多体量子場の理論

柳沢　孝

1　序論

1.1　量子場の理論の発展

多体理論は自由度が無限大の質点系の量子力学であり、場の量子論によって記述される。多体論の発展の歴史は場の量子論の発展の歴史でもある。その歴史をたどってみよう。

1761　Euler Principia motus fluidorum（流体の運動の原理）
1864　Maxwell Electromagnetic field （電磁場の理論）
1900　Planck 量子仮説（12 月 14 日）
1904　Lorentz Lorentz 変換の理論
1905　Einstein Special Relativity （特殊相対性理論）
1908　Minkowski Raum und Zeit （空間と時間）
1911　Kamerlingh Onnes 超伝導の発見 Hg $T_c = 4.2$K
1915　Einstein Allgemeine Relativitästheorie（一般相対性理論）
1925　量子力学（行列力学）　Heisenberg
1926　波動力学　Schrödinger Wellenmechanik
1826　Dirac Dirac 方程式
1927　Dirac Maxwell field の第二量子化
1927　Bloch の定理
1928　Jordan-Wigner 電子場の第二量子化
1929　Heisenberg-Pauli 場の量子論
1930　場の理論における発散の困難
1932　陽電子の発見 C. D. Anderson
1933　Meissner-Ochsenfeld Meissner 効果の発見
1933　抵抗極小の発見　de Haas, de Boer, van den Berg
1934　Pauli-Weisscopf スカラー場の量子論
1934　Fermi ベータ崩壊の理論
1935　湯川 中間子論
1937　ヘリウム４超流動の発見　Kapitsa $T_c = 2.17$K
1940　Pauli スピンと統計の関係 自由場の量子論の完成
1943　Heisenberg S 行列理論
1943　朝永 超多時間理論
1945　微視的実験手段の開発　ESR、NMR、中性子散乱
1949　くりこみ理論 Tomonaga, Schwinger, Feynman, Dyson
1954　Yang-Mills 非可換ゲージ理論

1955　分散理論、解析的 S 行列の理論
1957　超伝導の解明　BCS 理論
1958　Landau フェルミ液体論
1960　第二種超伝導体の発見　Josephson 効果
1960　南部 自発的対称性の破れ
1964　クォークモデル Gell-Mann, Zwig
1964　近藤理論 抵抗極小現象の解明
1971　K. G. Wilson くりこみ群理論
1972　ヘリウム３の超流動　Osheroff, Richardson, Lee　$T_c = 2.6\text{mK}$
1973　Kosterlitz-Thouless 転移　２次元の新しい型の相転移
1974　漸近自由性 Gross, WIlczek, Politzer
1979　Anderson 局在の理論　スケーリング理論
1980　量子ホール効果
1983　STM（Scanning Tunneling Microscopy）
1986　高温超伝導体の発見　Bednorz, Muller
1995　ボース原子気体のボース · アインシュタイン凝縮　^{87}Rb
2004　フェルミ原子気体の超流動　^{40}K、^{6}Li　約 100nK

1.2　自由電子系

自由電子系は相互作用のない電子系であり、単純な金属内の伝導電子を記述するモデルである。

立方体中 $L \times L \times L$ 中の電子気体の方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = \epsilon\psi. \tag{1}$$

固有関数は平面波

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tag{2}$$

である。この波動関数が取りうる波数は境界条件から決まる。周期的境界条件

$$\psi(x+L,y,z) = \psi(x,y+L,z) = \psi(x,y,z+L) = \psi(x,y,z) \tag{3}$$

に対して、波数は

$$k_x = \frac{2\pi}{L}n_x, \quad k_y = \frac{2\pi}{L}n_y, \quad k_z = \frac{2\pi}{L}n_z. \tag{4}$$

ここで、n_x、n_y、n_z は整数。

絶対零度においては、波数空間の中でエネルギーがフェルミエネルギー以下の状態に電子が存在する。低温において、比熱 C は温度 T に比例し

$$C = 2\frac{\pi^2}{3}k_B^2\rho(\epsilon_F)T = N_e\frac{\pi^2 k_B^2}{\hbar^2 k_F^2}mT \tag{5}$$

その係数は質量に比例する。一般に、比熱の質量は電子間に相互作用があると増大する。重い電子系とよばれる一群の物質においては、自由電子系に比べて 1000 倍にもなることがある。この時、有効質量が重くなったと考えて、有効質量が 1000 倍と言う。

気体分子運動論のように、電子は気体中の分子のように金属中を動き回っているとすると、$3R/2$ の比熱が観測されると予想される。しかし、実際の比熱は非常に小さく、これは量子力学によって説明されることである。

