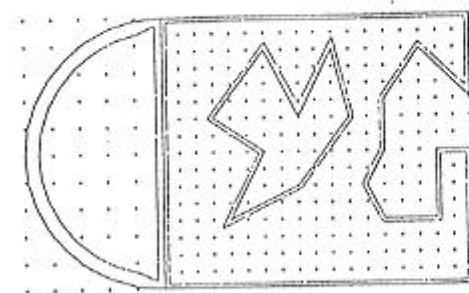
■格子・逐次法■[21,22,63]



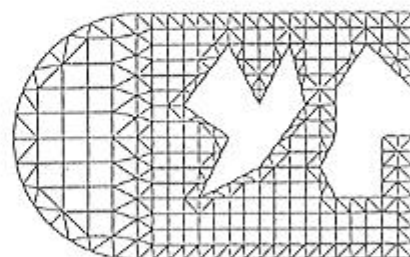
(1)



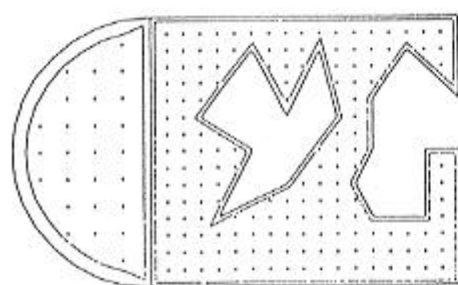
(6)



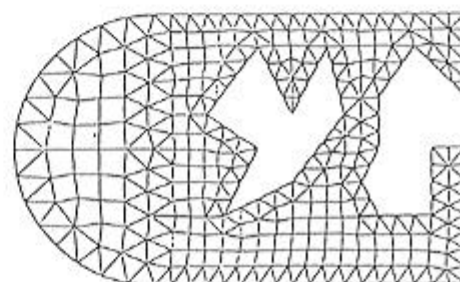
(2)



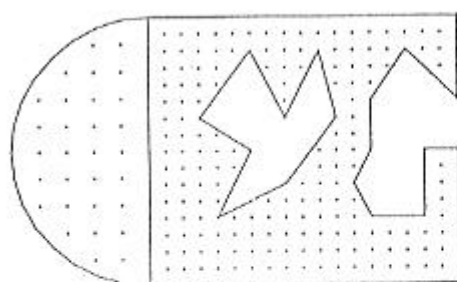
(7)



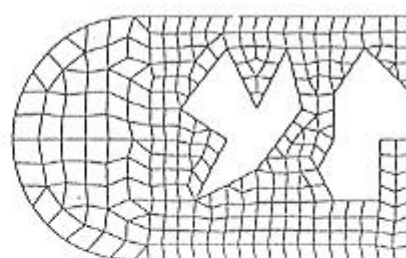
(3)



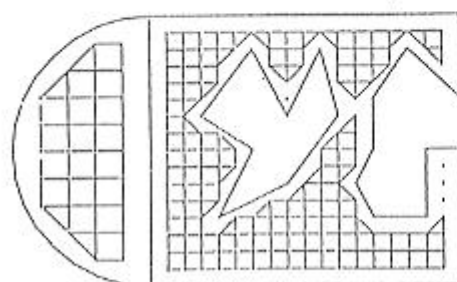
(8)



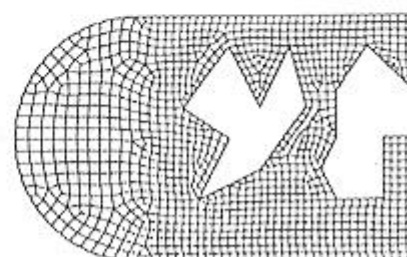
(4)



(9)



(5)



(10)

■バブル法■[62]

要素生成に先立ち，解析により領域にバブルを充填。
重心を結ぶ事によって要素を生成。

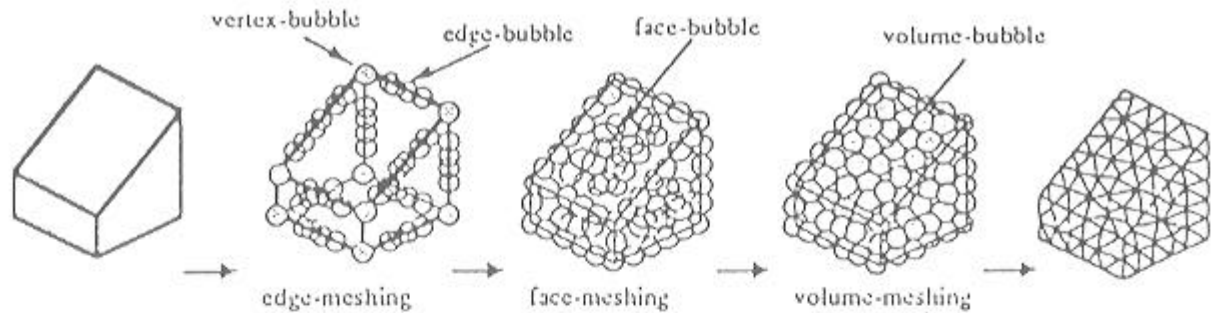


Figure 3. Meshing procedure

	domain	domain perimeter	element	force-balanced bubble config.
edge-meshing	curve 	vertices 	line segment 	
face-meshing	surface 	curves 	triangle 	
volume-meshing	volume 	surfaces 	tetrahedron 	

Figure 4. The summary of mesh generation

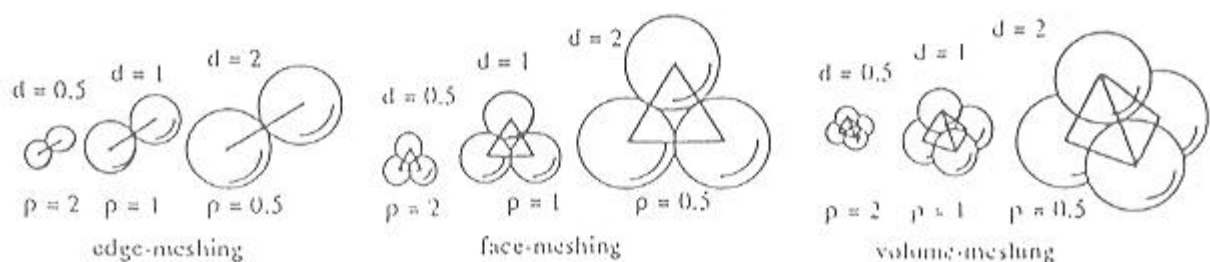
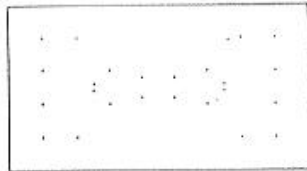


Figure 5. Density function and bubble radius

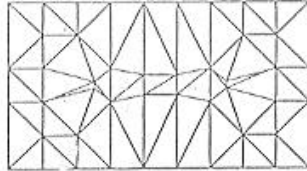
■ドロネイ変換法とアドバンシング・フロント法の比較■

・ドロネイ変換法の問題点

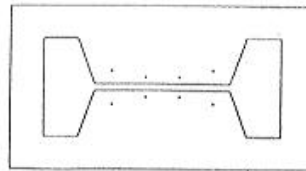
- (1) 極度に歪んだ要素生成の可能性
- (2) 境界との適合



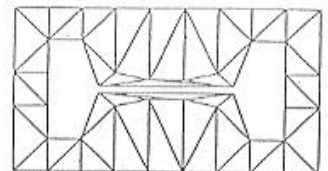
(a) 入力データ (節点数 48)



(b) Delaunay 網 (三角形 70)

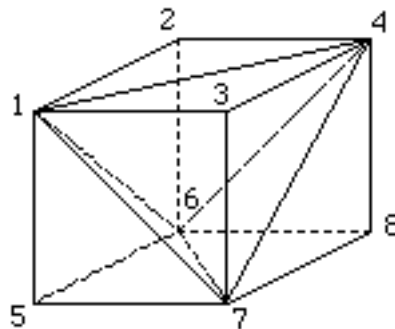


(c) 入力データ (節点数 48)

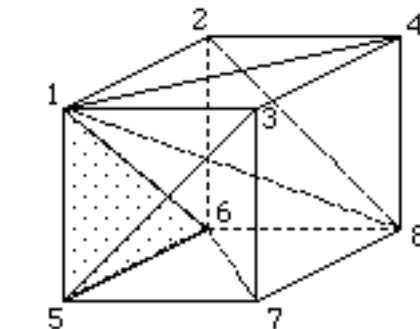


(d) 有限要素 (三角形 56)

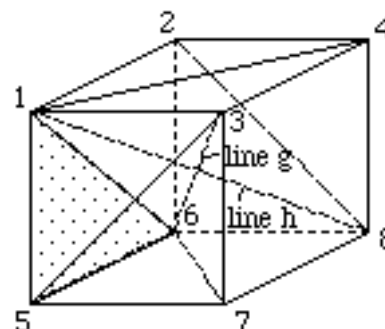
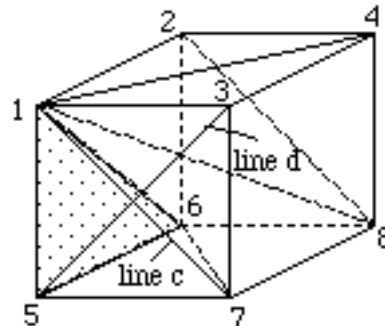
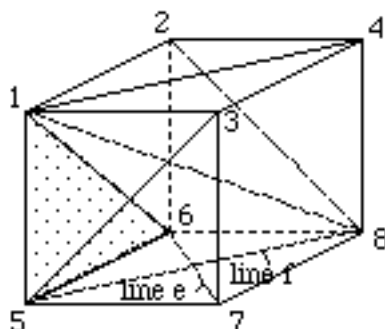
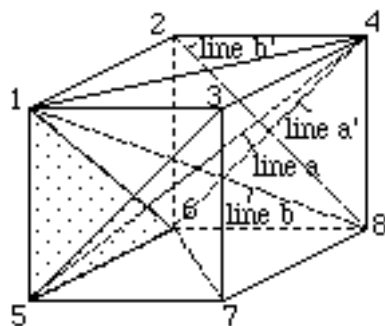
・アドバンシング・フロント法の問題点



分割パターン1



分割パターン2(途中)



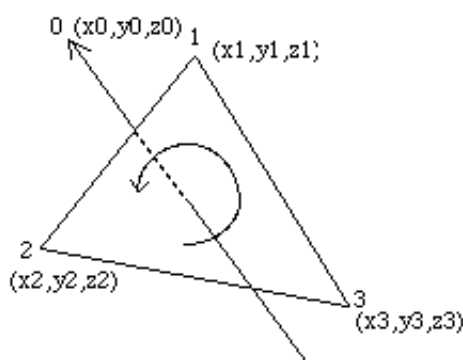
頂点が探索不能!

