

有限要素法(FEM)について

産業技術総合研究所
先進製造プロセス研究部門
製造プロセス数理解析研究グループ

手塚 明

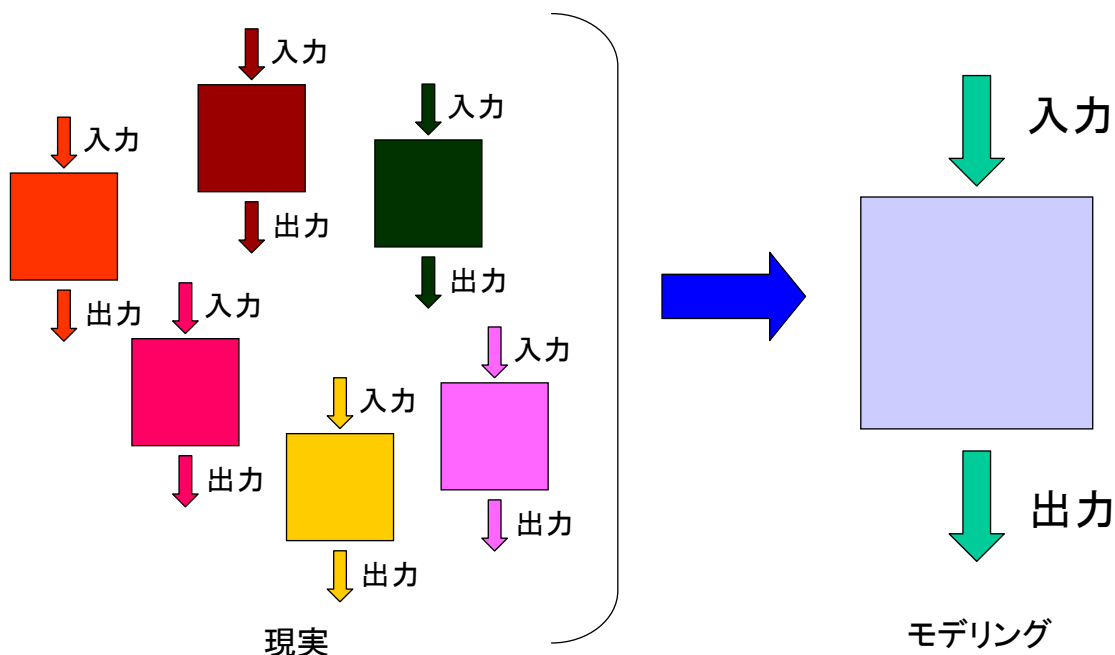
Dec.19, 2005

Copyright © 2004, Akira Tezuka, Process-oriented Computational Applied Mechanics Group, Advanced Manufacturing R.I., AIST

概要

■ モデリングとは？ ■

多種多様な現実→抽象化により扱いが容易に。(例えば, 言葉, 分類, 数学, ...)
モデリング←現実多様な入出力条件を汎用的に記述(入力=原因, 出力=結果)
データに語るモデリング→データベース: 論理に語るモデリング→シミュレーション

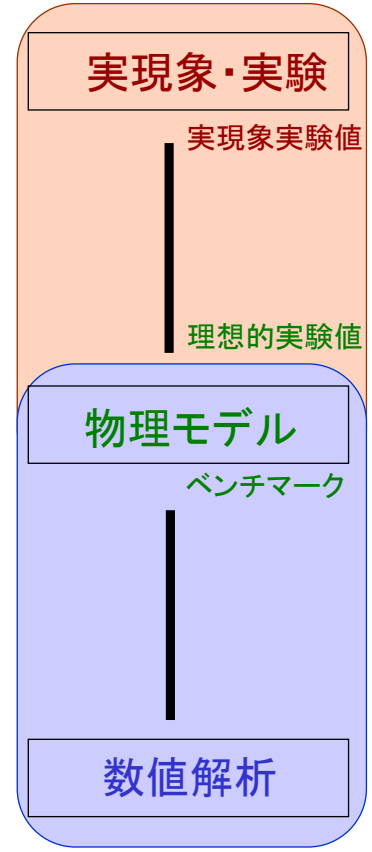
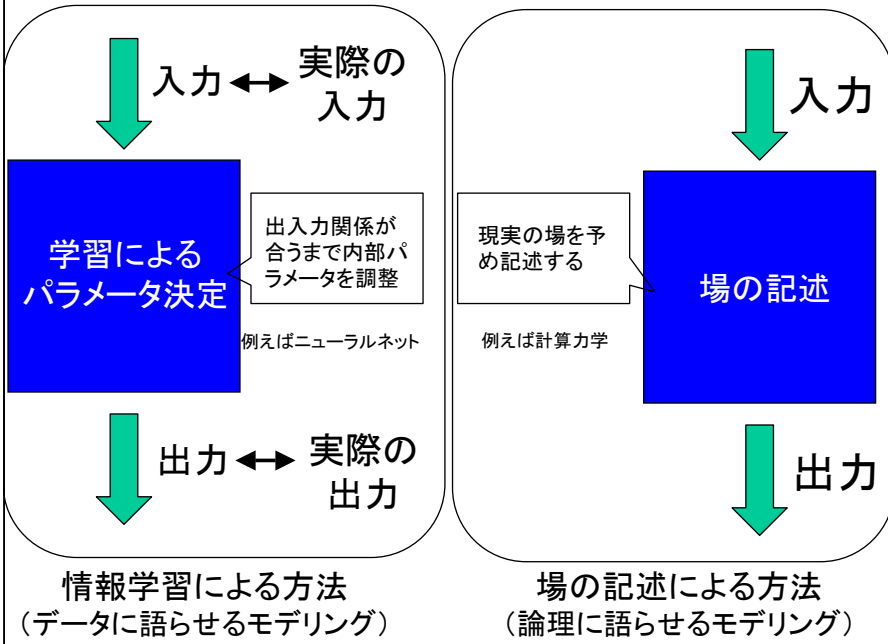


Copyright © 2004, Akira Tezuka, Process-oriented Computational Applied Mechanics Group, Advanced Manufacturing R.I., AIST

■ シミュレーションとは？ ■

通常, 現実を予見. 予想するために使用.
現実を汎用的に模擬する必要.