1.3　フェルミ面とその不安定性

フェルミ面は金属を特徴づける。フェルミ面がきちっと存在する物質に対しては自由電子モデルが有効であることが多い。何らかの相互作用があるとし

て、摂動論的に波動関数への補正を考えてみよう。この時の補正は個別励起とよばれるものになり、フェルミ面を越えて電子がエネルギーの高い状態に励起されるが、波動関数の性質を変えるものにはなりにくい。すなわち、相互作用があってもフェルミ面が存在し、波動関数はフェルミ面の存在を反映したものになる。このような状態をフェルミ流体と言う。

しかしながら、フェルミ面からは無限小の励起エネルギーの励起状態が存在し、弱い摂動に対しても不安定であることがある。その例が、引力相互作用によって引き起こされる超伝導である。超伝導は引力相互作用によるフェルミ面の不安定性により引き起こされると言うことができる。波数 k に対して、$k\uparrow$、$-k\downarrow$ の電子がペアーをつくり、位相（ゲージ）不変性が破れた状態になり、超伝導ギャップができる。1 次元電子系もわずかな摂動に対してフェルミ面（点）がなくなり、ラッティンジャー流体というフェルミ流体とは異なる状態になる。また、高温超伝導体や重い電子系においては、金属中の電子がフェルミ流体とは異なる状態にあり、これを非フェルミ流体と言う。非フェルミ流体は相互作用により、個別励起ではなく何らかの集団励起により特殊な状態になっていると考えられる。

1.4 対称性の破れと連続性の原理

金属がフェルミ流体であるか、そうでないかによって大きく特徴づけられることから、二つの概念が多体系においては基本的であることがわかる。それらは

1. 対称性の破れ
2. 連続性の原理

である。P.W. Anderson はこの二つを基本にすえて本を書いた（Basic Notions of Condensed Matter Physics）。

1. 対称性の破れ

ハミトニアン H がある対称性をもつ時、その基底状態もその対称性で不変であると考えるのが普通であるが、しばしば、基底状態はハミルトニアンの対称性より低い対称性をもつことがる。この時、基底状態は対称性の破れた状態にあるという。たとえば、引力相互作用のあるハミルトニアン

$$H = \sum_{k\sigma} \epsilon_k c^\dagger_{k\sigma} c_{k\sigma} - g \sum_{kk'} c^\dagger_{k\uparrow} c^\dagger_{-k\downarrow} c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow}, \tag{6}$$

に対してはフェルミ球の状態よりも BCS の状態の方がエネルギーが低く安定である。BCS の波動関数は

$$\psi = \prod_k (u_k + v_k c^\dagger_{k\uparrow} c^\dagger_{-k\downarrow})|0\rangle \tag{7}$$

であるが、波数についての積を展開してみるとわかるように、電子数のことなる波動関数がまざっている。これは粒子数を保存していないことを意味している。出発点のハミルトニアンは粒子数を保存しているにもかかわらず、解として出て来た状態は粒子数を保存しないものになったのである。すなわち、対称性の破れが起きている。

このことに関して、近藤さんによる興味深い解説が「固体物理」『超伝導-BCS 理論は学部学生に理解できるか』（固体物理 11(1976)297）にある。

2. 連続性の原理
金属に摂動が働いても個別励起のみが励起され、対称性の破れも起こらないならば、波動関数は相互作用のない場合から連続的に摂動を受けた状態に変わっていくと考えてもいいだろう。すなわち、粒子は相互作用がない時と同じように、質量をもち電荷を持っている。ただし、質量や電荷は相互作用の効果により、くりこまれた質量や電荷となっている。粒子はくりこまれた粒子として振る舞う。この時は定性的には摂動論により物理量を計算できる。近藤効果や量子電気力学（QED）はこの例である。

2 フェルミ流体論

2.1 ランダウのフェルミ流体論

フェルミ液体論はランダウによって最初に考えられたが、凡人の理論ではないためその奥は非常に深い。釈迦の手の上を飛ぶ孫悟空のように、ランダウの手のひらの上で踊るのは簡単であるが、その前にその理論を吟味してみよう。

電子間には強い相互作用が働いているにもかかわらず、その物理的性質を自由電子系の描像で説明できることが多い。これは電子がフェルミオンであることによっている。低温においては電子は下の準位から順番にフェルミエネルギーまで詰まっており、励起できるのはフェルミエネルギー近くの電子に限られる。そのため電子は eV という大きなエネルギーをもっており、温度が少しくらい変化してもエネルギーはあまり変わらないのである。このため電子の比熱は気体分子運動論で予想されるよりも非常に小さい。金属中の