■基本ロジック■

1) 点が面のどちら側にあるかを判定するロジック

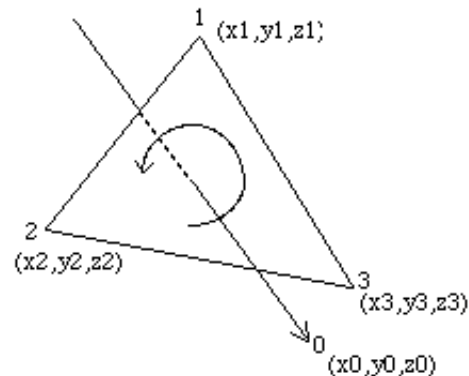
行列式 D

$$D = \det \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & x_3 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 & y_3 - y_0 \\ z_1 - z_0 & z_2 - z_0 & z_3 - z_0 \end{bmatrix}$$



行列式 D が正

→ 点0は左ネジ方向



行列式 D が負

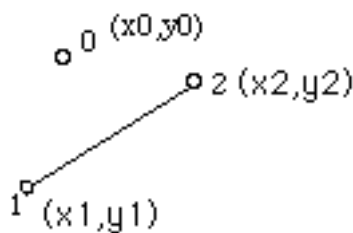
→ 点0は右ネジ方向

参考(2次元)：点と線分との位置関係を判定するロジック

行列式 D

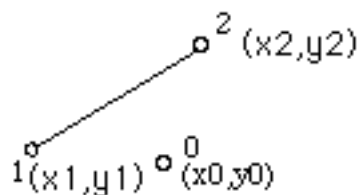
$$D = \det \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{bmatrix}$$

点0の位置



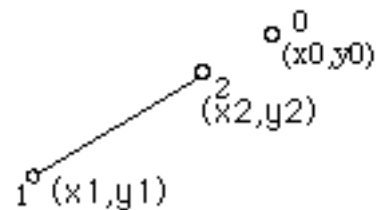
行列式 D が正

→ 線分1-2の左



行列式 D が負

→ 線分1-2の右

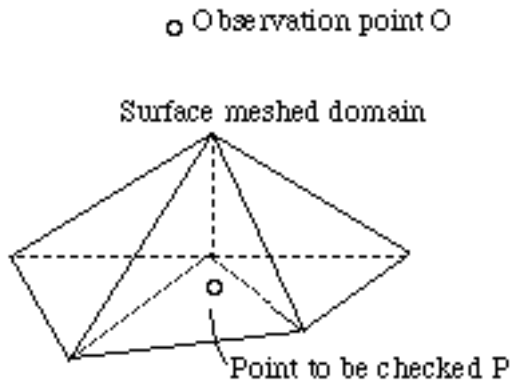


行列式 D がゼロ

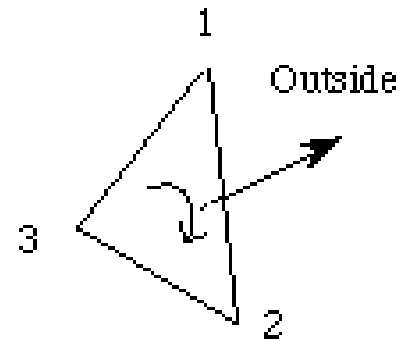
→ 線分1-2延長上

2) 点が任意領域の内外を判定する方法

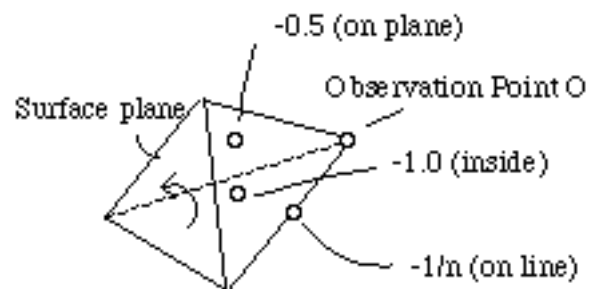
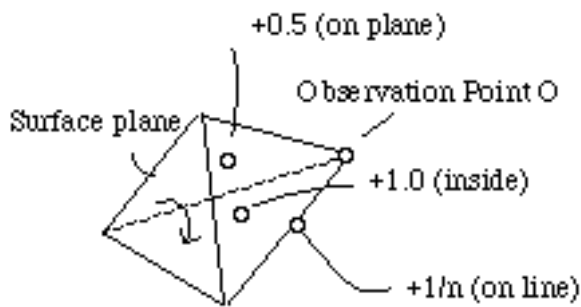
内部／境界に点Pを含むすべての四面体に対して、
加算規則に基づく総和が0→点Oは領域外，0以外→領域内（穴の場合は逆）。ここでnは線分に連なる四面体数。



三角形表面分割された領域

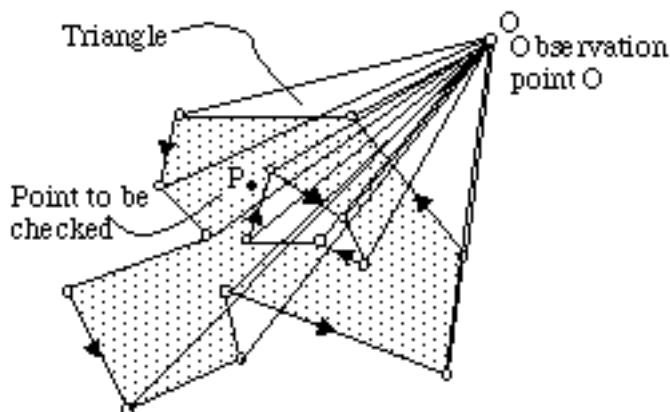


表面三角形の向き

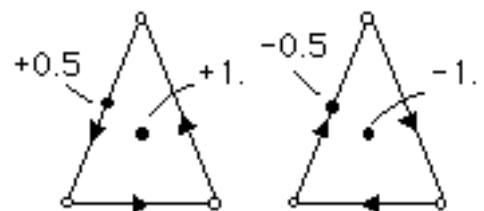


加算規則

参考(2次元)： ある点が領域の内か外か判断するロジック
内部／境界に点Pを含む三角形に対して，加算規則による総和が0
→点Oは領域外，0以外→領域内（穴の場合は逆）

