

## ECM 法を用いた確率分布の位置, 尺度, 回転パラメータの推定法

赤穂昭太郎<sup>†</sup>

An estimation method for location, scale, and rotation parameter estimation by the ECM algorithm

Shotaro AKAHO<sup>†</sup>

あらまし 任意の形の確率分布が与えられた時に, その位置・尺度等を調整してデータにもっともあてはまるようなパラメータを推定する方法を提案する. あらかじめその確率分布を任意に必要な精度で正規混合分布で近似しておき, 対象データに対して, EM (Expectation-Maximization) 法の一つである ECM (Expectation-Conditional Maximization) 法を用いてパラメータを推定する. EM 法を用いることによって, 単調にゆう度が増加する安定した推定法が得られる. また, 一般に, 独立でないパラメータをもつ混合分布では EM 法の各繰り返しステップが複雑になってしまうが, 正規混合モデルの形に適切な制限をおき, ECM 法を併用することによって各ステップを閉じた形で求めることができる.

キーワード EM 法, 正規混合分布, 統計的学習, 統計的推定, 物体認識

## 1. はじめに

空間上に分布する与えられたデータ点の集合 (特徴ベクトル) に確率モデルをあてはめる問題は, 統計的パターン認識 [6], [8] やロバストデータ処理 [7] などのデータ解析の広い分野で用いられる一般的な問題であるが, 分布が正規分布でない場合はパラメータの推定が困難となる.

例えば, 2次元画像から特徴点を抽出し, その特徴点集合に対して物体のモデルをあてはめることによって, 画像中の物体の認識を行うことができる. ただし, 物体の形状が複雑であったり, 物体が画像内で移動・伸縮したり, さらに複数の物体が存在する場合には, 一般にあてはめは容易ではない.

本論文で扱うのは, 空間内での移動や尺度変換のパラメータをもつ確率モデルである (特に2次元の場合には回転の自由度も許す). 確率モデルを用いる理由は, モデルのあてはまりのよさをゆう度として評価することができる点とデータの欠損や物体の隠れに対してある程度頑健なことである.

移動や尺度のパラメータの推定アルゴリズムとしては, 隠れた変数をもつモデルの最ゆう推定法と

して知られている EM (Expectation-Maximization) 法 [4], [9], [12] を用いる. EM 法は Newton 法や最急降下法と同じように局所最適解に収束するアルゴリズムであるが, 勾配法に比べて次のような長所をもつ [12], [14].

(1) ゆう度が単調に増加することが保証されており, 安定な解が得られることが期待できる. また, 速度に関しても収束の初期の段階では Newton 法と同程度の速さになることが知られている.

(2) インプリメンテーションが簡単になることが多い. また, これと関係して1ステップに要する計算量が減らせる場合もある.

特に, 混合モデルでは, ゆう度無限大という不安定な解が存在する上, Newton 法で必要なゆう度の微分も複雑な形になる. そのため EM 法を用いることにより, 時間的に変化するデータに対して実時間で追従させるような課題に対しても, 少ない計算量で安定した解が得られることが期待できる. ただし, 混合モデルの形によっては EM 法の各繰り返しステップが閉じた形では得られず, 結局 Newton 法を併用しなければならなくなることもあり [5], [13], その場合には EM 法の利点が失われる可能性もある. 従って, どのような形の分布ならば閉じた形で EM 法の各ステップが得られるのか, という問題は実用上も理論上も重要な

<sup>†</sup> 電子技術総合研究所, つくば市

Electrotechnical Laboratory, Tsukuba, 305-8568 Japan

問題となる．従来，単純な正規混合モデルの EM 法に関しては種々の研究が行われて来たが，上で述べたような複雑なモデル当てはめには応用できない．

本論文では，モデルの形を特殊な形の正規混合分布モデルで近似した上で，EM 法の一つである ECM (Expectation-Conditional Maximization) 法 [10] を併用することによって，EM 法の各ステップが閉じた形で得られることを理論的に示す．正規混合モデルは十分多くの正規分布を用いればどんな複雑なモデルでも必要な精度で表現することができる [15]．

EM 法を適用するもう一つの利点は，複数のモデルあてはめ (モジュール学習) に対して自然に拡張できることである [5]．複数のモデルを単独のモデルの混合分布とみなすことにより，階層的に EM 法を適用できる．同様な手法を利用して，モデル以外に存在するばらまきノイズを一樣分布とみなして複数モデルあてはめ (一種の汚染モデル [7]) を行うと，ノイズに対してロバストな推定法が得られる．

以下では，まず最初に 2 種類の確率モデルを導入する．一つは任意の次元の位置-尺度モデル [2] であり，もう一つは物体認識など応用上重要と思われる 2 次元のモデルで位置と尺度のほかに回転のパラメータを含むモデルである．次に，これらのモデルを適当なクラスに属する正規混合分布で近似し，EM 法を用いてパラメータ推定する方法について述べる．続いて，複数の対象に対するあてはめに応用する方法について述べる．複数の対象を混合モデルでモデル化することによって階層的な EM 法を適用することになる．さらに，導かれたアルゴリズムが正しく動作することを示すための簡単な実験を行う．

## 2. 位置・尺度・回転パラメータ

あてはめの対象となるデータは  $d$  次元実空間中の  $N$  個の点集合  $\{x_{(1)}, \dots, x_{(N)}\}$  として与えられるとする．モデルは同じ空間の上の確率分布  $p(x; \theta)$  として表現されており，データに最もよくあてはまるように位置や尺度のパラメータ  $\theta$  を求めることが問題である．

以下では，EM 法の閉じた形の更新式を得るために二つのモデルを考える．一つは位置と尺度のパラメータだけをもつ場合でありこれを便宜上 Type I モデルと呼ぶことにする．もう一つは  $d = 2$  に限定した上で，位置と尺度のほかに回転のパラメータを含めた場合であり，こちらを Type II モデルと呼ぶ．

以下ではまず，任意の形の確率分布が与えられたときに，位置や尺度，回転のパラメータがどのように入るかを Type I と Type II それぞれの場合について説明し，3. 節で，与えられた確率分布を適切な正規混合モデルで近似する．