モデリングのための二つのアプローチ



■ 場の記述: 支配方程式の仕組み (熱伝導方程式) ■

熱伝導方程式

$$\rho c_p \dot{u} = \frac{\partial}{\partial x} (k_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial x} (k_{yx} \frac{\partial u}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial u}{\partial y}) + f$$



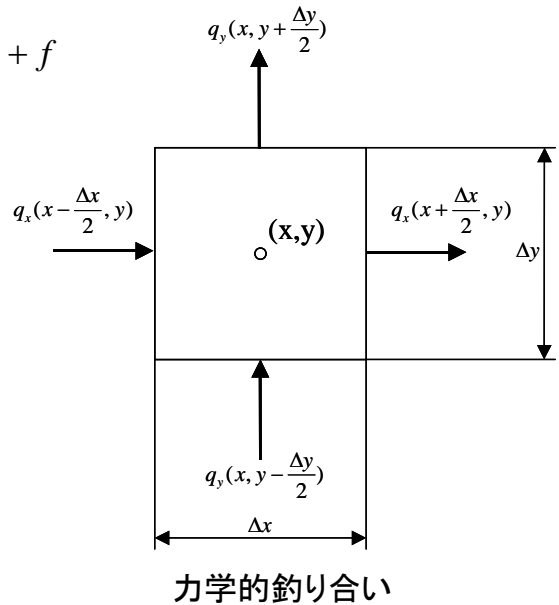
力学的釣り合い式 (力学)

$$\rho c_p \dot{u} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + f \quad \leftarrow \text{連続体力学}$$

+

実験による材料則 (経験)

$$\begin{cases} q_x = -k_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - k_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \\ q_y = -k_{yx} \frac{\partial u}{\partial x} - k_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$



u: 温度, q: 熱流束, k: 熱伝導係数, f: 熱源, x, y: 座標

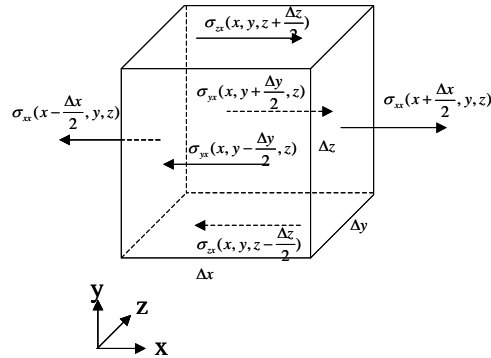
■ 場の記述: 支配方程式の仕組み (弾性方程式) ■

力学的釣り合い式 (力学)

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \rho f_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + \rho f_y = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho f_z = 0$$



+ 変位一歪み関係式 (定義) + 実験による応力一歪み関係式 (経験)

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})) \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{zz} + \sigma_{xx})) \\ \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})) \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{G} \sigma_{xy} \\ \varepsilon_{yz} = \frac{1}{G} \sigma_{yz} \\ \varepsilon_{zx} = \frac{1}{G} \sigma_{zx} \end{array} \right.$$

等方性材料の場合

■ 偏微分方程式で表される場の性質 ■

二階の偏微分方程式

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial x} + E \frac{\partial \phi}{\partial t} + F \phi + G = 0$$

・楕円型 (Elliptic) $B^2 - 4AC < 0$

ある点の値は周囲の平均値になる性質. 解の空間的広がりには方向性なし.
定常場の基礎方程式. 定常熱伝導, 静的弾性

・放物型 (Parabolic) $B^2 - 4AC = 0$

解の空間的広がりには方向性なし. 時間的変化は領域全体, 瞬時に拡散.
非定常熱伝導, 非定常拡散.

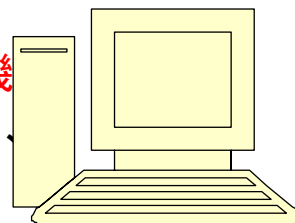
・双曲型 (Hyperbolic) $B^2 - 4AC > 0$

解の空間的広がりには方向性あり. 形を保って伝播. 時間的変化は局所的.
波動問題, 非定常移流問題

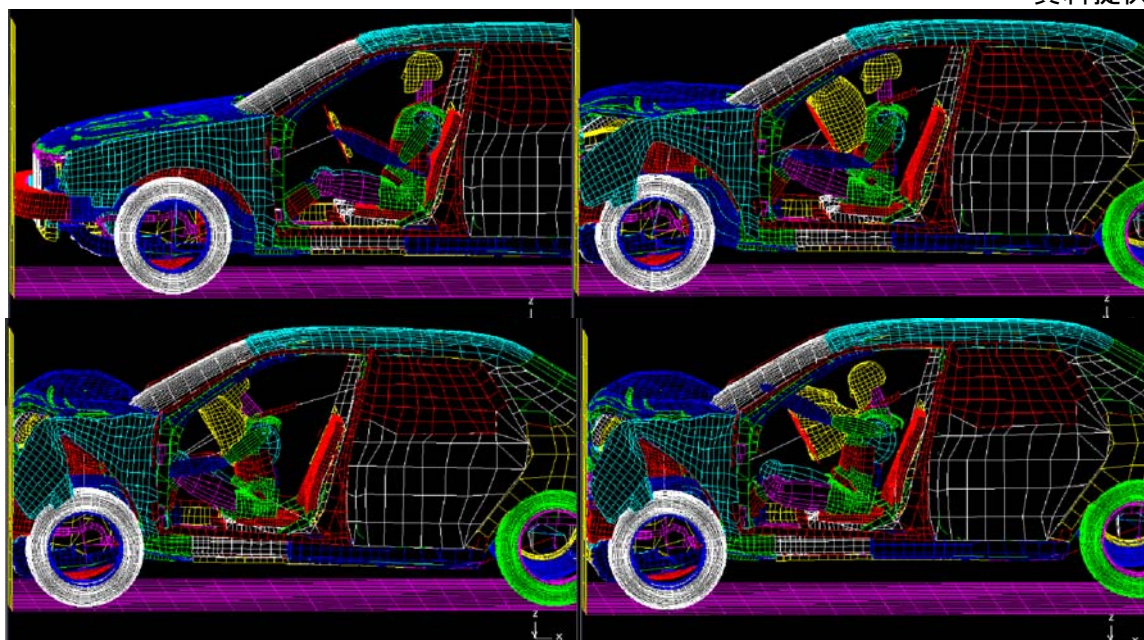
流体問題は放物型と双曲型の混合ゆえ, 難しい問題.