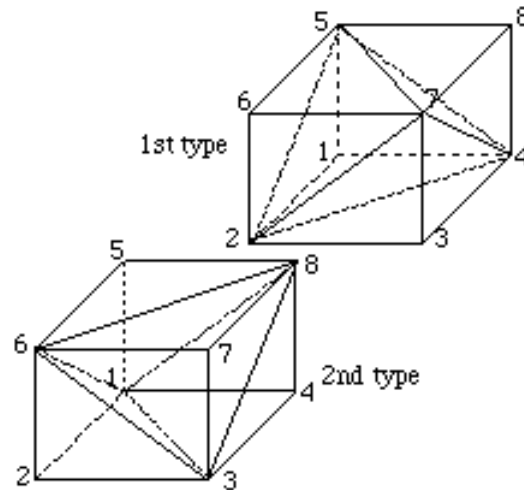


任意形状領域

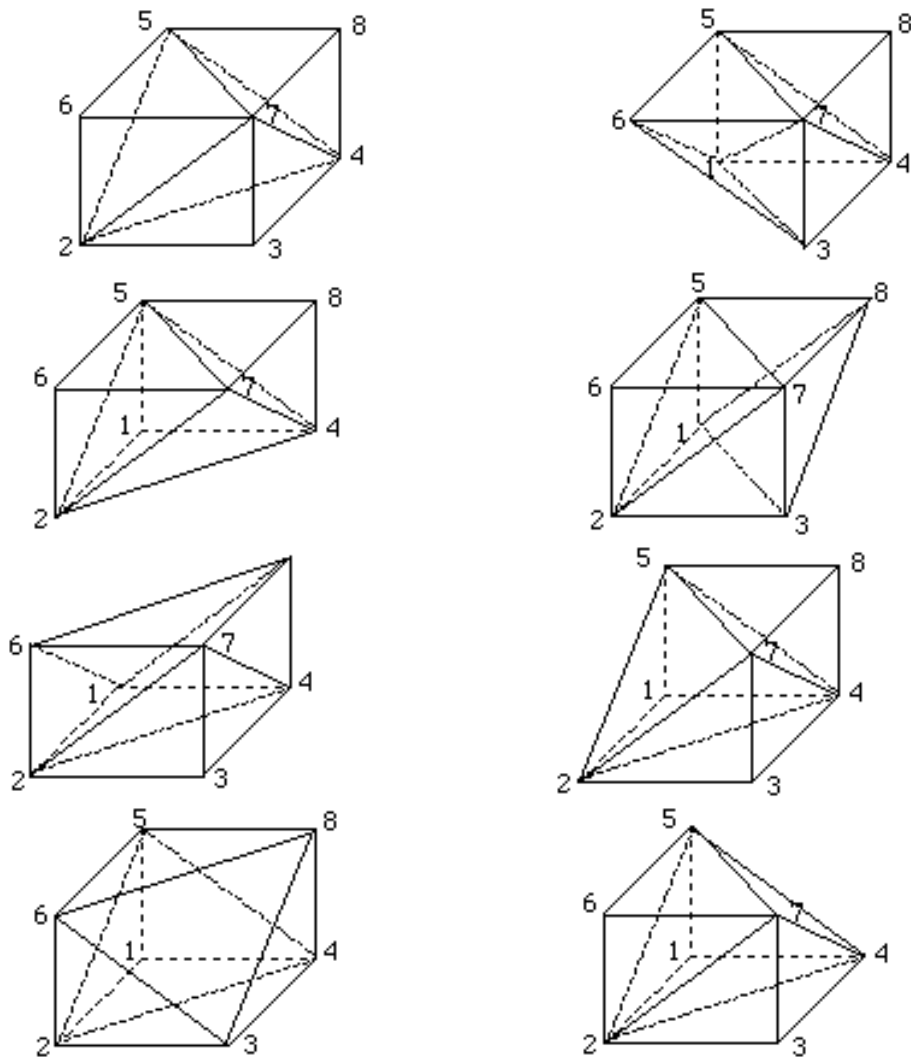


加算規則

■格子法による要素生成(第一段階)■



2つのパターン



点の残り具合による場合分け

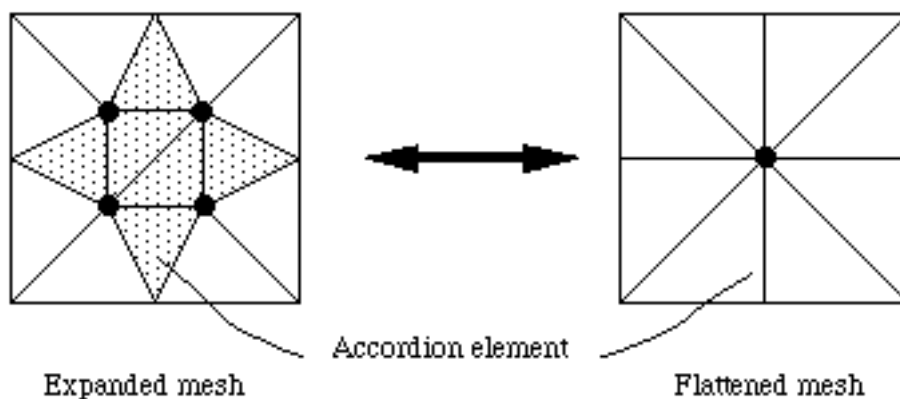
■逐次法:対処アルゴリズム■

- 1) 頂点探索が失敗した場合には探索をスキップして次へ
- 2) 終了時には頂点探索不能の基面集合は閉空間群を形成
- 3) 閉空間群から独立した閉空間を抽出
- 4) 閉空間に新節点を発生，四面体群を生成
- 5) 新節点重心回りに多くの要素が連なる場合には局所的にトポロジースムージングを行う

■閉空間への新節点の発生法■

- 1) 閉空間の点1より，結んだ線分が閉空間表面と干渉しない最大距離の点2をサーチ。
- 2) 同様にして点1と点2から最大距離にある点3をサーチ。
- 3) 点1を動かして，三角形1-2-3の重心が領域内にあるものを新節点とする。

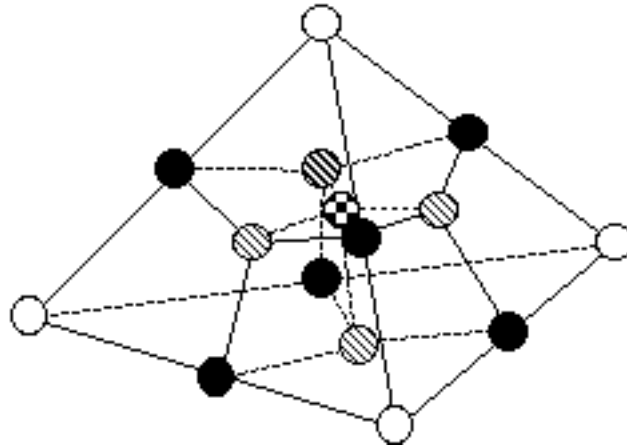
■トポロジースムージング■



トポロジーの変更（2次元）

■四面体要素と六面体要素■

四面体から六面体への変換はトポロジ的には可能。
しかし、形状は良好ではない。



四面体要素から六面体要素への変換

■六面体要素生成■

研究の動向:未だプロトタイプの模索の段階。

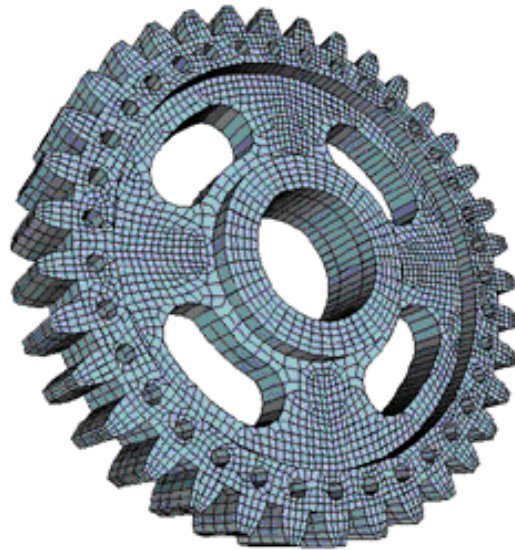
任意の領域形状を良好な形状の六面体要素で埋め尽くすのは不可能か？

個々の手法の適用可能範囲に注意する必要。

■六面体要素生成法■

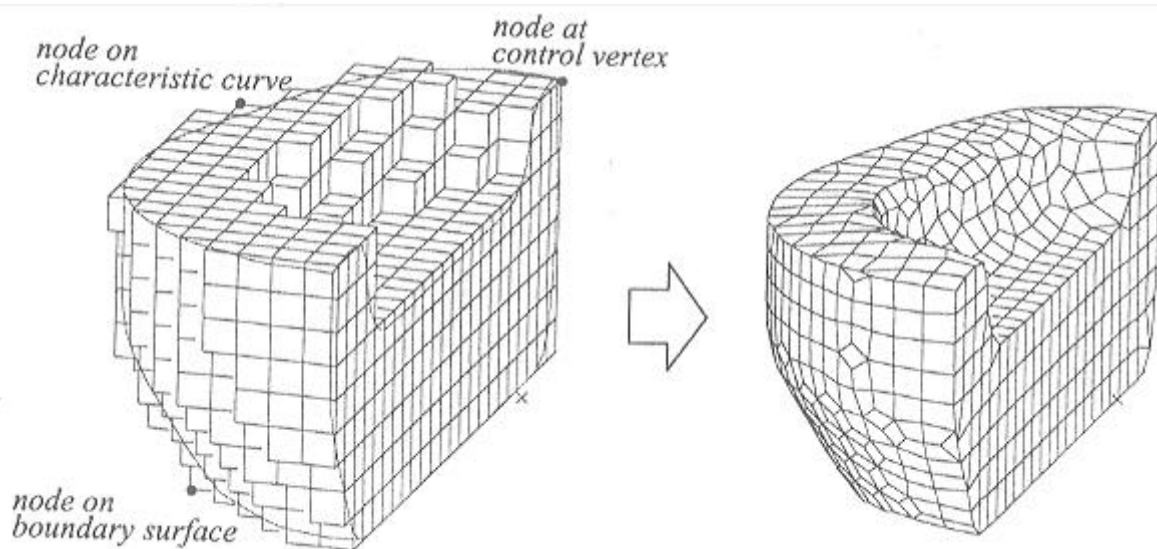
1 インテリジェントローカルアプローチ[64]

ファジーを用いた方法。



歯車

2 マスター・グリッドアプローチ[65]



2 メッシュジェネレーションの新しい動き

■ボロノイセル有限要素法■[66]

ボロノイセル= ドロネイ網と対になる多面体網
領域に対して定義

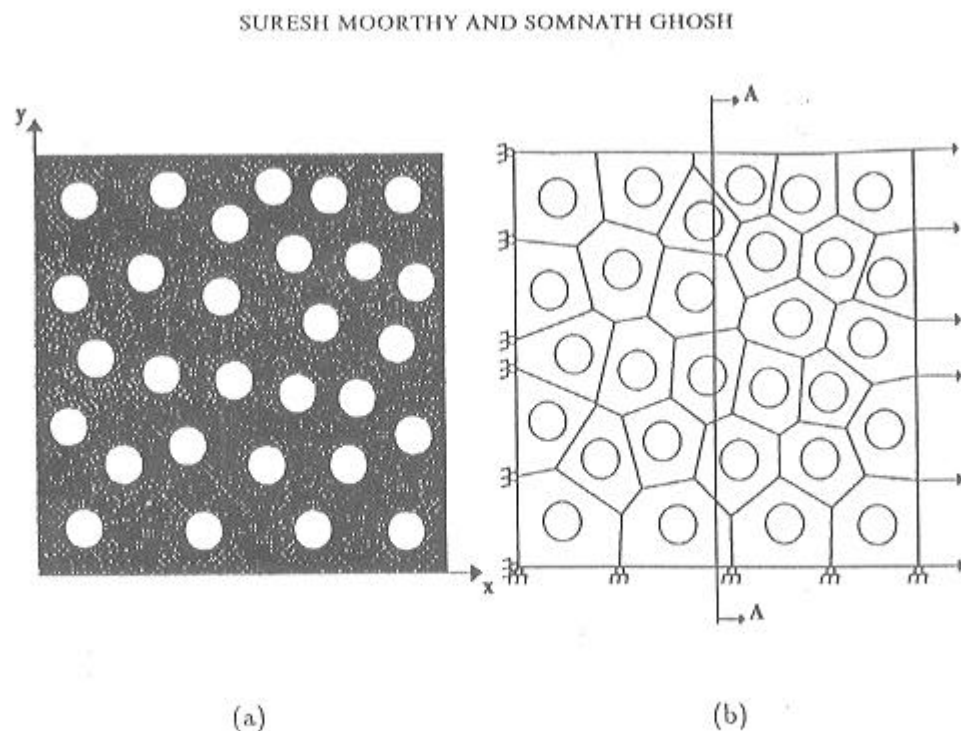
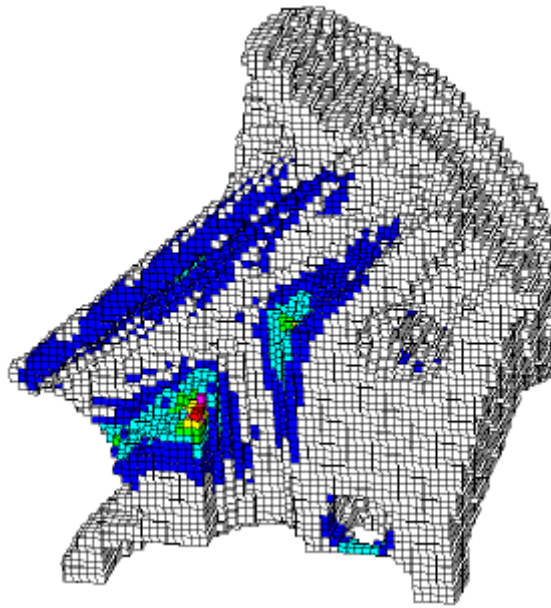