### 2.1 Type I モデル

元となるモデルの確率分布が  $f(x)$  で与えられたとしよう．各座標軸  $x_i$  方向に関する尺度パラメータ  $a_i$ ，移動パラメータを  $b_i$  とする (ただし， $a_i > 0$ )．すると，位置と尺度変換のパラメータをもつ確率モデルは

$$p_I(x; A, b) = |A|f(Ax + b), \quad (1)$$

と書くことができる．ここで，行列  $A$  は尺度に対応する

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_d \end{bmatrix}, \quad (2)$$

という対角行列で， $|A|$  は  $A$  の行列式 (この場合は対角要素の積) をあらわす．この分布は  $f(x)$  を各軸方向に伸縮，移動したものである．すべての軸の尺度パラメータが同じ値であると制限をおけば，相似形の変換だけを扱うことになり，その場合もほとんど同じに扱うことができる (具体的には本論文で得られた  $\{a_i\}$  の平均をとればよい) が，本論文では各軸が独立に伸縮してよいとして定式化する．

### 2.2 Type II モデル

物体認識などへの応用を考えた場合には，対象はモデルに対して回転している場合もある．しかしながら，一般の次元では回転パラメータの推定問題は複雑になりすぎて，アルゴリズムを簡単な形であらわすことができない．ところが，問題を 2 次元に限ると回転パラメータを含めた場合についても Type I と同様な閉じた形のアルゴリズムを導くことができる．ただし，この場合には各軸の方向の尺度パラメータは同一 (相似変換) であると制限する必要がある．

$f(x)$  に位置と尺度，および回転の変換を施してできる確率モデルは

$$p_{II}(x; H, b) = |H|f(Hx + b) \quad (3)$$

の形で書ける．ここで行列  $H$  は回転と尺度に対応する行列，

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ -h_2 & h_1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

である .

### 3. 正規混合分布による近似

前節で説明した確率モデルは任意の形の分布  $f(x)$  に基づいたものであるが, このままの形では  $A$  あるいは  $H$  と  $b$  の推定を簡単に行うことはできない . そこで,  $f(x)$  を適当な正規混合分布であらかじめ近似しておくことにする . 正規混合分布は  $f(x)$  を任意に必要な精度で近似でき [15], かつ, EM 法に基づく単純な推定アルゴリズムを導くことができる . ただし, 正規混合分布で近似したとしても  $A$  や  $H$ ,  $b$  の推定は自明ではない (5.節参照) .

#### 3.1 Type I モデルの場合

正規混合分布は正規分布の重み付きの和として定義される分布であるが, EM 法を適用するためには一般的な形をした平均と共分散をもつ正規分布ではなく, 対角行列を共分散としてもつ次のような  $k$  個の正規分布 (楕円型正規分布 [11]) の混合分布  $\hat{f}_I$  で  $f$  を近似する必要がある .

$$\hat{f}_I(x) = \sum_{j=1}^k \xi_j \phi(x; \mu_j, \Sigma_j). \quad (5)$$

ここで,  $\xi_j$  は非負の実数で  $\sum_{j=1}^k \xi_j = 1$  を満たす . また,  $\phi(x; \mu, \Sigma)$  は平均  $\mu$ , 共分散行列  $\Sigma$  の正規分布の密度関数

$$\phi(x; \mu, \Sigma) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2} \|x - \mu\|_{\Sigma^{-1}}^2\right\}}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{|\Sigma|}}, \quad (6)$$

である . ただし,

$$\|x\|_G^2 \stackrel{\text{def}}{=} x^T G x. \quad (7)$$

また,  $\Sigma_j$  は対角行列で,

$$\Sigma_j = \begin{bmatrix} \sigma_{j,1}^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_{j,d}^2 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

$k$  を十分大きくとれば, 任意の確率分布を必要な精度で近似することができる . 実際には  $k$  を大きくすると, 計算量が増加するので, 計算量と精度との兼ね合いから, モデルの設計者が適切に決める必要がある .

以下では, 上記の手続きで近似したモデルを Type I モデルと呼ぶ .

表 1 Type I モデルと Type II モデルの特徴 (尺度に関しては Type I モデルの方が自由度が高い)

Table 1 Properties of Type I and Type II models (Type I model has more freedom for scale than Type II model)

	Type I	Type II
位置/尺度		
回転	×	
次元	任意	2
近似する混合モデルの要素	楕円型正規分布	等方正規分布

#### 3.2 Type II モデルの場合

Type II モデルで, アルゴリズムを閉じた形で導くためには, 各軸の分散が等しい 2 次元正規分布 (等方正規分布) の和で近似する必要がある .

$$\hat{f}_{II}(x) = \sum_{j=1}^k \xi_j \phi(x; \mu_j, \sigma_j^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}). \quad (9)$$

$\hat{f}_{II}$  を用いても任意の確率分布  $f$  を任意の精度で近似することはできるが, 実際上  $\hat{f}_I$  に比べて必要な精度を達成するために必要となる  $k$  の数は増える可能性がある .

最後に, Type I モデルおよび Type II モデルの特徴を表 1 にまとめる . これ以上に制限を緩めると, EM アルゴリズムが閉じた形では求まらなくなってしまふ .

以下では, 上記の手続きで近似したモデルを Type II モデルと呼ぶ .

## 4. EM 法と ECM 法

### 4.1 隠れた変数と EM 法

EM 法は観測されるデータが不完全であるような問題に対して最ゆう推定を行なうための繰り返しアルゴリズムである . 本論文で扱う問題はすべて混合モデルを対象としている . つまり,  $p(x | \theta) = \sum_{z=1}^k p(x, z | \theta)$  という形で表されている . 実際に観測できるのは  $x$  であるが,  $x$  がどの分布から発生したかをあらかず  $z$  を隠れた変数と考えて,  $(x, z)$  が完全なデータであり, 我々が観測できる  $x$  はその不完全なものとみなすことにする . すると, EM 法によって簡単な推定問題に帰着されることがある .

まず, ここでは混合モデルの EM 法の一般的な定式化を述べ, 次に, 本題である Type I および Type II のモデルを仮定した場合の EM 法の繰り返しステップを具体的に与える .