■ FEM: 場の記述モデルによるシミュレーション ■

FEMを使えば、事故や災害、物の壊れ具合を、**計算機**で**予測**できる。例えば、安全な自動車を作るためには、なくてはならないもの。



資料提供: 日本総研



Copyright © 2004, Akira Tezuka, Process-oriented Computational Applied Mechanics Group, Advanced Manufacturing R.I., AIST

■ 有限要素法(FEM)の特質 ■

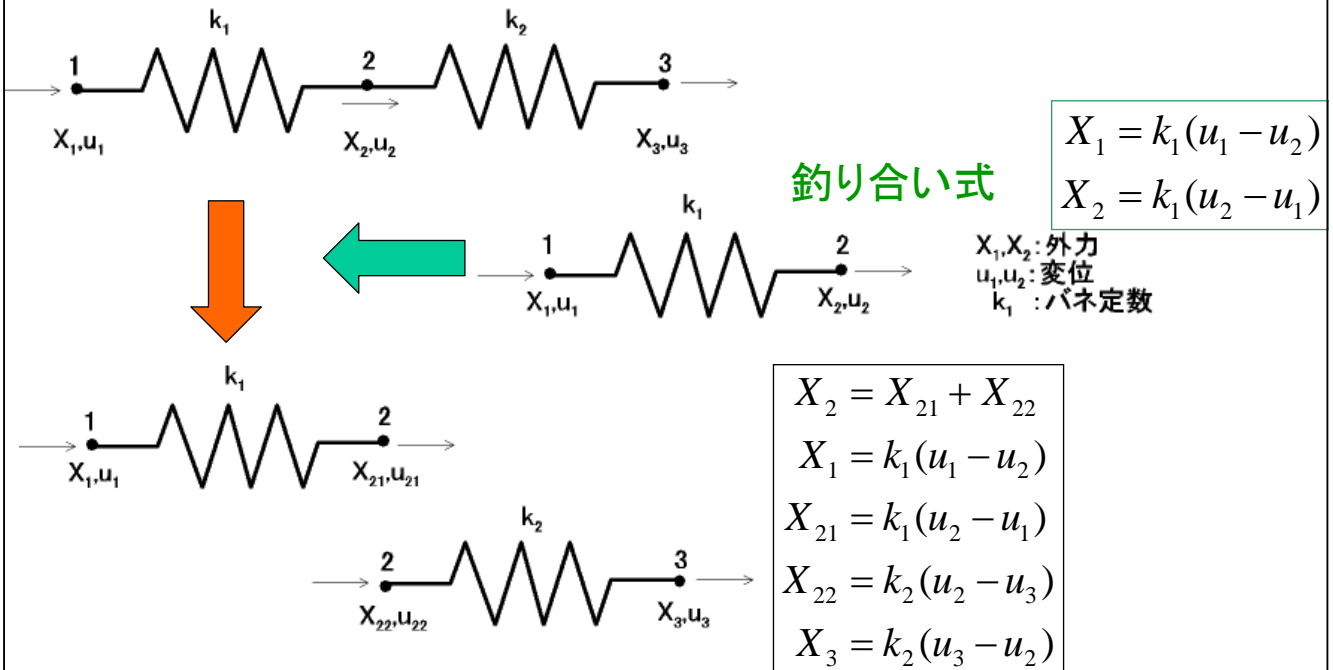
歴史的にはトラスの構造力学から発展。
 1950年代: 基礎理論の構築
 1960年代: 非線形理論の構築
 1970年代: 汎用コードの形成
 1980年代: 実問題への適用
 1990年代: 設計への組み込み

偏微分方程式記述の境界値問題が対象。
 領域の離散化が必要。
 境界の扱いが問題。
 (領域の変形, 自由表面流れ, 摩擦等)
 精度の向上, 計算効率の向上

	任意形状	非均質媒体	商用ソフト	並列化	応用数学的保証
有限要素法 (F E M)	○	○	○ (固体)	○	○
差分法 (F D M)	×	○	○ (流体)	○	×
境界要素法 (B E M)	◎	×	×	×	△

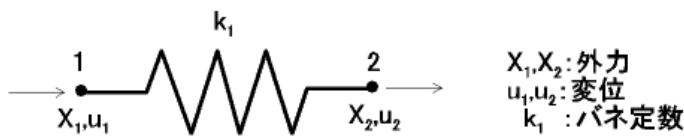
Copyright © 2004, Akira Tezuka, Process-oriented Computational Applied Mechanics Group, Advanced Manufacturing R.I., AIST

数値計算の考え方: 単純な場合に分解して、組み合わせる。
 例えば、2つの連なった異なるバネの伸び方は、1つのバネに分けて、組み合わせで解くと、得ることが出来る。



組み合わせで解くと、各部分の伸び(u_1, u_2, u_3)が求まる。

ウォーミングアップ



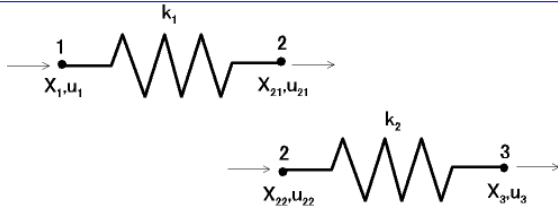
$$X_1 = k_1(u_1 - u_2)$$

$$X_2 = k_1(u_2 - u_1)$$

行列で書くと,

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

分割



バネ1

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_{21} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_{21} \\ 0 \end{bmatrix}$$

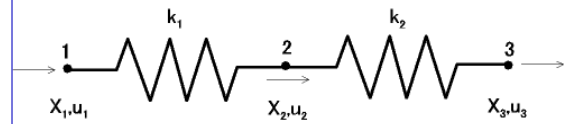
バネ2

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{22} \\ X_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ X_{22} \\ X_3 \end{bmatrix}$$

局所系行列

全体系行列

組み合わせ



$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_{21} + X_{22} (=0) \\ X_3 \end{bmatrix}$$

非正則行列

(空中に漂っているバネ)

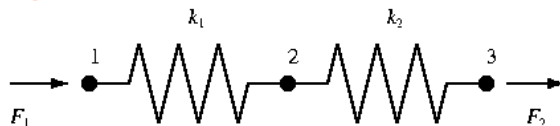
境界条件

境界条件 ($u_1=0$) を付加. 一行目左辺に未知反力

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ 0 \\ X_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 + \text{未知反力} \\ 0 \\ X_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

Copyright © 2004, Akira Tezuka, Process-oriented Computational Applied Mechanics Group, Advanced Manufacturing R.I., AIST