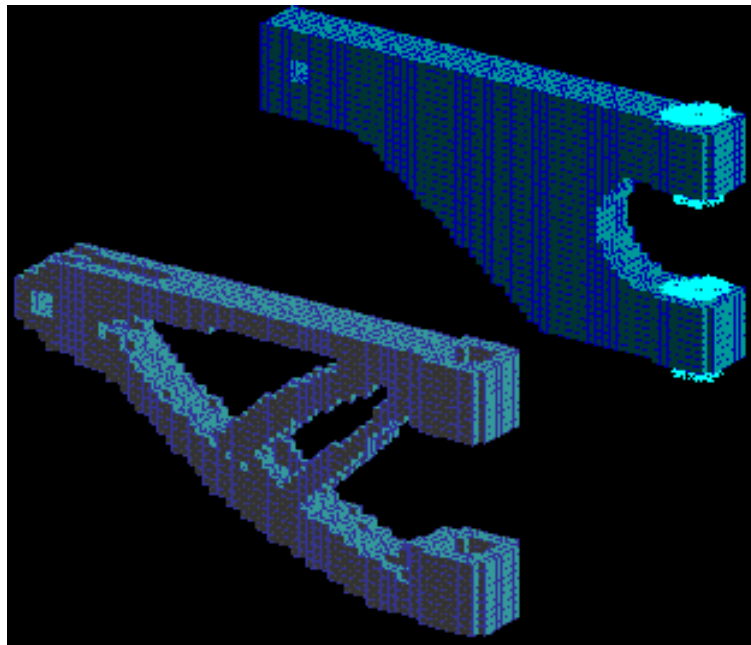
Figure 11. (a) ANSYS and (b) VCFEM meshes for random packed RME with circular voids ($V_f = 20$ per cent)

■ボクセルメッシュ■[67]

三次元スキャナーで取った情報をそのままメッシュに。
メッシュ生成のための簡易形状モデル生成が不必要。
均質化法ベースのトポロジー最適設計との組み合わせ。
ただし、メッシュはギザギザ。大規模解析が前提。
ボクセル形状は共通なので剛性マトリックス構築が簡単。
三次元解析をとにかく可能にする方法。



ボクセルメッシュ



トポロジー最適設計

■メッシュレス■

節点のみを生成、形状関数を導出。

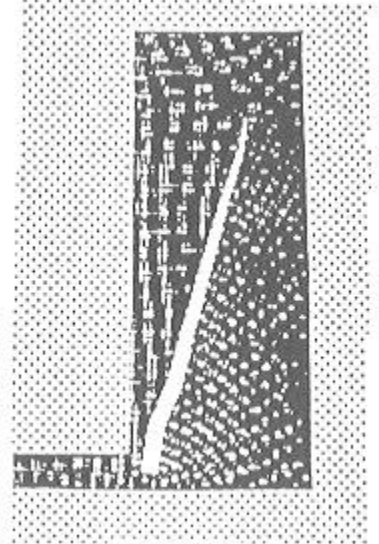
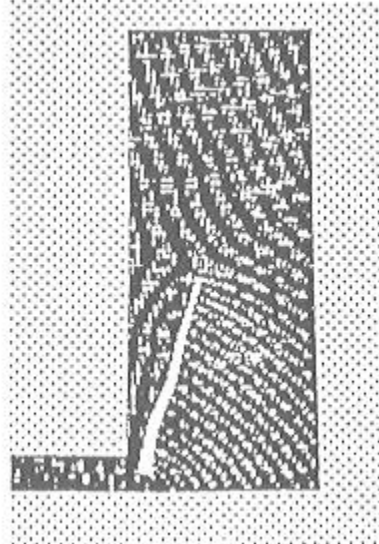
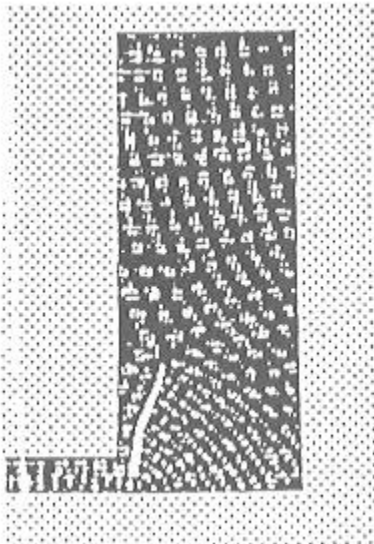
1. Element-Free Galerkin Method[68]