EM 法では, 完全なデータの対数ゆう度の (各繰り

返しステップにおいて得られたパラメータ値での) 条件付き期待値を計算し, それを最大化する. すなわち, 現時点でのパラメータの値を  $\theta^{(t)}$  としたときに,

$$Q(\theta) = \left\langle \sum_{z=1}^k p(z | \mathbf{x}; \theta^{(t)}) \log p(\mathbf{x}, z; \theta) \right\rangle_{\rho} \quad (10)$$

を計算し,  $Q(\theta)$  を最大にするような  $\theta$  を見つけて次のステップでのパラメータの値  $\theta^{(t+1)}$  におく. ここで,  $\langle \cdot \rangle_{\rho}$  は重み付きのサンプル平均を表し, 例えば関数  $F(\mathbf{x})$  の平均は

$$\langle F(\mathbf{x}) \rangle_{\rho} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{n=1}^N F(\mathbf{x}_{(n)}) \rho(\mathbf{x}_{(n)})}{\sum_{n=1}^N \rho(\mathbf{x}_{(n)})} \quad (11)$$

で与えられる. ただし,  $\mathbf{x}_{(n)}$  は  $n$  番目のサンプルを表し,  $\rho(\mathbf{x}_{(n)})$  は  $\mathbf{x}_{(n)}$  に対する重みであって, 単独でモデルをあてはめる場合には  $\rho(\mathbf{x}_{(n)}) = 1/N$  にとるが, 後で見るように, 複数の対象に対する当てはめを考える場合には異なる重みを用いる必要がある.

#### 4.2 ECM 法

ECM 法 [10] は EM 法の一種で,  $Q(\theta)$  の最大化をすべての変数に対して同時に行うのではなく, いくつかの変数のまとまり毎に分けて最適化を行う手法であり, 変数の同時最適化が難しい最適化問題においてしばしば用いられる coordinate descent 法 [16] の一種である. 一般に最適化問題では軸ごとに最適化を行っても, 被最適化関数の単調増加性は維持されており, さらに, EM 法では  $Q(\theta)$  が単調増加しさえすればゆう度が単調増加することが示せるので, ゆう度の単調増加性という EM 法の特徴は保たれている.

本論文では, 尺度・回転パラメータと位置パラメータをそれぞれ順番に最適化することによって, 閉じた形のアルゴリズムを導く.

#### 4.3 Type I モデルの場合

モデルを構成するどの正規分布からデータが発生したかという値  $z$  を隠れた変数としたときに,  $\mathbf{x}, z$  の同時分布は

$$p_{\text{I}}(\mathbf{x}, z; A, \mathbf{b}) = \frac{|A| \xi_z}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{|\Sigma_z|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \|\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} - \boldsymbol{\mu}_z\|_{\Sigma_z^{-1}}^2 \right\} \quad (12)$$

となる. EM 法では条件付き期待値の計算のために, まず次の条件付き確率を各サンプルごとに計算すること

が必要となる.

$$\begin{aligned} q_{1z}^{(t)}(\mathbf{x}) &= p_{\text{I}}(z | \mathbf{x}; A^{(t)}, \mathbf{b}^{(t)}) \\ &= \frac{p_{\text{I}}(\mathbf{x}, z; A^{(t)}, \mathbf{b}^{(t)})}{\sum_{j=1}^k p_{\text{I}}(\mathbf{x}, j; A^{(t)}, \mathbf{b}^{(t)})}. \end{aligned} \quad (13)$$

この値は各繰り返しステップでのパラメータの値から, 計算可能な式である.

前節で示した EM 法の定義では各ステップにおいて,  $Q(\theta)$  を最大にするような  $\theta$  を求めるとしたが, この場合には最適化問題が複雑で陽に解くことができない. そこで ECM 法を採用し,  $A$  と  $\mathbf{b}$  のそれぞれを順番に最適化することにする. ECM 法の各ステップの導出の詳細は 付録 1, 2 にまとめることにし, ここでは結果だけを述べる.

まず,  $\mathbf{b} = \mathbf{b}^{(t)}$  に固定して,  $A^{(t+1)}$  を最適化すると,

$$a_i^{(t+1)} = \frac{\sqrt{(Y_{1i})^2 + 4X_{1i}Z_1} - Y_{1i}}{2X_{1i}} \quad (14)$$

が得られる. ここで  $X_{1i}, Y_{1i}, Z_1$  はそれぞれ次のように計算される統計量である.

$$X_{1i} = \left\langle x_i^2 \sum_{j=1}^k \frac{q_{1j}^{(t)}(\mathbf{x})}{\sigma_{j,i}^2} \right\rangle_{\rho}, \quad (15)$$

$$Y_{1i} = \left\langle x_i \sum_{j=1}^k \frac{(b_i^{(t)} - \mu_{j,i}) q_{1j}^{(t)}(\mathbf{x})}{\sigma_{j,i}^2} \right\rangle_{\rho}, \quad (16)$$

$$Z_1 = \left\langle \sum_{j=1}^k q_{1j}^{(t)}(\mathbf{x}) \right\rangle_{\rho}. \quad (17)$$

次に, 得られた  $A^{(t+1)}$  を用いて,  $\mathbf{b}^{(t+1)}$  を求める.

$$b_i^{(t+1)} = \frac{U_{1i}}{V_{1i}} \quad (18)$$

ここで  $U_{1i}, V_{1i}$  は次のように計算される統計量である.

$$U_{1i} = \left\langle \sum_{j=1}^k \frac{(\mu_{j,i} - a_i^{(t+1)}) x_i q_{1j}^{(t)}(\mathbf{x})}{\sigma_{j,i}^2} \right\rangle_{\rho} \quad (19)$$

$$V_{1i} = \left\langle \sum_{j=1}^k \frac{q_{1j}^{(t)}(\mathbf{x})}{\sigma_{j,i}^2} \right\rangle_{\rho} \quad (20)$$

ここでは最初に  $\mathbf{b}$  を固定したが,  $A$  を先にしてもよい.

#### 4.4 Type II モデルの場合

Type II モデルでも同様に  $z$  を導入すると,  $x, z$  の同時分布は

$$p_{\Pi}(x, z; H, \mathbf{b}) = \frac{(h_1^2 + h_2^2)\xi_z}{(2\pi\sigma_z^2)} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_z^2} \{ (h_1x_1 + h_2x_2 - \mu_{z,1} + b_1)^2 + (-h_2x_1 + h_1x_2 - \mu_{z,2} + b_2)^2 \} \right] \quad (21)$$

とあらわされる.