解析解



$$u_1 = 0 \text{ (境界条件)}$$

$$u_2 = \frac{X_3}{k_1}$$

$$u_3 = \frac{X_3}{k_1} + \frac{X_3}{k_2}$$

参考: $1/k = 1/k_1 + 1/k_2$ (合成バネ係数の公式)

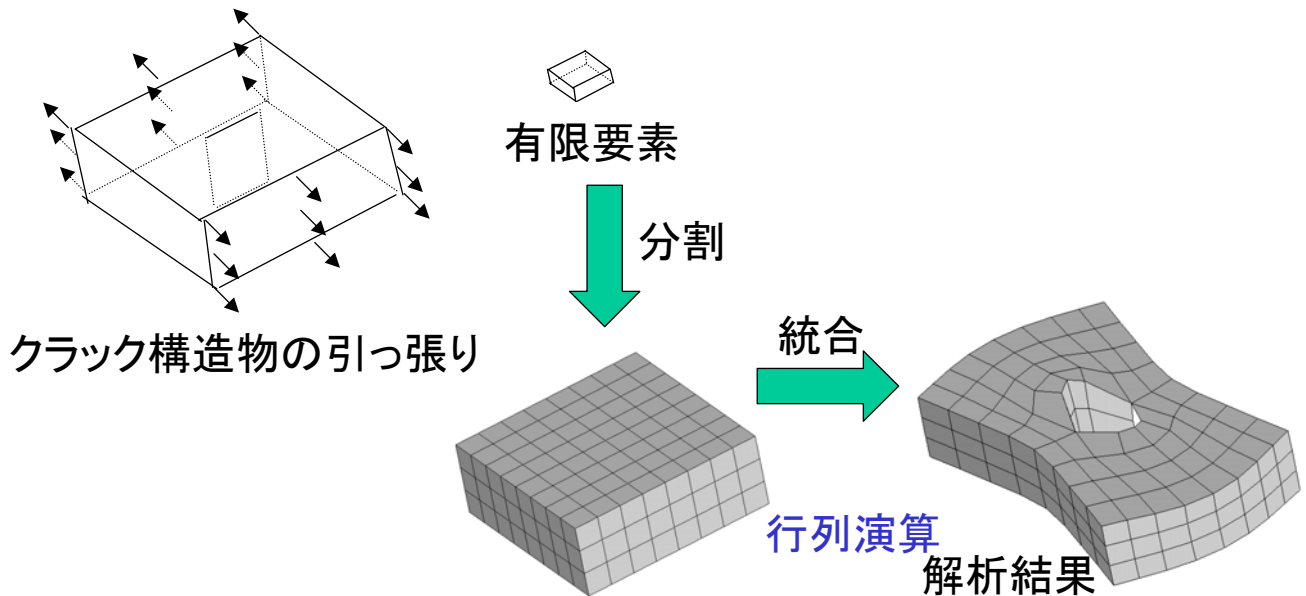
以上, まとめると,

1. 2連結バネ問題を単一バネモデルに**分割**
2. 個々の単一バネモデルで**釣り合い式**を立てる。
3. 釣り合い式を全体モデルで**組み合わせ**, **境界条件**を加味して解く

Copyright © 2004, Akira Tezuka, Process-oriented Computational Applied Mechanics Group, Advanced Manufacturing R.I., AIST

バネを一般化して、有限要素というものを考えると有限要素法。
考え方は同じ：

1. 解析領域を有限要素メッシュに**分割**
2. 個々の有限要素で**釣り合い式**を立てる。
3. 釣り合い式を全部の要素で**組み合わせ**、**境界条件**を加味して解く

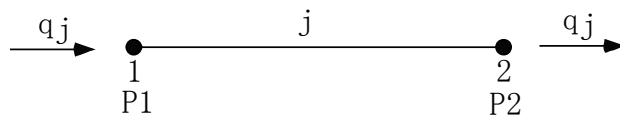
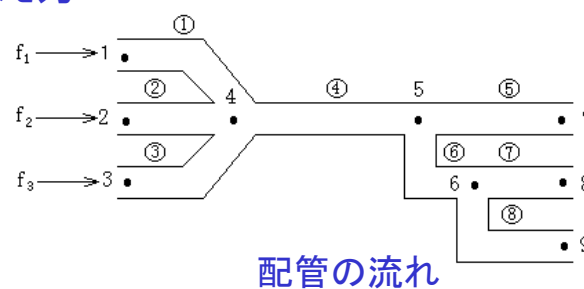


Copyright © 2004, Akira Tezuka, Process-oriented Computational Applied Mechanics Group, Advanced Manufacturing R.I., AIST

■ 有限要素法入門 ■

有限要素法入門

・基本的な考え方



単一の管での関係式

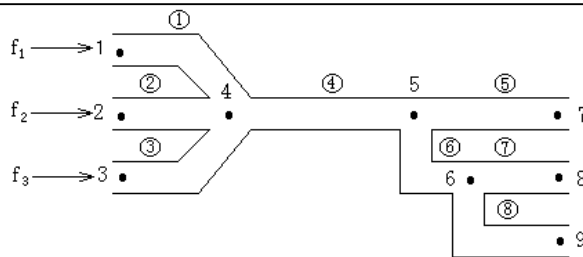
q_j : パイプjに流入する流量
P1, P2: 節点1, 2での圧力

$$q_j = k_j(p_1 - p_2)$$

$$-q_j = k_j(p_2 - p_1)$$

$$\begin{bmatrix} k_j & -k_j \\ -k_j & k_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_j \\ -q_j \end{bmatrix}$$

Copyright © 2004, Akira Tezuka, Process-oriented Computational Applied Mechanics Group, Advanced Manufacturing R.I., AIST



$$\begin{bmatrix} k_j & -k_j \\ -k_j & k_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_j \\ -q_j \end{bmatrix}$$

local matrix

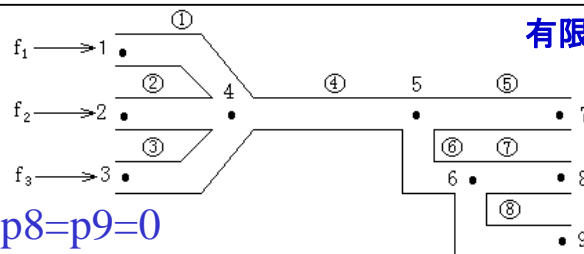
管 (要素)	管の始点の節点番号	管の終点の節点番号
1	1	4
2	2	4
3	3	4
4	4	5
5	5	7
6	5	6
7	6	8
8	6	9