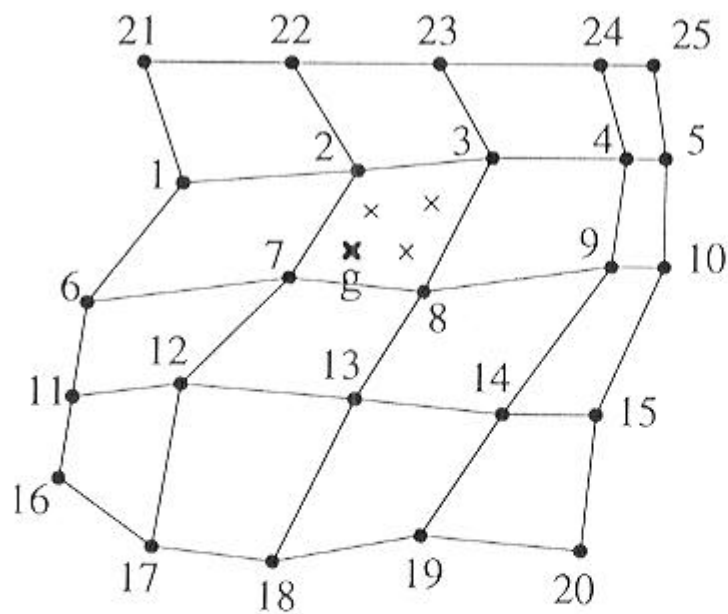
移動最小二乗法による形状関数構築。

関数値及び微係数は連続

形状関数 $N(x_i) \neq \delta_{ij}$ ゆえ，基本境界条件は別に設定

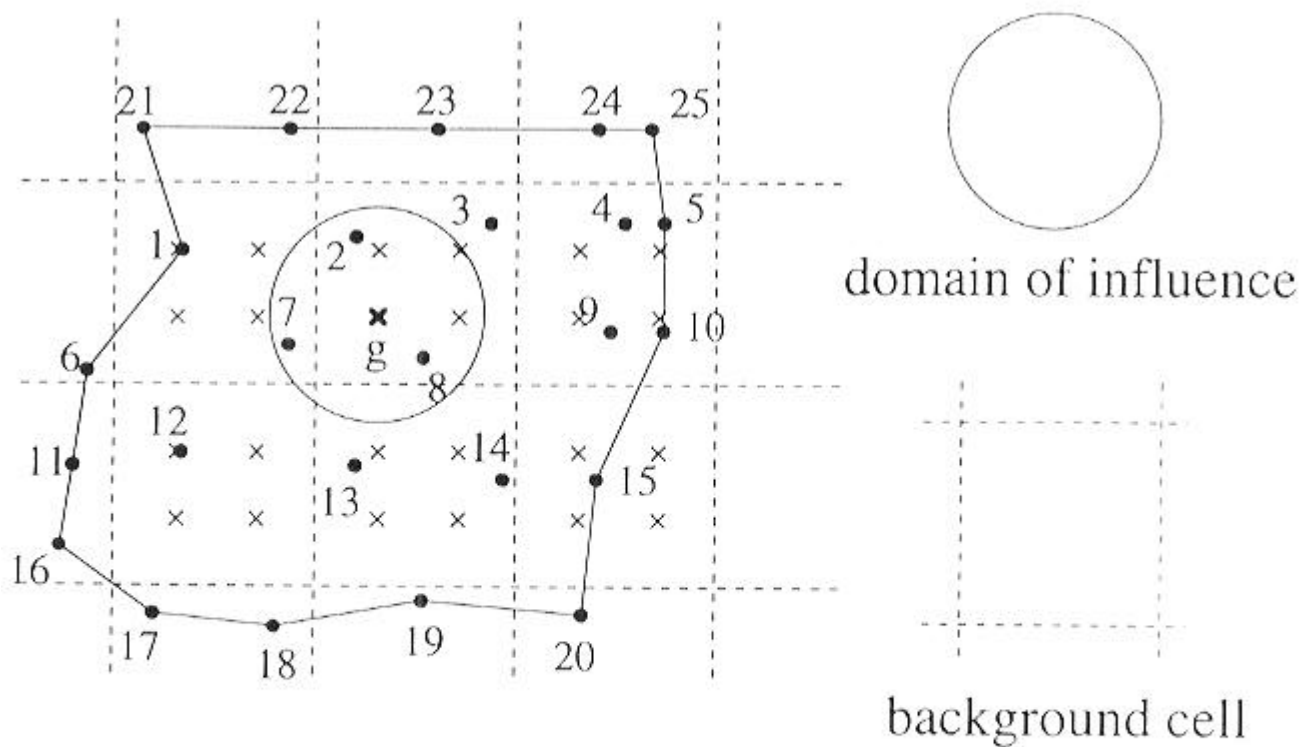
積分はバックグラウンドセルで行う。





- node
- × integration point

(a) FEM



(b) EFGM

図10 FEMとEFGM

2. Free Mesh Method[69]

一時的に局所的に要素生成。

形状関数は従来メッシュのものと同一。

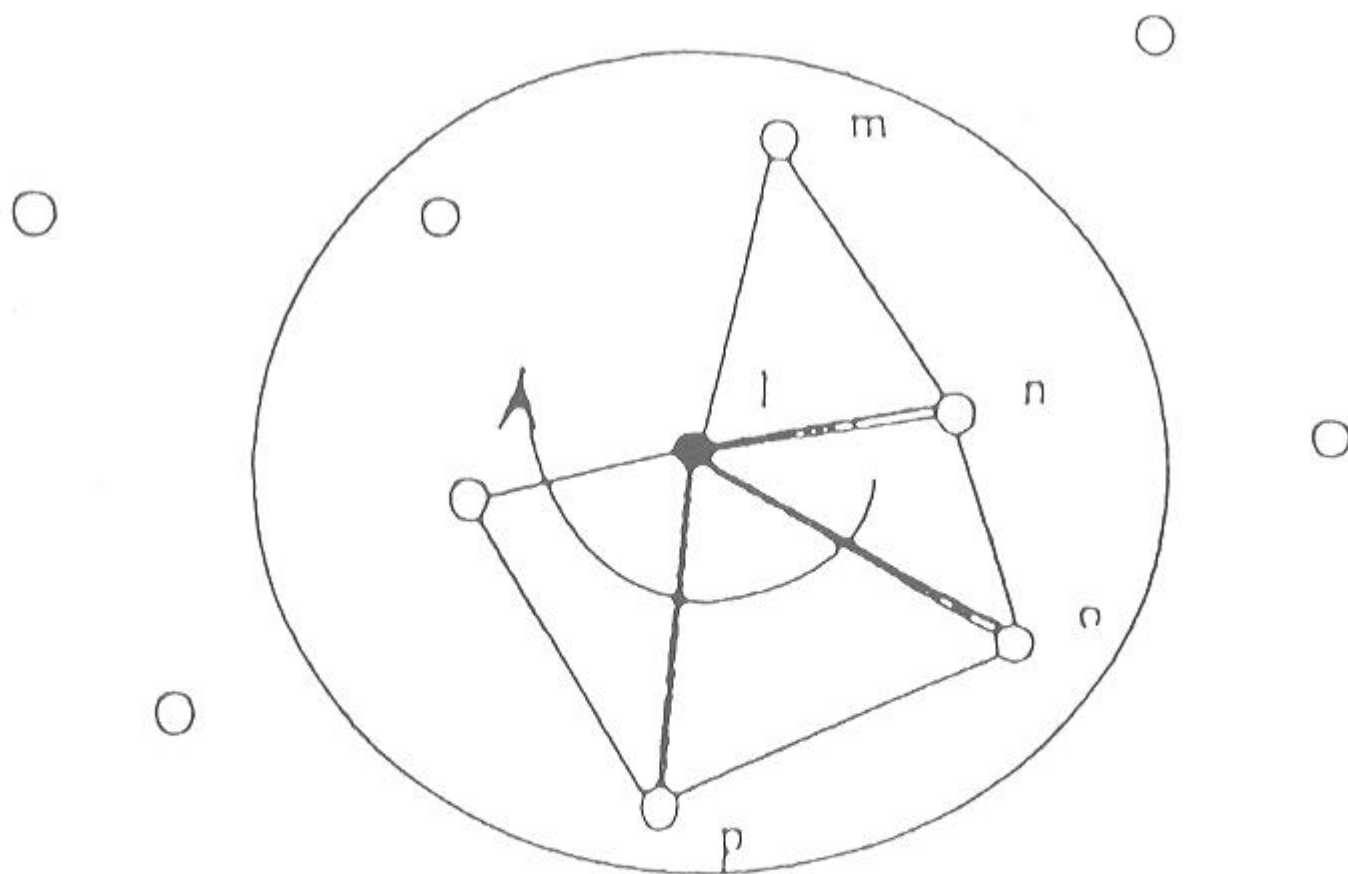


図 節点 l まわりの一時的な三角形要素

3 アダプティブ・メッシュ・ジェネレーション

- ◆有限要素解析誤差
- ◆質の良いメッシュとは？
- ◆メッシュの改善
- ◆アダプティブ法の考え方
- ◆アダプティブ法以前のメッシュ改善法
- ◆アダプティブ法と従来の方法との差異
- ◆アダプティブ法の2つの部分
- ◆キーポイント
- ◆誤差推定法
- ◆誤差推定法の選択
- ◆アダプティブメッシュコントロールの3つの形態
- ◆各形態の特性
- ◆h法におけるメッシュのコントロール法
- ◆補間誤差に基づく誤差測度
- ◆誤差測度の導出
- ◆誤差測度の計算
- ◆誤差測度と要素寸法との関係
- ◆数学的矛盾のある問題
- ◆誤差推定の意味
- ◆非定常解析への適用の課題

■有限要素解析誤差■

有限要素法の質はメッシュの質に依存。

近似解法ゆえ、不適切なメッシュでは無効な解を得る。

■質の良いメッシュとは？■

一般に、

歪みのない要素形状。

誤差大の領域では、要素寸法が小あるいは要素次数が高次。

要素寸法や要素次数の変化がスムーズ。

■メッシュの改善■

従来は、

有限要素解析の経験のある人間によって行なわれた。

勘による試行錯誤的なプロセスが必要であった。

→アダプティブ法の出現。

■アダプティブ法の考え方■

誤差の事後推定に基づき、有限要素の改善を自動的に行なう方法論。

- ・ 誤差の事後推定（a posteriori error estimate）とは
解析結果を基とする誤差の推定。

■アダプティブ法以前のメッシュ改善法■

1 歪みエネルギー密度（SED）に基づく方法

（例えば、Prager [28], Felippa [32], Melosh et al. [33] and Shephard et al. [35]）

解析解から計算したSEDを一種の誤差測度と考えると、メッシュを細分化する。

・問題点

特異点周りではSEDの値が小さめに出てしまう。

SEDとメッシュパラメータとの関係が明確ではない。

2 エネルギーノルムの最小化を、変位と節点位置の双方に行なう。

（例えば、Turcke and McNeice [31] and Seguchi et al. [34]）

・変位に対する最小化（通常有限要素法）

$$\min_{\mathbf{u}} \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

・変位と節点位置に対する最小化

$$\min_{\mathbf{u}, \mathbf{x}} \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \text{ and } \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = 0$$

・問題点

二番目の式は非線形であり、解くのが困難。

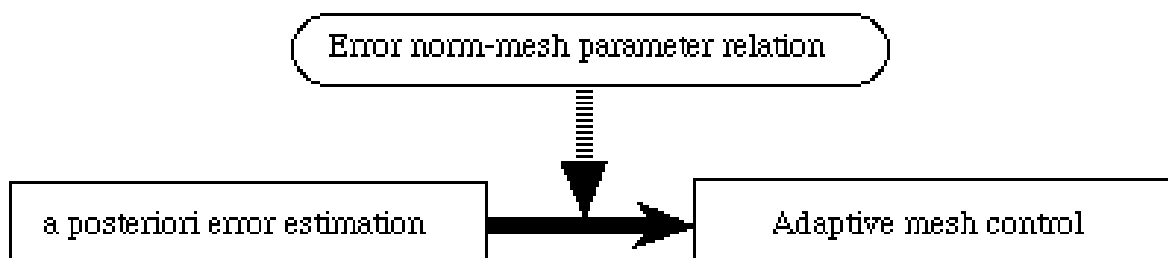
メッシュのトポロジーをも考慮にいれて解くのは不可能。

■アダプティブ法と従来の方法との差異■

- (1) 数学(関数解析)が背後にある。
- (2) 切り欠き等の特異点近傍の感度が良い。
- (3) 定量的な誤差のコントロールが可能。
- (4) アルゴリズムが実用的。

■アダプティブ法の2つの部分■

- (1) 正確な誤差の事後評価
- (2) 正確なメッシュのコントロール



アダプティブ法の2つの部分

■キーポイント■

- (1) 誤差推定はノルムに関して行う。
- (2) 誤差ノルム率に対して誤差を定量的に制御

誤差ノルム率 (Quality Index)

$$= \text{Total Error Norm} / \text{Total Energy Norm}$$

註: ノルムの選び方によって誤差推定結果は多少異なる。

■誤差推定法■

- ・残差に基づく方法[36,38,39,46]

誤差の成分 $u-u_h$ について弱定式化を要素毎に行ない、その残差と誤差の表面力成分を近似計算し、誤差ノルムを求める方法

- ・補間誤差による方法[37,40,42,44,45,48,50,64]

厳密解を補間した誤差ノルムが領域全体では有限要素解析誤差ノルムの上限を示すという補間定理を要素レベルにまで拡張し、個々の要素で有限要素誤差ノルムを補間誤差ノルムで代用する方法

- ・Zienkiewicz-Zhu [43]の方法

有限要素解析解と有限要素解析解を平滑化した関数の差のノルムを誤差測度とみなす方法

■誤差推定法の選択■

・誤差推定そのものの精度を考えれば残差に基づく方法が一番。ただし、定式化が複雑で、解析法によってその定式化が異なる。

・Zienkiewicz-Zhu の方法是一種の簡易法。しかし、メッシュのコントロールの段階で誤差推定が厳密に反映されない事を考慮すれば、これで十分とも言える。

・誤差測度とメッシュパラメータとの関係式には補間誤差定理を使う。故に数学的には補間誤差による方法が統一的である。

■アダプティブメッシュコントロールの3つの形態■

- ・ r 法 節点移動法[37,42,64]

節点数や要素数は不変。

各要素が等しい誤差測度を持つように節点位置を移動。

- ・ h 法 要素細分化法[36,44,45,48-50]

各要素が等しい誤差測度を持つように、誤差の大きい領域の要素を細分化。

- ・ p 法 要素高次化法[51,52]