EM 法を行うために必要な条件付き確率は

$$q_{\Pi z}^{(t)}(\mathbf{x}) = p_{\Pi}(z | \mathbf{x}; H^{(t)}, \mathbf{b}^{(t)}) = \frac{p_{\Pi}(\mathbf{x}, z; H^{(t)}, \mathbf{b}^{(t)})}{\sum_{j=1}^k p_{\Pi}(\mathbf{x}, j; H^{(t)}, \mathbf{b}^{(t)})} \quad (22)$$

で計算することができる.

Type II の場合も  $H$  と  $\mathbf{b}$  を同時に最適化することは困難であるので, まず,  $\mathbf{b} = \mathbf{b}^{(t)}$  を固定し,  $H^{(t+1)}$  を求める. すると,

$$h_1^{(t+1)} = \frac{Y_{\Pi 1}(1 + \sqrt{1 + \frac{8Z_{\Pi}X_{\Pi}}{Y_{\Pi 1}^2 + Y_{\Pi 2}^2}})}{2X_{\Pi}} \quad (23)$$

$$h_2^{(t+1)} = \frac{Y_{\Pi 2}}{Y_{\Pi 1}} h_1^{(t+1)} \quad (24)$$

が得られる.

ここで  $X_{\Pi}, Y_{\Pi 1}, Y_{\Pi 2}, Z_{\Pi}$  はそれぞれ, 次のように計算される統計量である.

$$X_{\Pi} = \left\langle (x_1^2 + x_2^2) \sum_{j=1}^k \frac{q_{\Pi j}^{(t)}(\mathbf{x})}{\sigma_j^2} \right\rangle_{\rho}, \quad (25)$$

$$Y_{\Pi 1} = \left\langle \sum_{j=1}^k \frac{q_{\Pi j}^{(t)}(\mathbf{x})}{\sigma_{j,i}^2} \left\{ (\mu_{j,1} - b_1^{(t)})x_1 + (\mu_{j,2} - b_2^{(t)})x_2 \right\} \right\rangle_{\rho}, \quad (26)$$

$$Y_{\Pi 2} = \left\langle \sum_{j=1}^k \frac{q_{\Pi j}^{(t)}(\mathbf{x})}{\sigma_{j,i}^2} \left\{ (\mu_{j,1} - b_1^{(t)})x_2 - (\mu_{j,2} - b_2^{(t)})x_1 \right\} \right\rangle_{\rho}, \quad (27)$$

$$Z_{\Pi} = \left\langle \sum_{j=1}^k q_{\Pi j}^{(t)}(\mathbf{x}) \right\rangle_{\rho}. \quad (28)$$

次に  $H = H^{(t+1)}$  を固定して  $\mathbf{b}^{(t+1)}$  を求める.

$$b_1^{(t+1)} = \frac{U_{\Pi 1}}{V_{\Pi}} \quad (29)$$

$$b_2^{(t+1)} = \frac{U_{\Pi 2}}{V_{\Pi}} \quad (30)$$

ここで  $U_{\Pi 1}, U_{\Pi 2}, V_{\Pi}$  はそれぞれ次のように計算される統計量である.

$$U_{\Pi 1} = \left\langle \sum_{j=1}^k \frac{q_{\Pi j}^{(t)}(\mathbf{x})}{\sigma_j^2} \left\{ \mu_{j,1} - (h_1^{(t+1)}x_1 + h_2^{(t+1)}x_2) \right\} \right\rangle_{\rho}, \quad (31)$$

$$U_{\Pi 2} = \left\langle \sum_{j=1}^k \frac{q_{\Pi j}^{(t)}(\mathbf{x})}{\sigma_j^2} \left\{ \mu_{j,2} - (h_1^{(t+1)}x_2 - h_2^{(t+1)}x_1) \right\} \right\rangle_{\rho}, \quad (32)$$

$$V_{\Pi} = \left\langle \sum_{j=1}^k \frac{q_{\Pi j}^{(t)}(\mathbf{x})}{\sigma_j^2} \right\rangle_{\rho}. \quad (33)$$

#### 5. 複数の対象に対するあてはめについて

Type I や Type II の尺度や回転のパラメータ推定の問題が自明でない一つの理由は, 混合分布で表現されているパラメータがそれぞれの正規分布の間で従属関係にあることである [1], [3]. つまり,  $A$  や  $H$  あるいは  $\mathbf{b}$  といったパラメータは混合分布を構成するすべての正規分布に含まれている. 一方, 単純な正規混合分布のパラメータ推定や複数の対象に対するあてはめの問題は Type I や Type II の場合と異なり, 独立な分布を混合したものと考えられるから推定そのものは易くなる. この場合のパラメータ推定法は既によく知られているのでここでは結果だけをまとめる.

独立なパラメータを持つ  $k$  個のモデル  $p_1(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}_1), \dots, p_k(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}_k)$  があつたときに, その混合分布

$$p(\mathbf{x}; \zeta, \boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_k) = \sum_{j=1}^k \zeta_j p_j(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}_j) \quad (34)$$

のパラメータ  $\zeta_j, \theta_j$  を与えられたサンプル集合に対して求めることが問題である。  $p_j(x; \theta_j)$  は Type I や Type II など任意のモデルである。 適当な形の正規混合分布にとれば  $f(x)$  を  $\hat{f}_I$  や  $\hat{f}_{II}$  で近似する問題にも適用できる。

さて、この問題に対する EM 法は次のように与えられる。 くり返しステップ  $t$  でのパラメータの値を  $\zeta_j^{(t)}, \theta_j^{(t)}$  とおくと、まず各構成モデルの条件つき確率が定義により

$$q_j^{(t)}(x) = \frac{\zeta_j^{(t)} p_j(x; \theta_j^{(t)})}{p(x; \zeta_1^{(t)}, \theta_1^{(t)}, \dots, \theta_k^{(t)})} \quad (35)$$

のように計算される。 これを使って、  $\zeta_j^{(t+1)}$  は

$$\zeta_j^{(t+1)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_j^{(t)}(x_{(i)}) \quad (36)$$