管の繋がり具合

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & -k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & k_1+k_2+k_3+k_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 & k_4+k_5+k_6 & -k_6 & -k_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_6 & k_6+k_7+k_8 & 0 & -k_7 & k_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_5 & 0 & k_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_7 & 0 & k_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_8 & 0 & 0 & k_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ -q_1-q_2-q_3+q_4 \\ -q_4+q_5+q_6 \\ -q_6+q_7+q_8 \\ q_5 \\ q_7 \\ q_8 \end{bmatrix}$$

global matrix

Copyright © 2004, Akira Tezuka, Process-oriented Computational Applied Mechanics Group, Advanced Manufacturing R.I., AIST



境界条件として,

$$q_1=f_1, q_2=f_2, q_3=f_3, p_7=p_8=p_9=0$$

節点4, 5, 6への流量は0

$$(q_1+q_2+q_3-q_4=0, q_4-q_5-q_6=0, q_6-q_7-q_8=0)$$

とすると, global matrixがとける形になり,

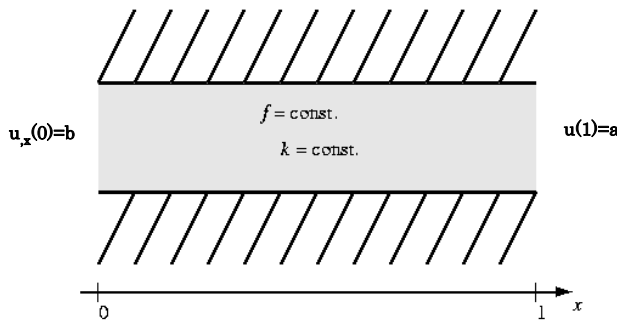
$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & -k_3 & 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & k_1+k_2+k_3+k_4 & -k_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 & k_4+k_5+k_6 & k_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_6 & k_6+k_7+k_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

要素での物理関係を表すlocal matrixを組み合わせて
global matrixを構築して, 境界条件を入れ込むのは,
有限要素法, 差分法, 境界要素法での共通事項.

Copyright © 2004, Akira Tezuka, Process-oriented Computational Applied Mechanics Group, Advanced Manufacturing R.I., AIST

・さて、有限要素法ではkはどのように定式化するか？ 有限要素法入門

→偏微分方程式に対して、kの定式化の仕方により、有限要素法、差分法の違いが出てくる。



一次元定常熱伝導問題

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -f$$

u: 温度
k: 熱伝導率
f: 熱発生率

(第一・第二)境界条件

$$u(1) = a \quad (u = a \text{ at } x = 1)$$

$$u_{,x}(0) = b \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} = b \text{ at } x = 0 \right)$$

積分して境界条件を入れると、解析解は、

$$u(x) = a + (x-1)b + \int_x^1 \left\{ \int_0^y f(z) dz \right\} dy$$

a=1, b=0.2, f=1, k=1 の時の解析解

$$u(x) = -0.5x^2 + 0.2x + 1.3$$

$$[u(0)=1.300, u(0.5)=1.275, u(1)=1.000]$$

有限要素法による定式化

有限要素法入門

・重み付き残差形

$$\int_0^1 \left(k \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + f \right) w(x) dx = 0$$

(ここでw(x)は恒等的に零ではなく、1st BC節点が0である任意の関数)

部分積分により、

$$\int_0^1 f w(x) dx + k \left. \frac{\partial u(x)}{\partial x} u(x) w(x) \right|_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial w(x)}{\partial x} k \frac{\partial u(x)}{\partial x} dx = 0$$

(ここで、w(x)の境界条件を利用すると、以下の弱形式を得る。)

・弱形式

$$\int_0^1 k \frac{\partial w(x)}{\partial x} \frac{\partial u(x)}{\partial x} dx = \int_0^1 f w(x) dx - k w(0) b$$

(ここまでは、近似はなく、連続モデルである事に注意。)

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -f$$

u: 温度
k: 熱伝導率
f: 熱発生率

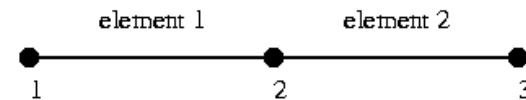
境界条件

$$u(1) = a \quad (u = a \text{ at } x = 1)$$

$$u_{,x}(0) = b \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} = b \text{ at } x = 0 \right)$$

有限要素近似モデル

有限要素を用いた近似(ここでは二つの有限要素を用いる)

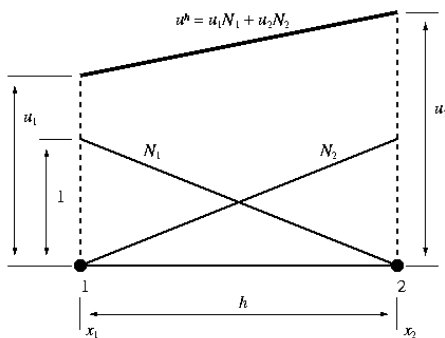


$$\int_{\text{element \#1}} k \frac{dw(x)}{dx} \frac{du(x)}{dx} dx + \int_{\text{element \#2}} k \frac{dw(x)}{dx} \frac{du(x)}{dx} dx$$

$$= \int_{\text{element \#1}} fw(x) dx + \int_{\text{element \#2}} fw(x) dx - kw(0)b$$

有限要素近似関数

要素での局所挙動を表現する近似関数(ここでは線形関数を使用)



$$u^h(x) = u_1 N_1(x) + u_2 N_2(x)$$

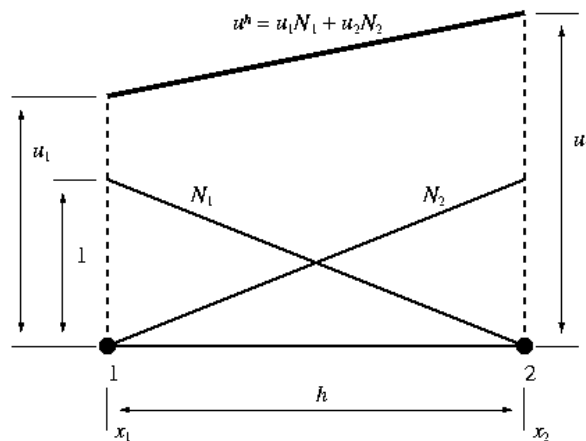
$$w^h(x) = w_1 N_1(x) + w_2 N_2(x)$$

$$\text{where } N_1(x) = \frac{x_2 - x}{h}, N_2(x) = \frac{x - x_1}{h}$$

有限要素近似関数

Copyright © 2004, Akira Tezuka, Process-oriented Computational Applied Mechanics Group, Advanced Manufacturing R.I., AIST