誤差の大きい領域の要素を高次化。

■各形態の特性■

- ・ r 法

モデルの全自由度は不変ゆえ、解析効率は不変。誤差を平均化するだけで、誤差測度の総量はほとんど変化なし。

- ・ h 法

要素の細分化と共にモデルの全自由度が増加するので、解析効率は低下。誤差測度の総量はアダプテーションによって減少し、その値を定量的にコントロール可能。

- ・ p 法

要素の高次化と共により多くの積分点が必要となり、解析効率が低下。必要以上の高次要素を用いると解の振動が起こる。解の収束率は3つの方法の中で一番良いとされている。

■ h 法におけるメッシュのコントロール法 ■

・ アダプティブ・メッシュ・リファインメント法

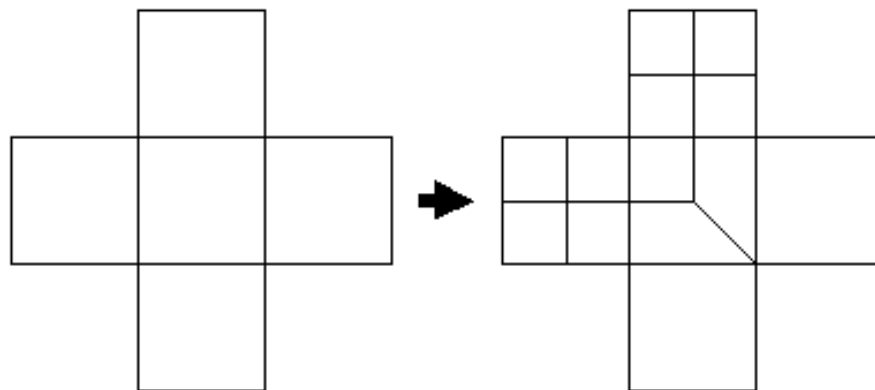
初期要素を要素ごとに局所的に細分化していく方法

問題点として

細分化された要素が初期要素の形状の影響を受ける。

要素寸法の細やかな制御が難しい。

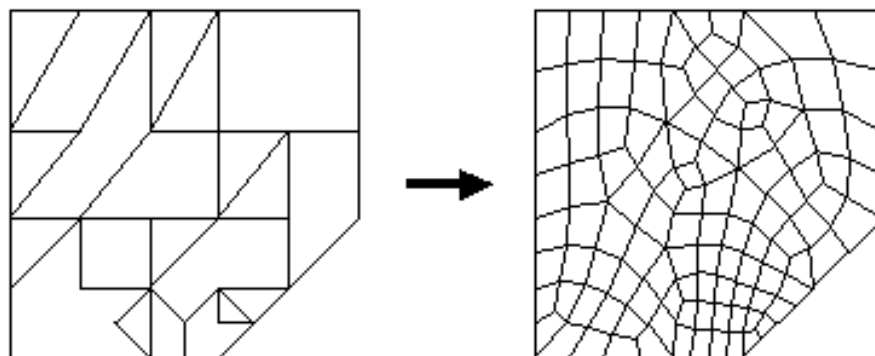
全自由度数が必要以上に増加する。

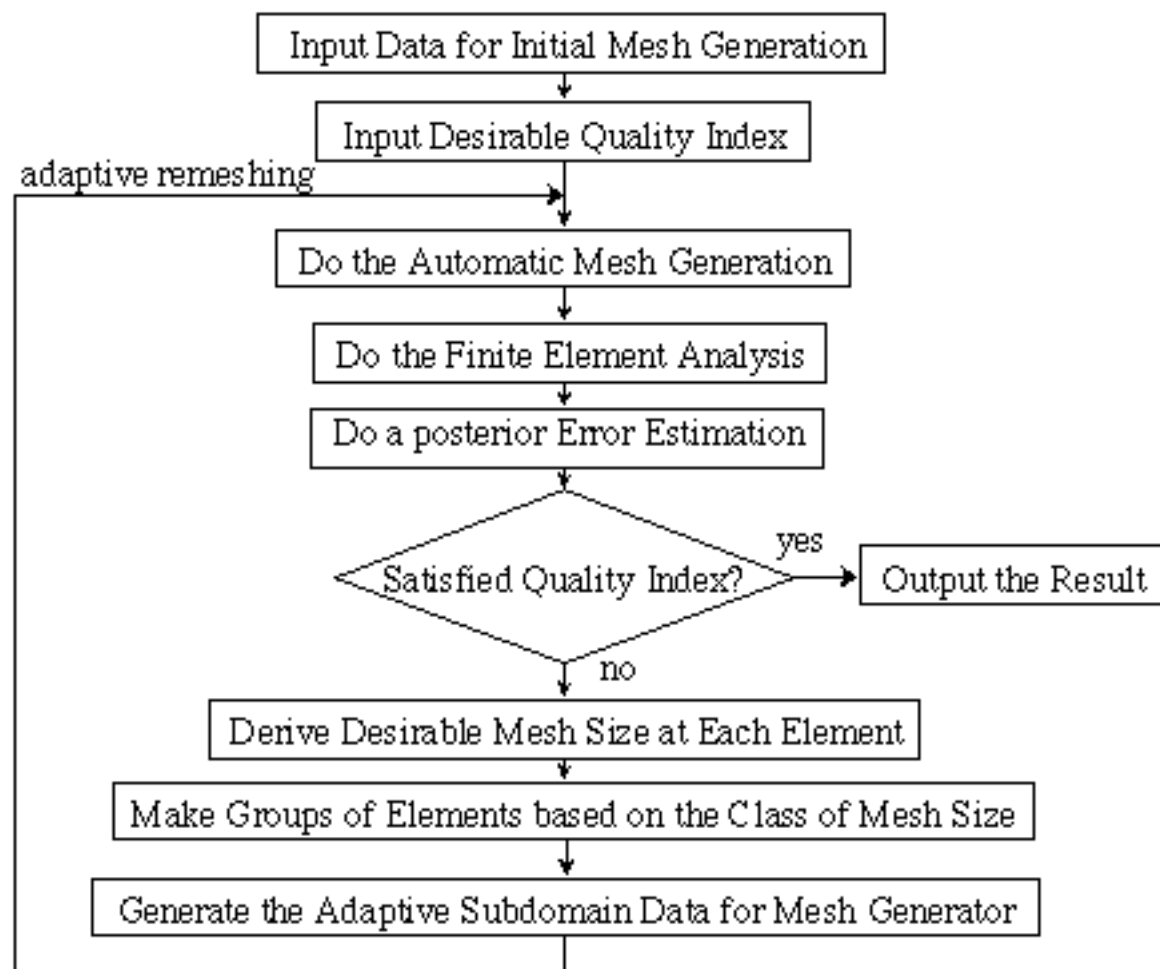


・ アダプティブ・リメッシング法

誤差測度（要素制御寸法）の分布より、解析領域の部分構造データを自動生成し、要素自動生成を経て細やかに要素寸法が制御されたアダプティブ・メッシュを得る。

非対話式全自動メッシュジェネレータが必要。





アダプティブ・リメッシングのアルゴリズム・フロー

■補間誤差に基づく誤差測度■

・補間定理（Interpolation Theory in FEM）

ノルム $a(\cdot, \cdot)$ の観点から、厳密解を補間した誤差は領域全体で有限要素解析誤差の上限を示す。

$$\sqrt{a(u - u_h, u - u_h)} \leq \sqrt{a(u - u_I, u - u_I)}$$

$a(\cdot, \cdot)$ は、例えば、

$$a(u, v) = \int_{\Omega} uv \, d\Omega \quad (\text{L2ノルム}), \quad a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u + \nabla v) \, d\Omega \quad (\text{H1ノルム}), \quad \text{等}$$

・誤差測度

上記の関係が個々の要素についても成立すると仮定。

有限要素解析誤差 $\sqrt{a(u - u_h, u - u_h)}$ の代わりに誤差の上限を表わす $\sqrt{a(u - u_I, u - u_I)}$ を要素 e の誤差測度 E_e に使用。

実際には厳密解 u は未知ゆえ、厳密解 u の代わりに w （有限要素解から導出した形状関数より一次高次の関数）を用いて誤差測度を求める。

$$E_e = \sqrt{a(u - u_I, u - u_I)} \approx \sqrt{a(u - w, u - w)}$$

・誤差ノルム率（Quality Index）

ノルムの観点から領域全体の有限要素の質を表わす指標。

$$QI = \sqrt{a(u - u_h, u - u_h)} / \sqrt{a(u, u)} \approx \sqrt{\sum_{e \in T} E_e^2} / \sqrt{a(u, u)}$$

ここで、

E_e ：誤差測度（Error Measure）， QI ：誤差ノルム率（Quality Index）

u ：厳密解， u_I ：厳密解を形状関数によって補間したもの

u_h ：FE解析解， w ：形状関数より一次高次のFE解から導出した関数

■誤差測度の導出■

・四面体要素について

物理量 u を節点 i で形状関数の一次高次までテーラー展開。

$$u_i = u + (u_{,x}^*(x_i - x) + u_{,y}^*(y_i - y) + u_{,z}^*(z_i - z)) \\ + (u_{,xx}^*(x_i - x)^2 + u_{,yy}^*(y_i - y)^2 + u_{,zz}^*(z_i - z)^2) / 2 \\ + 2^*(u_{,xy}^*(x_i - x)^*(y_i - y) + u_{,yz}^*(y_i - y)^*(z_i - z) + u_{,zx}^*(z_i - z)^*(x_i - x)) \\ + H.O.$$

形状関数に代入。

$$u_i - u = \sum_{j=1}^4 u_j N_j - u, \quad u_{,x} - u_x = \sum_{j=1}^4 u_j \frac{\partial N_j}{\partial x} - u_x, \quad u_{,y} - u_y = \sum_{j=1}^4 u_j \frac{\partial N_j}{\partial y} - u_y, \quad u_{,z} - u_z = \sum_{j=1}^4 u_j \frac{\partial N_j}{\partial z} - u_z$$

補間誤差 $u_i - u, u_{,x} - u_x, u_{,y} - u_y, u_{,z} - u_z$ を得る。

・六面体要素について

同じく節点 i においてテーラー展開。

$$u_i = u + [\text{Taylor's expansion up to 2nd order wrt rst}] + H.O.$$

形状関数に代入。

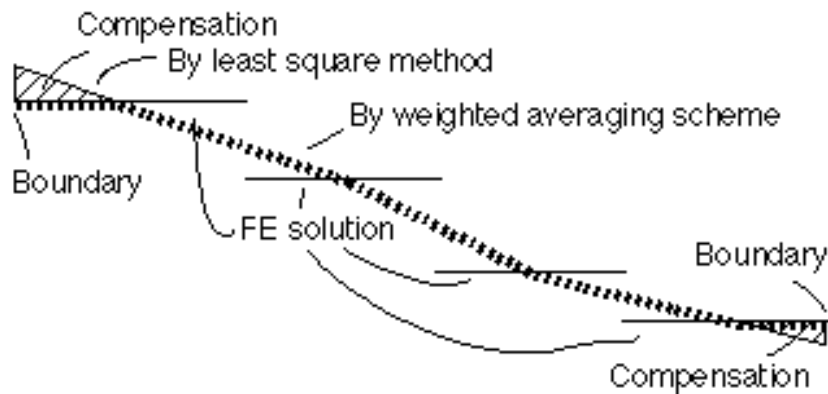
$$u_i - u = \sum_{j=1}^8 u_j N_j - u, \quad u_{,r} - u_r = \sum_{j=1}^8 u_j \frac{\partial N_j}{\partial r} - u_r, \quad u_{,s} - u_s = \sum_{j=1}^8 u_j \frac{\partial N_j}{\partial s} - u_s, \quad u_{,t} - u_t = \sum_{j=1}^8 u_j \frac{\partial N_j}{\partial t} - u_t$$

以上2式より、

$$u_i - u = u_{,rr}^*(r^*r - 1)/2 + u_{,ss}^*(s^*s - 1)/2 + u_{,tt}^*(t^*t - 1)/2 - u_{,rrss}^*(r^*r - 1)^*(s^*s - 1)/4 - u_{,rsst}^*(s^*s - 1)^*(t^*t - 1)/4 - u_{,rttr}^*(r^*r - 1)^*(t^*t - 1)/4 + u_{,rrsstt}^*(r^*r - 1)^*(s^*s - 1)^*(t^*t - 1)/8 \\ u_{,ri} - u_r = u_{,rr}^*r + u_{,rss}^*(s^*s - 1)/2 + u_{,rtt}^*(t^*t - 1)/2 + u_{,rrss}^*r^*(1 - s^*s)/2 + u_{,rrtt}^*r^*(1 - t^*t)/2 - u_{,rsst}^*(s^*s - 1)^*(t^*t - 1)/4 + u_{,rrsstt}^*r^*(s^*s - 1)^*(t^*t - 1)/4, \dots$$