で与えられ、  $\theta_j^{(t+1)}$  については  $j$  番目の構成モデルに対し、(11) 式の重みを

$$\rho(x_{(n)}) = q_j^{(t)}(x_{(n)}) \quad (37)$$

とにおいてパラメータの推定を行なう。 構成モデルが正規分布のときは  $\rho(x_{(i)})$  で重み付けられた平均と共分散行列の推定となる。

この手法は、複数の対象がある場合だけでなく、ばらまきノイズを一様分布としてモデル化すれば、雑音に強いロバストな推定を行うことができる。 一様分布の定義域は、例えば、データ点をすべて含む領域を適当に設定すればよい(次節の実験ではすべて矩形領域)。

また、データが領域の外にはみ出ているような場合も、はみ出している部分のデータを欠測値とした EM 法を適用することができるが示されている [2]。

## 6. 実験

本論文で示したアルゴリズムが動作することを確認するための実験を人工データ、および、単純な実画像に対して行なった。

### 6.1 人工データ

Type I, Type II のそれぞれのモデルに対し、まず最初に単純に単独のモデルを用いて推定がうまく行えるかどうかを見た。 続いて、複数個のモデル(ここでは 2 個の物体モデルとばらまきノイズの計 3 個のモデル)をあてはめる場合に提案手法がどのように振る舞うかを見るための実験を行った。

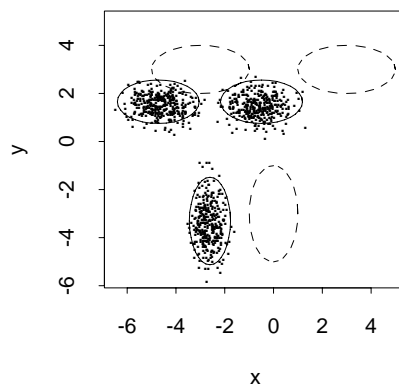


図1 Type I モデル(単独)の実験結果  
Fig. 1 Experiment result of Type I model(single)

単独、複数それぞれの場合について、まず適当なモデルを人工的に作り、そのモデルから 1000 個のランダムサンプルを発生させる。 そのサンプルをあてはめの対象データとし、サンプルを発生させたモデルとは異なる位置・尺度(・回転)パラメータをもつモデルを初期解として本論文で述べたアルゴリズムを適用した。

Type I モデルの実験には 3 つの 2 次元楕円型正規分布の混合分布で定義されるモデルを用いた。

図 1 は Type I モデルを単独で用いた場合の結果である。 点で示されているのがあてはめの対象データであり、破線で示されているのが初期解、実線で示されているのが ECM 法を 10 ステップ繰り返した結果である。 それぞれの楕円はモデルを構成する正規分布の  $x^2/\sigma_x^2 + y^2/\sigma_y^2 = 2.0^2$  なる確率密度等高線であり、この楕円内の確率測度は約 0.86 である。

図 2 は 10 ステップまでの平均対数ゆう度の変化をプロットしたグラフで、破線がサンプルを発生させた分布(真の分布)に関する平均対数ゆう度である。 有限サンプルによるバイアスを除けば、理想的にはアルゴリズムにより破線に近づく程望ましいことになる。

図 3 は単独で用いたのと同じモデルを 2 個組み合わせ(位置・尺度パラメータは異なる)モデルを作成し、ECM 法を 20 ステップ繰り返した結果である。 ノイズに対する影響を見るために、全体に一様分布によりばらまきノイズを加えた。 図 4 は平均対数ゆう度のプロットである。

Type II モデルの実験には 4 つの 2 次元等方正規分布の混合分布で定義されるモデルを用いた。

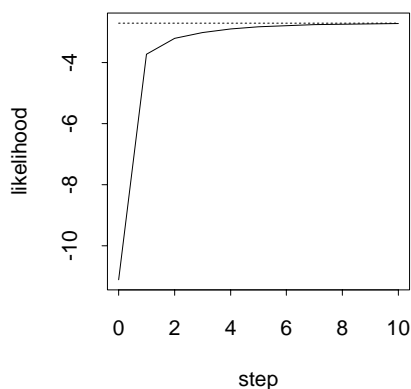


図2 Type I モデルの平均対数尤度 (単独, 点線:真のモデルのゆう度)  
 Fig.2 The log likelihood of Type I model fitting(single; dash line: the likelihood of the true model)

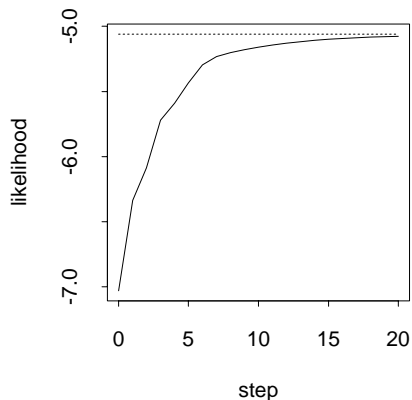


図4 Type I モデルの平均対数尤度 (複数, 点線:真のモデルのゆう度)  
 Fig.4 The log likelihood of Type I model fitting(multiple; dash line: the likelihood of the true model)

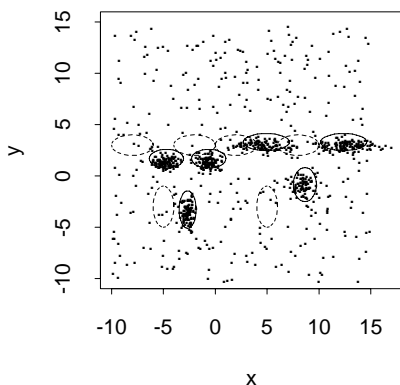


図3 Type I モデル (複数) の実験結果  
 Fig.3 Experiment result of Type I model(multiple)

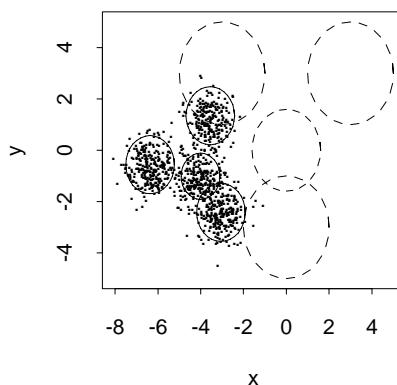


図5 Type II モデル (単独) の実験結果  
 Fig.5 Experiment result of Type II model(single)

図5, 6はこのモデルを単独であてはめたとき (10ステップ) の結果および平均対数ゆう度のプロットであり, 図7, 8は複数 (2個) の Type II モデルとばらまきノイズに対してあてはめたとき (30ステップ) の結果および平均対数ゆう度のプロットである.