有限要素近似関数(行列形式で表すと)



$$u^h(x) = u_1 N_1(x) + u_2 N_2(x) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{bmatrix}$$

$$\frac{du^h(x)}{dx} = u_1 \frac{dN_1(x)}{dx} + u_2 \frac{dN_2(x)}{dx} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dN_1(x)}{dx} \\ \frac{dN_2(x)}{dx} \end{bmatrix}$$

$$w^h(x) = w_1 N_1(x) + w_2 N_2(x) = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{bmatrix}$$

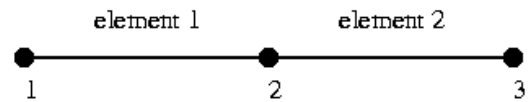
$$\frac{dw^h(x)}{dx} = w_1 \frac{dN_1(x)}{dx} + w_2 \frac{dN_2(x)}{dx} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dN_1(x)}{dx} \\ \frac{dN_2(x)}{dx} \end{bmatrix}$$

$$\text{where } N_1(x) = \frac{x_2 - x}{h}, N_2(x) = \frac{x - x_1}{h}$$

Copyright © 2004, Akira Tezuka, Process-oriented Computational Applied Mechanics Group, Advanced Manufacturing R.I., AIST

単純に前ページの弱形式に代入すると

$$\int_{\text{element \#1}} k \frac{dw^h(x)}{dx} \frac{du^h(x)}{dx} dx = \int_{\text{element \#1}} fw^h(x) dx - kw^h(0)h$$



$$\int_{\text{element \#1}} k \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dN_1(x)}{dx} \\ \frac{dN_2(x)}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dN_1(x)}{dx} & \frac{dN_2(x)}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \int_{\text{element \#1}} f \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{bmatrix} dx - k \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1(0) \\ N_2(0) \end{bmatrix} b$$

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{fh}{2} \\ \frac{fh}{2} \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} b$$

$$\int_{\text{element \#2}} k \frac{dw(x)}{dx} \frac{du(x)}{dx} dx = \int_{\text{element \#2}} fw(x) dx$$

$$\int_{\text{element \#2}} k \begin{bmatrix} w_2 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dN_1(x)}{dx} \\ \frac{dN_2(x)}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dN_1(x)}{dx} & \frac{dN_2(x)}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} w_2 & w_3 \end{bmatrix} \int_{\text{element \#2}} f \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{bmatrix} dx$$

$$\begin{bmatrix} w_2 & w_3 \end{bmatrix} \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_2 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{fh}{2} \\ \frac{fh}{2} \end{bmatrix}$$

全体マトリックスの構築

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{fh}{2} \\ \frac{fh}{2} \\ \frac{fh}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} kb \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

w3=0ゆえ

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{fh}{2} \\ \frac{fh}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} kb \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

u3=aゆえ

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{fh}{2} - kb \\ fh \end{bmatrix} - \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 0 \\ -a \end{bmatrix} \right\}$$

w1, w2は任意ゆえ

a=1, b=0.2, f=1, h=0.5, k=1とすると

$$\frac{k}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{fh}{2} - kb \\ fh \end{bmatrix} - \frac{k}{h} \begin{bmatrix} 0 \\ -a \end{bmatrix} \quad \begin{cases} u_1 = 1.300 \\ u_2 = 1.275 \end{cases}$$

この辺り、キチンと勉強するのには、例えば、

計算力学—有限要素法の基礎(日本計算工学会(編集))

著編者:竹内 則雄, 寺田 賢二郎, 檜山 和男; 出版社: 森北出版

刊行年: 2003.09; ISBN: 4627918011

装丁等: Paper; 金額: ¥3,570 (税込)

有限要素法入門

著編者:三好 俊郎; 出版社:培風館

刊行年: 1994.12; ISBN:4563034908

装丁等: Hard ; 金額: ¥3,056 (税込)

The Finite Element Method: Linear static and dynamic finite element analysis.

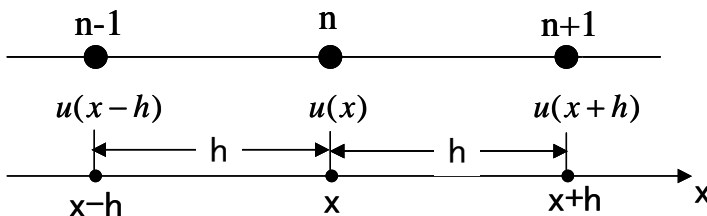
著編者: Hughes, Thomas J. R. 出版社: Dover

刊行年: 2000.06 ; ISBN: 0-486-41181-8

装丁等: Paper ; 金額: USD 26.95

Copyright © 2004, Akira Tezuka, Process-oriented Computational Applied Mechanics Group, Advanced Manufacturing R.I., AIST

■ 参考:差分法(FDM) ■



$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \approx \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}$$

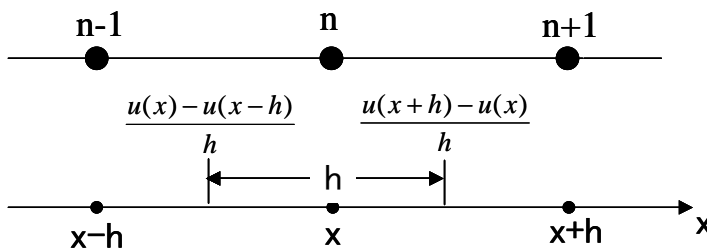
中央差分

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x) - u(x-h)}{h} \approx \frac{u(x) - u(x-h)}{h}$$

前進差分

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \approx \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