■誤差測度の計算■

物理量 u について形状関数より高次の微分項の値が必要。
 実際には厳密解 u は未知ゆえ、有限要素解析解 u^h より近似。



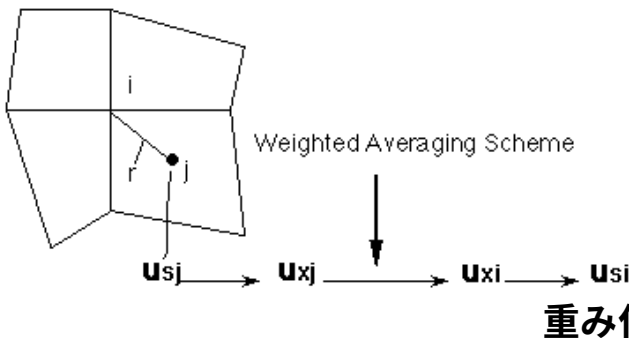
最小二乗法及び重み付き平均化法

・最小二乗法

$$\min_{u_i} \int_{\Omega} (\sigma_x - \sigma_x^h)^2 d\Omega, \quad \text{ここで } \sigma_x = \sum_{i=1}^{n_s} u_i N_i, \quad \sigma_x^h = \sum_{i=1}^{n_s} u_i^h N_i$$

節点数 n に対して、 $n \times n$ の行列を解く必要あり。

・重み付き平均化法



境界付近の値の補正が必要。

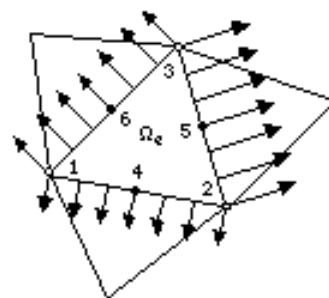
・トラクション法

$$w \in V_e : a_e(w, \bar{w}) = \int_{\Omega_e} \bar{w} f d\Omega + \int_{\Gamma_e} \bar{w} q d\Gamma \quad \forall \bar{w} \in V_{e0}$$

$$V_e = \left\{ v = \sum_{i=1}^6 v_i N_i \mid v_1 = u_1, v_2 = u_2, \text{ and } v_3 = u_3 \right\}$$

$$V_{e0} = \left\{ v = \sum_{i=1}^6 v_i N_i \mid v_1 = 0, v_2 = 0, \text{ and } v_3 = 0 \right\}$$

$$w_{11} = \sum_{i=1}^6 w_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2}, \quad w_{12} = \sum_{i=1}^6 w_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y}, \quad w_{22} = \sum_{i=1}^6 w_i \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2}$$



■誤差測度と要素寸法との関係■

補間誤差の不等式[60]より

$$\|u - u_h\|_{H^m(\Omega_e)} \leq Ch^{k+1-m} |u|_{H^{k+1}(\Omega_e)}, \quad 0 \leq m \leq k$$

ここで

$\|\cdot\|_{H^k(\Omega_e)}$: $H^k(\Omega_e)$ スペースのノルム

$|\cdot|_{H^k(\Omega_e)}$: $H^k(\Omega_e)$ スペースのセミノルム

u : 厳密解

u_h : 厳密解を形状関数によって補間したもの

k : 有限要素形状関数の次数

h : 有限要素寸法

C : (h と k に無関係な) 定数

E_e は $H^1(\Omega_e)$ スペースのノルムゆえ、 $m=1$ 、

$$E_e \leq Ch^k |u|_{H^{k+1}(\Omega_e)}$$

アダプテーション前後の比を取って、要素 e について、

$$h_e^{\exp} = \left(\frac{E_{\exp}}{E_e} \right)^{1/(k+r)} h_e^{\text{old}}$$

E_e 、 $E_{\exp}$ 、 h_e^{old} 、 $h_e^{\exp}$ はそれぞれアダプテーション前後の要素 e での誤差測度と要素寸法。四面体一次要素なら、 $k=1$ 、 r は要素寸法 h の次数へのセミノルムの寄与分ゆえ3次元では3/2(体積分の平方根)。(d次元でd/2)

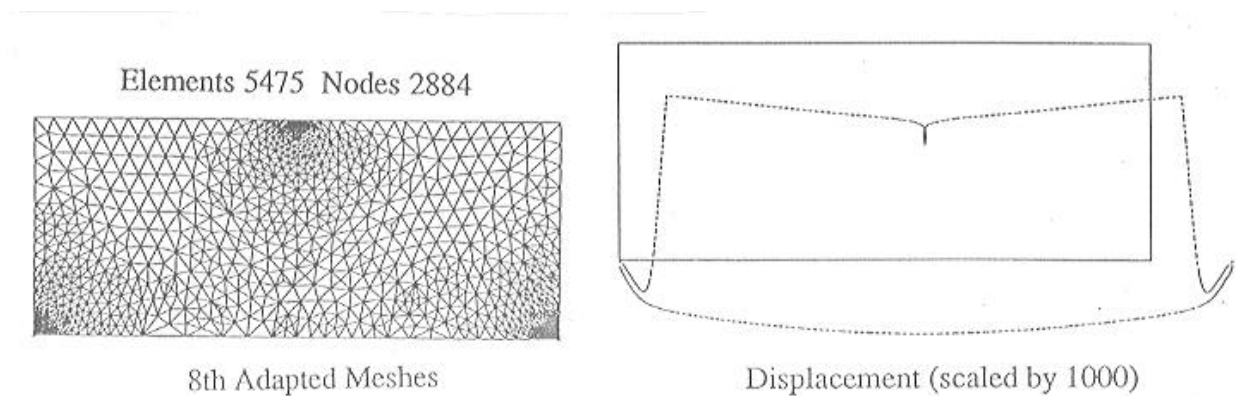
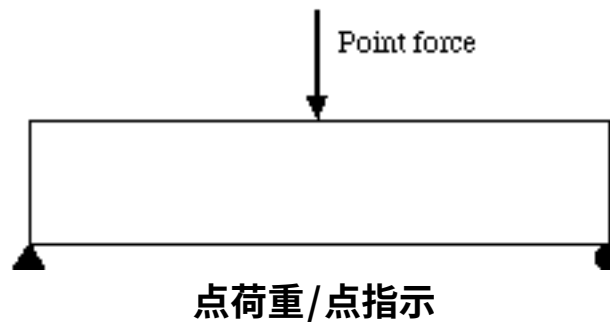
四面体一次要素の補間誤差と要素寸法との関係は、

$$h_e^{\exp} = h_e^{\text{old}} (E_{\exp}/E_e)^{2/5}, \quad E_{\exp} = \beta 100 \sqrt{\alpha(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h)}/ne$$

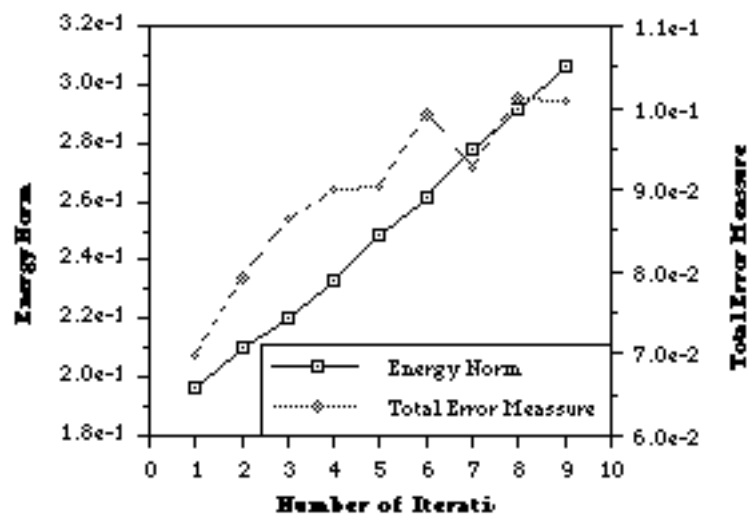
ne は要素総数、 β は予め解析者が指定する、誤差ノルム率QI(パーセント)。h法の指針は誤差測度の各要素に等配分ゆえ、 $E_{\exp}$ は β と平均エネルギーノルムとの積で近似可能。