Type I モデルよりも Type II モデルの方が収束に時間がかかっており, 複数物体の実験では単独であてはめるよりも時間がかかっている.

## 6.2 実画像

ここでは, 簡単な実画像データについて Type II

モデルを用いた複数物体認識を行った結果を述べる. Type II モデルを用いた理由は, 2次元画像上の物体という対象の特性と, Type I モデルよりも推定が困難であることからより厳しい評価を行えると考えたからである.

### 6.2.1 画像取り込み

まず, 図9の対象画像および, その構成要素のうち, 物体1(ステーブラー)と物体2(テープホルダー)をそれぞれ別々にデジタルカメラで撮影し (背景は同じ薄い灰色), フルカラーで計算機に取り込んだ. 物体画像

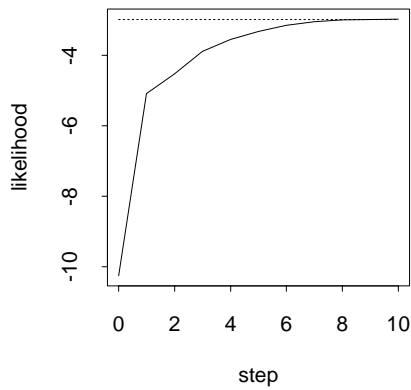


図6 Type II モデルの平均対数尤度 (単独, 点線: 真のモデルのゆう度)

Fig. 6 The log likelihood of Type II model fitting (single; dash line: the likelihood of the true model)

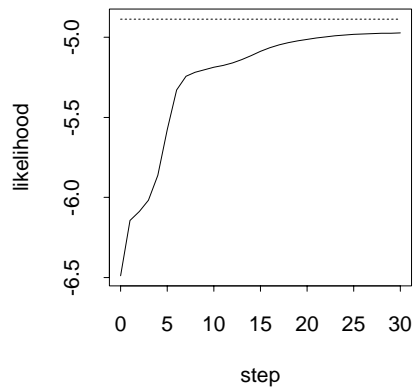


図8 Type II モデルの平均対数尤度 (複数, 点線: 真のモデルのゆう度)

Fig. 8 The log likelihood of Type II model fitting (multiple; dash line: the likelihood of the true model)

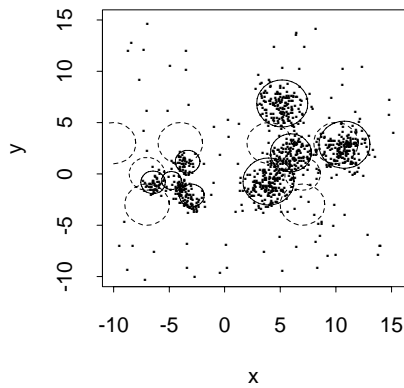


図7 Type II モデル (複数) の実験結果  
Fig. 7 Experiment result of Type II model (multiple)

については, 物体を含んでいる部分の矩形領域の切り出しを行った。また, 画像中の物体の色のついていいる部分はすべて青い色である。もう一つの構成要素 (ペン) はあてはめにおけるノイズとしての役割を果たす。

次に, 対象画像と二つの物体画像をそれぞれ,  $128 \times 96$ ,  $64 \times 32$ ,  $64 \times 41$  の大きさに解像度を落した。

### 6.2.2 特徴抽出

特徴抽出手法として, 単純な色判別フィルタによる方法を行った。以下に具体的手順を示す。

対象画像の画素値データ (RGB 3 次元  $\times$  画素数) を



図9 対象画像 (実際はカラー画像)  
Fig. 9 Captured image (original is a color image)

一つのクラス A とし, 2 個の物体画像の画素値データをもう一つのクラス B として, 2 値化のための判別分析を行った。物体画像中, クラス B に判別された画素点集合を, 本論文で提案するアルゴリズムを適用するための物体モデルを求めるための特徴点とした。それぞれ図 10, 11 上に点で示す。

また, 対象画像中で, クラス B に判別された画素点集合を, アルゴリズムを適用する特徴点とした。それを図 12 上に点で示す。

### 6.2.3 物体モデルの学習

5 節で述べた方法に基づいて, 等方的な正規分布の混合モデルを学習させ, 物体モデルとした。正規分布の個数は近似精度と計算量から勘案して 8 個とした。



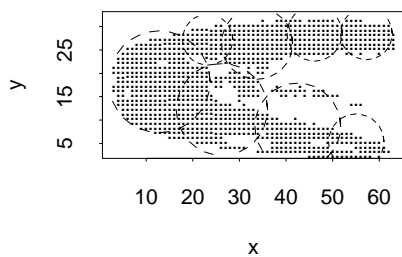


図 10 物体画像 1 (ステープラー) の 2 値化データと, 作成した Type II モデル (8 個の正規分布の混合分布)

Fig. 10 Binary scatter plot of template 1 (stapler) and the created model of Type II (mixture of 8 Gaussian distributions)

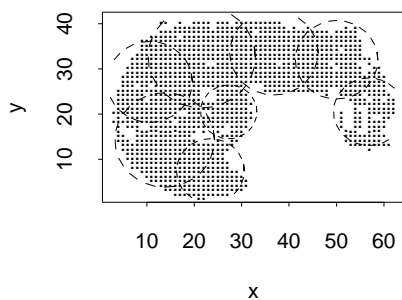


図 11 物体画像 2 (テープホルダー) の 2 値化データと, 作成した Type II モデル (8 個の正規分布の混合分布)

Fig. 11 Binary scatter plot of template 2 (tape dispenser) and the created model of Type I (mixture of 8 Gaussian distributions)

その結果を図 10, 11 上の点線の円で示す. 学習は確実に収束させるため 30 ステップ繰り返した.

#### 6.2.4 実験結果

作成した 2 個の物体モデルとノイズのための一様分布との 3 個の分布の混合モデルを対象画像から抽出した特徴点に対してアルゴリズムを適用した.

図 12 に初期解を示す. 100 ステップ程度で概ね収束が完了し, 図 13 に示されるような解に収束した. 対数尤度は図 14 のように変化した.