後退差分



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x+\frac{h}{2}} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x-\frac{h}{2}}}{h} \approx \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \frac{u(x) - u(x-h)}{h} = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -f$$

u: 温度

k: 熱伝導率

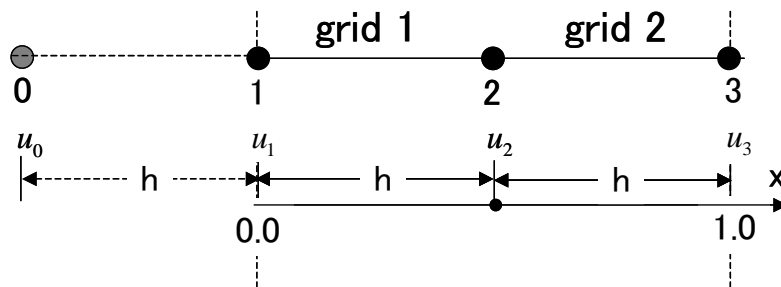
f: 熱発生率

境界条件

$$u(1) = a \quad (u = a \text{ at } x = 1)$$

$$u_{,x}(0) = b \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} = b \text{ at } x = 0 \right)$$

Copyright © 2004, Akira Tezuka, Process-oriented Computational Applied Mechanics Group, Advanced Manufacturing R.I., AIST



偏微分方程式から

$$\begin{cases} \frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{h^2} = -f \\ \frac{u_3 - 2u_2 + u_1}{h^2} = -f \end{cases}$$

境界条件から

$$\begin{cases} u_3 = a \\ \frac{u_2 - u_0}{2h} = b \end{cases}$$

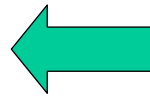
$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -f$$

u: 温度
k: 熱伝導率
f: 熱発生率

境界条件

$$u(1) = a \quad (u = a \text{ at } x = 1)$$

$$u_{,x}(0) = b \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} = b \text{ at } x = 0 \right)$$

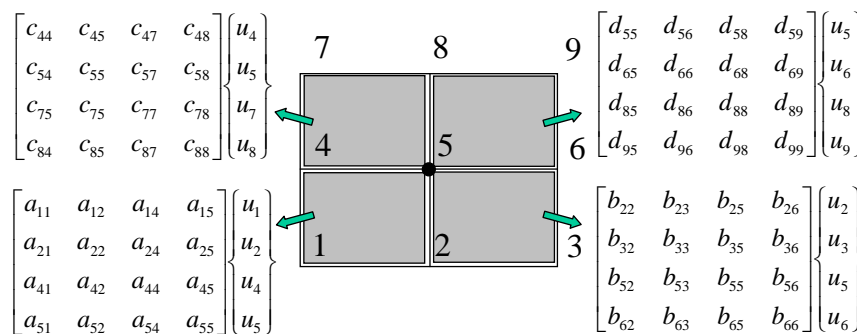


$$\begin{cases} \frac{u_2 - 2u_1 + (u_2 - 2hb)}{h^2} = -f \\ \frac{a - 2u_2 + u_1}{h^2} = -f \end{cases}$$

a=1, b=0.2, f=1, h=0.5, k=1とすると

$$\begin{cases} u_1 = 1.300 \\ u_2 = 1.275 \end{cases}$$

■ 部分/全体マトリックスのイメージ:FEM ■



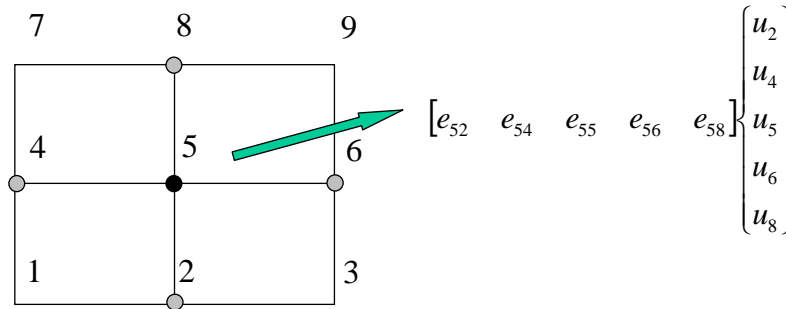
(節点5に関する)部分マトリックス



$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{14} & a_{15} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} & b_{23} & a_{24} & a_{25} + b_{25} & b_{26} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & b_{32} & b_{33} & \cdot & b_{35} & b_{36} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{41} & a_{42} & \cdot & a_{44} + c_{44} & a_{45} + c_{45} & \cdot & c_{47} & c_{48} & \cdot & \cdot \\ a_{51} & a_{52} + b_{52} & b_{53} & a_{54} + c_{54} & a_{55} + b_{55} + c_{55} + d_{55} & b_{56} + d_{56} & c_{57} & c_{58} + d_{58} & d_{59} & \cdot \\ \cdot & b_{62} & b_{63} & \cdot & b_{65} + d_{65} & b_{66} + d_{66} & \cdot & d_{68} & d_{69} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c_{74} & c_{75} & \cdot & c_{77} & c_{78} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c_{84} & c_{85} + d_{85} & d_{86} & c_{87} & c_{88} + d_{88} & d_{89} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & d_{95} & d_{96} & \cdot & d_{98} & d_{99} & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{Bmatrix}$$

(節点5に関する)全体マトリックス

■ 部分/全体マトリックスのイメージ:FDM ■



(節点5に関する)部分マトリックス

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & e_{52} & \cdot & e_{54} & e_{55} & e_{56} & \cdot & e_{58} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{Bmatrix}$$

(節点5に関する)全体マトリックス

Copyright © 2004, Akira Tezuka, Process-oriented Computational Applied Mechanics Group, Advanced Manufacturing R.I., AIST

■ 参考:等価性について ■

(詳細は, 例えば, N. Kikuchi, Finite Element Methods in Mechanics, Cambridge Univ. Press, 1986, pp.14-18を参照の事)

連立一次方程式 $\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$ について, 以下の3つは等価である.

(\mathbf{K} は正定値対称行列、 \mathbf{f} は既知ベクター、 \mathbf{u} は未知ベクター)

(Form 1) $\mathbf{Ku} - \mathbf{f} = 0$ (釣合(平衡)方程式)

(Form 2) $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{Ku} - \mathbf{f}) = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{R}^n$ (仮想仕事の原理)

(Form 3) $\mathbf{F}(\mathbf{v}) - \mathbf{F}(\mathbf{u}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ (最小ポテンシャルエネルギーの原理)

境界値問題について, 以下の3つは等価である.