■数学的矛盾のある問題■

・バブシカのパラドックス

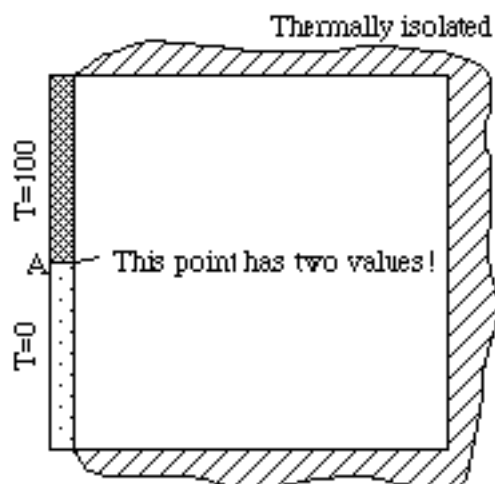


アダプティブプロセスを繰り返した後のメッシュ及び変位

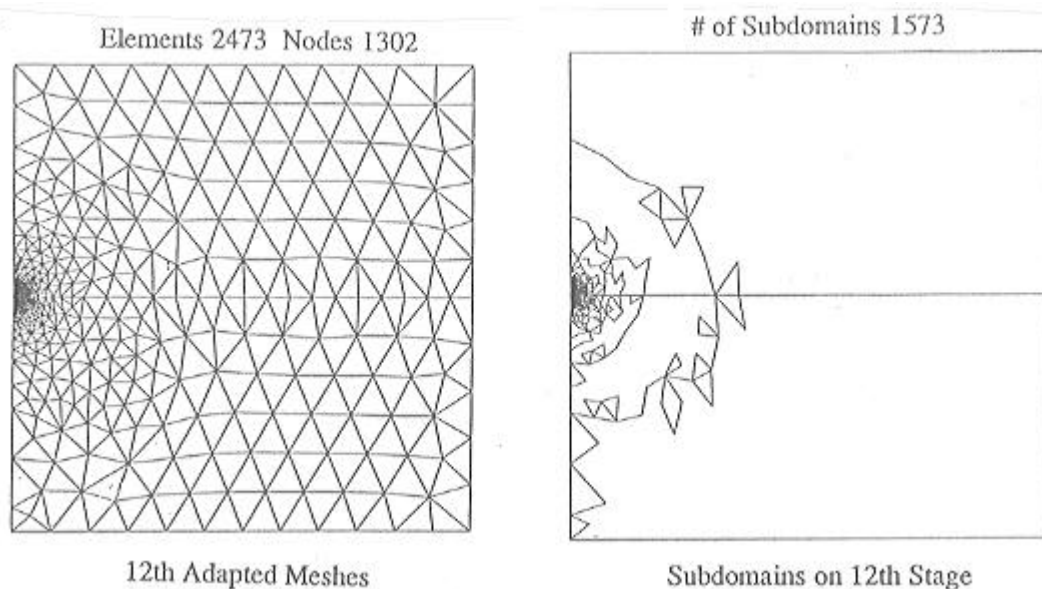


誤差ノルム及びエネルギーノルムの収束状況

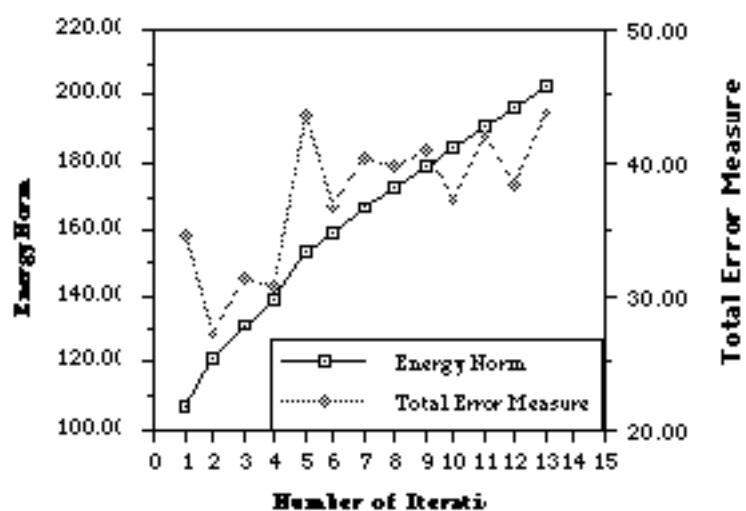
・重複した境界条件



熱伝導問題



アダプティブプロセスを繰り返した後のメッシュ及び熱流束

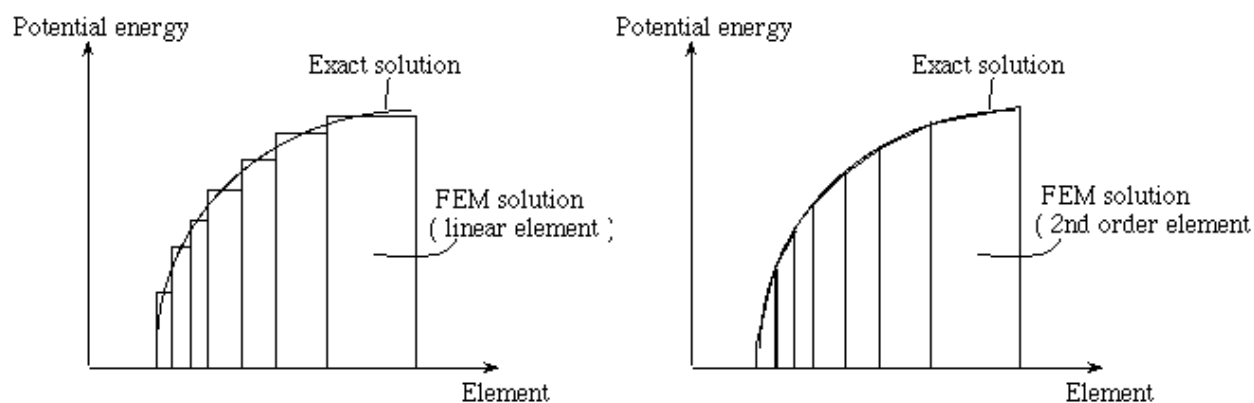


誤差ノルム及びエネルギーノルムの収束状況

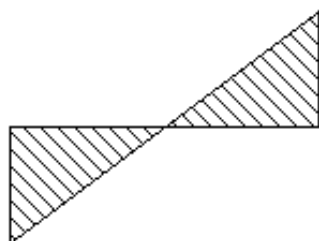
■誤差推定の意味■

○ h 法か p 法か？

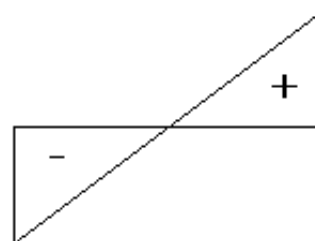
- ・ 誤差ノルム率とエネルギーノルム収束率



誤差ノルムの物理的意味



誤差ノルム

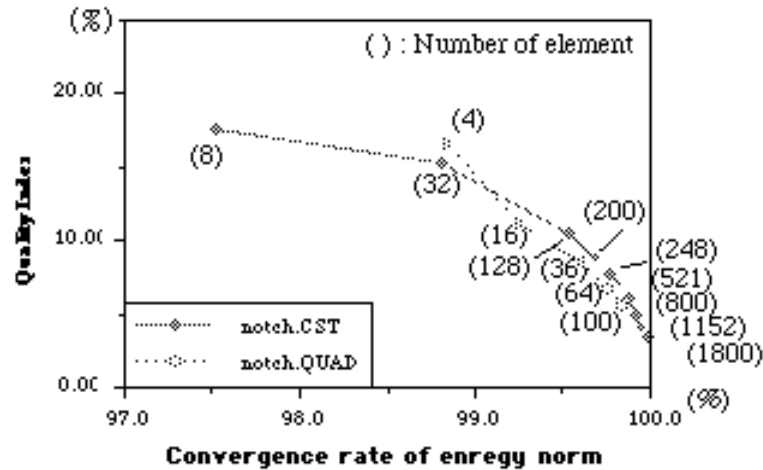


エネルギーノルムでの差

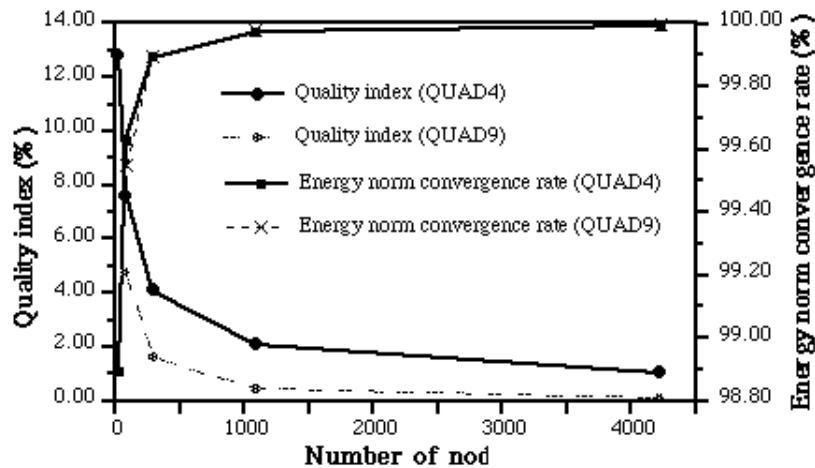
$$\alpha(\sigma - \sigma_h, \sigma - \sigma_h) \neq \alpha(\sigma, \sigma) - \alpha(\sigma_h, \sigma_h)$$

2つの観点

・ p 法は h 法と比べて収束率が良いか？



誤差ノルム率とエネルギーノルム収束率との関係

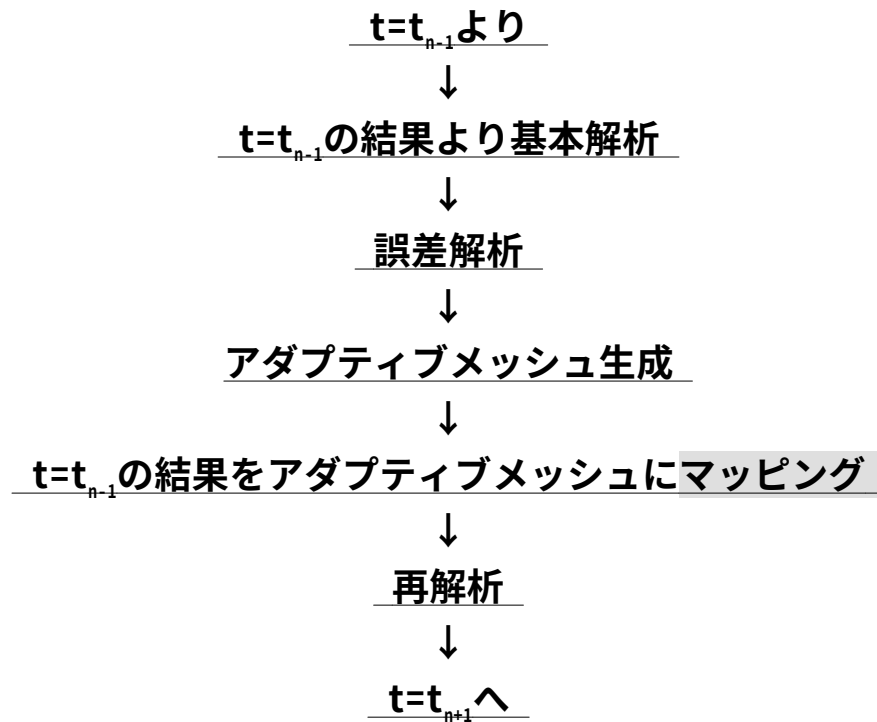


誤差ノルム率、エネルギーノルム収束率、節点数との関係

- ・ 通常は誤差ノルム率の観点で収束度を論じている。
- ・ p 法は誤差ノルム率の観点からは収束が良いが，エネルギーノルム収束率の観点からは h 法と差異はない。
- ・ p 法の誤差ノルム率の収束が良いのは，p 法自体の性質というより 1 次要素と比べて高次要素が曲線への適合が良いため？
- ・ 誤差ノルム率のみでの収束度の評価は危険。

■非定常解析への適用の課題■

メッシュの誤差 VS マッピングの誤差？



非定常解析(t=t_nのステップ)でのフロー