## 7. 考察

提案手法は EM 法に基づく手法であるため, 実験においても初期解によっては (最適ではない) 局所解に収束することがあった. 定性的には, Type I より

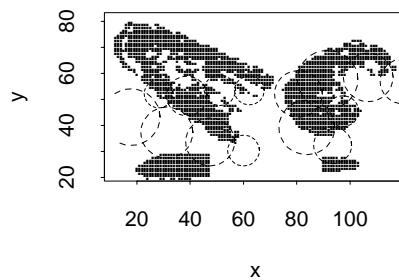


図 12 対象画像の 2 値化データと, EM 法の初期解  
Fig. 12 Binary scatter plot of captured image and the initial solution of the EM algorithm

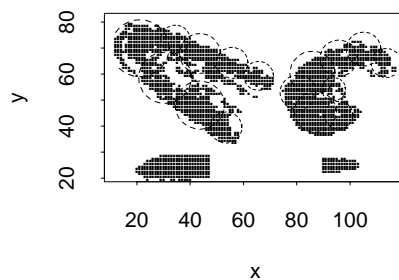


図 13 実画像データに対する Type II モデルの 100 ステップ後の解  
Fig. 13 Solution after 100 EM steps

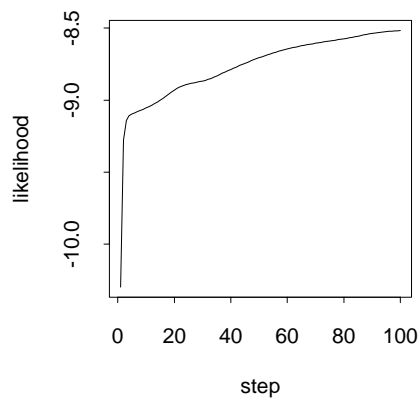


図 14 実画像データに対する Type II モデルの対数尤度  
Fig. 14 The log likelihood of Type II model for the real image

も Type II の方が, 局所解に収束しやすく, 複数モデ

ルのあてはめの場合には、初期解とデータ点との重なりが少ない程、また、構成するモデルの数が増える程、真の解への収束する比率が下がる傾向にある。また、実画像においては2個の異なる物体モデルをあてはめたが、初期値として、それぞれの対象に誤った物体モデルを置いてしまうと、その間違っただけに収束してしまう傾向がある（これは一面では欠損値や隠れに対する強さをも示すものである）。それらの問題に比べればノイズなどに対する影響は、比較的少なかった。

さて、本論文で提案したアルゴリズムの計算量は、EM法の1ステップあたり $O(dNk)$ で与えられる（単独モデルをあてはめる場合）。条件付き確率の計算が計算時間の主要な部分を占めている。より精度の高い推定を行なおうとすれば特徴点の数 $N$ を大きくする必要があり、複雑なモデルを精度良くあてはめようとすると $k$ が大きくなる。しかしながら、初期解ではもともとあてはめの精度はよくないのだから、EM法の初期のステップではサンプルを間引いたり、モデルを少ない正規分布でおおまかに近似し、近似精度がよくなってからモデルを詳細化することによって全体の計算量を減らすことができる。また、モデルを複雑にする程局所解の数も増えると考えられるから、その観点からもそうした段階的詳細化は意味がある。

また、実験結果は、多くの場合、最初の数ステップでかなり収束し、最適解の近くでは非常に遅くなるという傾向を示している。これは、EM法は一次収束のアルゴリズムであるが、二次収束アルゴリズムの近似にもなっているという事実に合致するものである。最適解の近くでの収束性を改善させるためには、ある程度収束した時点で二次収束のアルゴリズムを併用することも考えられる。

## 8. む す び

複雑な形の確率分布の位置・尺度（・回転）パラメータのECM法に基づく推定法を提案した。一般に、独立でないパラメータをもつ混合分布ではEM法の各ステップが複雑になるが、限定された形の正規混合分布を用いることと、ECM法の採用によって、2次方程式を解く問題に帰着され、閉じた形のアルゴリズムが導かれた。

EM法を基礎としているため、比較的高速で安定した解が得られるという特徴をもつ一方で、局所最適解への収束、複数モデルのあてはめにおいて個数が決まっている必要があることなどの問題点も持っており、

適用に際してはこれらの点に注意する必要がある。

本論文では応用の一つとして、画像中の物体認識への簡単な実験結果を示した。文字認識などより実際の物体認識に関する実験やそれ以外の応用分野への適用は今後の課題として残されている。

## 文 献

- [1] 赤穂昭太郎: EM アルゴリズムの幾何学. 情報処理, Vol. 37, No. 1, pp. 43-51, 1996.
- [2] Akaho, S.: The EM algorithm for multiple object recognition. In *Proc. of ICNN'95*, pp. 2426-2431, Perth, 1995.
- [3] Amari, S.: Information geometry of the EM and em algorithms for neural networks. *Neural Networks*, Vol. 8, No. 9, pp. 1379-1408, 1995.
- [4] Dempster, A., Laird, N., and Rubin, D.: Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *J. Roy. Statist. Soc. B*, Vol. 39, pp. 1-38, 1977.
- [5] Jordan, M. I. and Jacobs, R. A.: Hierarchical mixtures of experts and the EM algorithm. *Neural Computation*, Vol. 6, pp. 181-214, 1994.
- [6] 浜本義彦: パターン認識に関する最近の動向. 信学誌, Vol. 77, No. 8, pp. 853-864, 1994.
- [7] Huber, P.: *Robust Statistics*, Wiley, 1981.
- [8] 石井 他: わかりやすいパターン認識. オーム社, 1998.
- [9] McLachlan, G. J. and Krishnan, T.: *The EM Algorithm and Extensions*, John Wiley & Sons, 1997.
- [10] Meng, X. L. and Rubin, D. B.: Maximum likelihood estimation via the ECM algorithm: a general framework. *Biometrika*, Vol. 80, pp. 267-278, 1993.
- [11] Patel, J. K. and Read C. B.: *Handbook of the Normal Distribution, Second Edition*, Marcel Dekker, 1996.
- [12] Redner, R. and Walker, H.: Mixture densities, maximum likelihood and the EM algorithm. *SIAM Review*, Vol. 26, pp. 195-239, 1984.
- [13] Revow, M., Williams, C., and Hinton, G.: Using generative models for handwritten digit recognition, *IEEE Trans. on PAMI*, Vol. 18, pp. 592-606, 1996.
- [14] Tanner, M. A.: *Tools for Statistical Inference: Methods for the Exploration of Posterior Distributions and Likelihood Functions*. Springer-Verlag, 1993.
- [15] Tapia, R. A. and Thompson, J. R.: *Nonparametric Probability Density Estimation*, Johns Hopkins Univ. Press, 1978.
- [16] Ziskind, I. and Wax, M.: Maximum Likelihood Localization of Multiple Sources by Alternating Projection *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 36, No. 10, pp. 1553-1560, 1988.