(Form1を強形式, Form2を弱形式, Form3を変分形式と呼ぶ)

(Form 1) $k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -f$ in $(0,1), u(1) = a, \frac{\partial u}{\partial x}(0) = b$

(Form 2) $\int_0^1 \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} - fw \right) dx - kw(0)b = 0, \quad \forall w$ with $w(1) = 0$

(Form 3) $u(1) = a, \quad \mathbf{F}(v) \geq \mathbf{F}(u), \quad \forall v$ with $v(1) = a$

where $F(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 k \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx - \int_0^1 f v dx - kv(0)b, \forall v$ with $v(1) = a$

Copyright © 2004, Akira Tezuka, Process-oriented Computational Applied Mechanics Group, Advanced Manufacturing R.I., AIST

■ 数値解析の流れ ■

1. 現象の偏微分方程式の決定
2. モデルの決定
各種係数(材料係数, 熱伝導係数等)の決定
境界条件(外力, 固定等)の決定
3. 離散化モデルの作成
4. 手法の定式化または選択
5. プログラム作成あるいは解析ソフト選択
6. 結果の吟味

Copyright © 2004, Akira Tezuka, Process-oriented Computational Applied Mechanics Group, Advanced Manufacturing R.I., AIST

■ FEM研究の目的による分類 ■

- 1 計算効率の向上
 - 2 解析精度の向上
 - 3 解析の大規模化
 - 4 解析プロセスの省力化
 - 5 解析対象の複雑化
- (1-3は同一の内容を違う切り口から記述したもの.)

■ FEM研究の解析部分による分類 ■

- 1 メッシュ等の入力データの準備
- 2 解析手法の定式化
- 3 形状関数
- 4 数値積分
- 5 マトリックスソルバー
- 6 並列計算機のためのアルゴリズム
- 7 (非定常解析のための)時間積分
- 8 解の信頼性の同定

Copyright © 2004, Akira Tezuka, Process-oriented Computational Applied Mechanics Group, Advanced Manufacturing R.I., AIST

■ 研究課題の例 ■ (括弧内は目的別の番号)

1 自動メッシュジェネレータ, 各種メッシュレス手法(4)

2 安定化手法(2, 5)

(ガラーキン法: 重み関数と近似関数が同一. 近似関数と異なる現象依存の重み関数の導入により, 流体解析での解安定性を保証.)

マルチスケール手法(均質化法)(1, 2, 5)

(マイクロ構造の周期性の仮定の下に, ミクロ構造とマクロ構造を摂動法でリンクする事により, 複合材料やバイオティシューの解析を可能にする手法.)

3 高次関数, 精度の良い形状関数(特にシェル要素)(2)

4 選択的低減積分(1)

(積分点を低減して計算効率を向上させる方法)

5 前処理付き並列反復行列解法(1, 3)

(行列計算の前に処理をする事により, 収束に必要な反復回数を低減.)

6 element-by-element法(3)

(全体剛性行列の構築なしで並列で解析を行う手法)

7 スペースタイム法(1)

(通常: タイムステップ間で独立のメッシュについて差分近似で時間方向の積分.
スペースタイム法: 時間方向にもメッシュ分割, 粗いタイムステップでもOK.)

8 アダプティブ法(2, 4)

(数値解析解の誤差を事後推定し, それを踏まえてメッシュを改善し, より精度の良い数値解析解を得る方法)

Copyright © 2004, Akira Tezuka, Process-oriented Computational Applied Mechanics Group, Advanced Manufacturing R.I., AIST

■ メッシュ関連のフリーソフト・試用可能ソフト ■

・ Gmsh

<http://www.geuz.org/gmsh/>

(TRI/QUAD/TETRA/HEXA用の半自動メッシュ生成ソフト)

・ TETMESH (Dr. P.L.George(仏IRIA)が開発)

<http://www.simulog.fr/tetmesh/>

(NASTRAN, ANSYS, CATIA, I-DEAS, COSMOS, LS-DYNA, CUBIT, MEDINA, CASTOR, FEM-GV, FEMAP, Samcef-Field等に採用.)

・ GiD (Prof. Onateのグループが開発)

<http://gid.cimne.upc.es/>

(the personal pre and post processor. Win & UNIX.)

Copyright © 2004, Akira Tezuka, Process-oriented Computational Applied Mechanics Group, Advanced Manufacturing R.I., AIST

■FEM関連の情報■

(1) internet-FEM

<http://www.fem.gr.jp/>

(2) フリーコードの百貨店

netlib (<http://www.netlib.org/>)

例えば,

<http://www.netlib.org/slap/index.html>

(GMRES, BCG Matrix Solver. by Lawrence Livermore National Lab.)

<http://www.netlib.org/linalg/spooles/index.html>

(sparse real and complex direct matrix solver)

<http://www.netlib.org/voronoi/index.html>

(2D mesh generation, triangulation, and mesh display at X-Window)

<http://www.netlib.org/f2c/index.html>

(Convert Fortran 77 to C or C++)

(3) FEM関連情報

http://www.engr.usask.ca/~macphed/finite/fe_resources/

(4) Etc

<http://www.mech.port.ac.uk/sdalby/mbm/CTFRProg.htm>

(Binary source listed in Prof. Ross's book)

Copyright © 2004, Akira Tezuka, Process-oriented Computational Applied Mechanics Group, Advanced Manufacturing R.I., AIST

■ FEMコードの並列化には、是非、PCPを ■

<http://www.aist.go.jp/infobase/pcp/platform/index.html>

- ・逐次解析プログラムの並列化には**多大な作業時間**が必要
- ・PETSc, Aztec, GEOFEM, ADVENTURE等で研究開発された並列ソフトを自らの研究に取り込むには**並列計算のプロである必要**。

並列計算プラットフォーム(PCP)

逐次解析プログラムが数時間で並列化可能

1. ユーザから供給すべき情報
 - ・有限要素モデルデータ
 - ・要素毎の係数マトリックス作成ルーチン
2. 行列計算ルーチン
 - GMRES, BiCGSTAB(前処理:ポイントヤコビ法, 加法的シュワルツ法), バンド法
3. サブルーチンツール
 - 並列用行列インデックス作成, 各種境界条件作成
 - 必要メモリ量自動設定
4. 並列解析のための領域分割
 - グラフ生成ルーチン+MeTiSを使用

約500のダウンロード(07/04現在)
企業, 大学, 個人等, 多様なユーザー



ユーザ会風景(7/4/2002)

Copyright © 2004, Akira Tezuka, Process-oriented Computational Applied Mechanics Group, Advanced Manufacturing R.I., AIST