電子のエネルギーは

$$\text{フェルミエネルギー} \quad \epsilon_F \sim \mathrm{eV} \tag{8}$$

$$\text{クーロン相互作用} \quad \frac{e^2}{d} \sim \mathrm{eV} \tag{9}$$

のように非常に大きい。

それにもかかわらずフェルミ縮退した電子系では低温において

自由電子系の描像が成り立つ

ことが多い。その理由を考えてみよう。そのために電子-電子散乱による電子の寿命を評価してみる。フェルミ面の近傍の電子のみが散乱されることを考慮すると、電子の散乱確率 $W = 1/\tau$ は低温では T^2 に比例することがわかる。すなわち、

$$\frac{1}{\tau} \sim \frac{(k_B T)^2}{\epsilon_F} \ll k_B T, \tag{10}$$

となり、低温では非常に小さくなる。このため

電子はあたかも自由な電子のように振る舞う

ことになる。これが、ランダウの Fermi liquid theory の基礎になっている。

具体的なモデルに対して、電子の寿命 $1/\tau$ を計算してみよう。ハミルトニアンが次で与えられるハバードモデルを考える。

$$H = \sum_{k\sigma} \epsilon_k c^\dagger_{k\sigma} c_{k\sigma} + U \frac{1}{N} \sum_{kk'q} c^\dagger_{k-q\uparrow} c^\dagger_{k'+q\downarrow} c_{k'\downarrow} c_{k\uparrow}. \tag{11}$$

結果だけ示すと、自己エネルギーの虚部は

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\Sigma^R_k(\epsilon) &= U^2 \sum_q \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon'}{2\pi} \left(\coth\frac{\epsilon' - \epsilon}{2k_B T} - \tanh\frac{\epsilon'}{2k_B T} \right) \\ &\times \mathrm{Im}G^R_{k-q}(\epsilon') \sum_{k'} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} \left(\tanh\frac{x}{k_B T} - \tanh\frac{x + \epsilon - \epsilon'}{2k_B T} \right) \\ &\times \mathrm{Im}G^R_{k'}(x) \mathrm{Im}G^R_{k'+q}(x + \epsilon - \epsilon') \end{aligned} \tag{12}$$

Table 1: 自己エネルギー、Green 関数の極 z、抵抗 ρ の次元依存性。

次元	$\mathrm{Im}\Sigma$	$\mathrm{Re}\Sigma$	z	ρ
$d=1$	T or ϵ	$\epsilon \ln \epsilon$	$z=0$	$\propto T$
$d=2$	$T^2 \ln T$ or $\epsilon^2 \ln \epsilon$	ϵ	$z \neq 0$	$\propto T^2 \ln T$
$d=3$	T^2 or ϵ^2	ϵ	$z \neq 0$	$\propto T^2$

ここで、$G_k^R(\epsilon)$ は遅延 Green 関数である。（ノート参照）$\epsilon = 0$ として

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon' \left(\coth \frac{\epsilon'}{2k_BT} - \tanh \frac{\epsilon'}{2k_BT} \right) F(\epsilon') = F'(0)(\pi k_B T)^2 \tag{13}$$

を使うと

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\Sigma_k^R(0) &= \frac{1}{2\pi} U^2 (\pi k_B T)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2k_BT \cosh^2(x/2k_BT)} \\ &\times \sum_{k'q} \mathrm{Im}G_{k-q}^R(0) \mathrm{Im}G_{k'}^R(x) \mathrm{Im}G_{k'+q}^R(x) \end{aligned} \tag{14}$$

となる。3 次元では上の積分が定数になり、

$$\mathrm{Im}\Sigma_k^R(0) \propto T^2 \tag{15}$$

$$\mathrm{Im}\Sigma_k^R(\epsilon) \propto \epsilon^2 \quad (T=0) \tag{16}$$

となり、電子の寿命は T^2 に比例する。表 1 に次元依存性をまとめる。

参考文献

1. 高橋康、『物性研究者のための場の量子論 I,II』（培風館）.
2. 朝永振一郎、『量子力学 II』（みすず書房）.
3. A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, I. Ye Dzyaloshinski, Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics.
4. K. Nishijima, Fields and Particles (1969).
5. N. N. Bogoliubov, D. V. Shirkov, Introduction to the Theory of Quantized

Fields.
6. 西山敏之、『多体問題入門』（共立出版）.
7. C. Hodges, H. Smith and J. W. Wilkins, Phys. Rev. B34, 302 (1971).
8. P. Bloom, Phys. Rev. B12, 125 (1975).