付 録

1. Type I モデルの EM 法の導出

関数  $Q$  は

$$Q_I(A, \mathbf{b}) = \left\langle \sum_{z=1}^k q_{1z}^{(t)}(\mathbf{x}) \log p_I(\mathbf{x}, z; A, \mathbf{b}) \right\rangle_{\rho} \quad (\text{A}\cdot 1)$$

で与えられるので, これをまず,  $\mathbf{b} = \mathbf{b}^{(t)}$  に固定して  $A$  を求める.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial a_i} Q_I(A, \mathbf{b}^{(t)}) \\ &= \left\langle \sum_{z=1}^k \left[ \frac{1}{a_i} - \frac{x_i(a_i x_i + b_i^{(t)} - \mu_{z,i})}{\sigma_{z,i}^2} \right] q_{1z}^{(t)}(\mathbf{x}) \right\rangle_{\rho} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 2)$$

を整理すると

$$\frac{1}{a_i} Z_I - a_i X_{Ii} - Y_{Ii} = 0 \quad (\text{A}\cdot 3)$$

となる. ただし,  $X_{Ii}, Y_{Ii}, Z_I$  はそれぞれ (15), (16), (17) 式で与えられる.

これは  $a_i$  に関する 2 次方程式で, 二つの解が得られるが, そのうち  $a_i > 0$  という条件を満たすものは (14) 式の場合に限る.

一方得られた  $A^{(t+1)}$  を用いて,  $\mathbf{b}^{(t+1)}$  を求めると,

$$\frac{\partial}{\partial b_i} Q_I(A^{(t+1)}, \mathbf{b}) = -U_{Ii} + b_i V_{Ii} = 0 \quad (\text{A}\cdot 4)$$

から, (18) の更新式が得られる.

2. Type II モデルの EM 法の導出

関数  $Q$  は

$$Q_{II}(H, \mathbf{b}) = \left\langle \sum_{z=1}^k q_{IIz}^{(t)}(\mathbf{x}) \log p_{II}(\mathbf{x}, z; H, \mathbf{b}) \right\rangle_{\rho} \quad (\text{A}\cdot 5)$$

となる. まず,  $\mathbf{b} = \mathbf{b}^{(t)}$  を固定し,  $H^{(t+1)}$  を求める.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial h_1} Q_{II}(H, \mathbf{b}^{(t)}) = \left\langle \sum_{z=1}^k \left[ \frac{2h_1}{h_1^2 + h_2^2} - \frac{q_{IIz}^{(t)}(\mathbf{x})}{\sigma_z^2} \left\{ h_1(x_1^2 + x_2^2) + (b_1^{(t)} - \mu_{j,1})x_1 + (b_2^{(t)} - \mu_{j,2})x_2 \right\} \right] \right\rangle_{\rho} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial h_2} Q_{II}(H, \mathbf{b}^{(t)}) = \left\langle \sum_{z=1}^k \left[ \frac{2h_2}{h_1^2 + h_2^2} - \frac{q_{IIz}^{(t)}(\mathbf{x})}{\sigma_z^2} \left\{ h_2(x_1^2 + x_2^2) + (b_1^{(t)} - \mu_{j,1})x_2 - (b_2^{(t)} - \mu_{j,2})x_1 \right\} \right] \right\rangle_{\rho} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 7)$$

を整理すると

$$\frac{2h_1}{h_1^2 + h_2^2} Z_{II} = h_1 X_{II} - Y_{II1}, \quad (\text{A}\cdot 8)$$

$$\frac{2h_2}{h_1^2 + h_2^2} Z_{II} = h_2 X_{II} - Y_{II2} \quad (\text{A}\cdot 9)$$

となる. ただし,  $X_{II}, Y_{II1}, Y_{II2}, Z_{II}$  はそれぞれ (25), (26), (27), (28) 式で与えられる. 第一式の各辺を第二式の各辺で割ると,  $h_1$  または  $h_2$  を消去すると,

$$h_2 = \frac{Y_{II2}}{Y_{II1}} h_1 \quad (\text{A}\cdot 10)$$

なる関係が得られ,  $h_2$  を消去すると連立方程式は 2 次方程式に帰着され, 二つの解が得られる.

得られた二つの解を  $Q_{II}(H, \mathbf{b}^{(t)})$  の式に代入して整理すると

$$\log\{(1 \pm C_1)^2\} - C_2(1 \mp C_1)^2 + \text{定数} \quad (\text{A}\cdot 11)$$

という形に書ける (複号同順,  $C_1, C_2 > 0$ ). 各項を比較することによりゆう度が大きいのは (23) 式の時であることが言える.

次に  $H = H^{(t+1)}$  を固定して  $\mathbf{b}^{(t+1)}$  を求める.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial b_1} Q_{II}(H^{(t+1)}, \mathbf{b}) = \left\langle - \sum_{z=1}^k \frac{q_{IIz}^{(t)}(\mathbf{x})}{\sigma_z^2} (h_1^{(t+1)} x_1 + h_2^{(t+1)} x_2 + b_1 - \mu_{j,1}) \right\rangle_{\rho} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 12)$$

という一次方程式を解けば  $b_1^{(t+1)}$  に関する更新式 (29) が得られ, 同様にして  $b_2^{(t+1)}$  に関する更新式 (30) が得られる.

(平成??年??月??日受付, ??月??日再受付)

赤穂昭太郎 (正員)

昭 63 東大・工・計数卒，平 2 同大大学  
院工学系研究科計数工学専攻修士課程修了。  
同年電子技術総合研究所に入所。現在 情報  
科学部 主任研究官。統計的学習の理論や応  
用に関する研究に従事。日本神経回路学会  
会員。