座標系に依存しない形状表現法

指導教官　杉原 厚吉 助教授

昭和 63 年 3 月

赤穂 昭太郎

目次

第1章 序論

CAD(コンピュータ支援設計)やCG(コンピュータグラフィクス)が発達してくるとともに,コンピュータの上で適確に物体の形状を表現し利用する必要性が増してきている.形状の表現法としてはいろいろ考えられるが,いずれの表現法においてもその形状を一義的かつ矛盾なく定義するものでなければならないのはもちろんのこと,さまざまな情報の処理に対して対応できる柔軟性を有している必要がある.例えば形状の定義が一部変更されたとき,それから2次的に派生するデータ変更を適確に行なったり,形状表現から実際の物体を作成する手順を求めたりすることが,速やかに行なえるようなものである必要がある.形状の表現法として最も初等的には形状の各点の座標値を記憶させるという方法が考えられるが,この方法は上のような情報の処理のしやすさという意味においては実用的ではない.

一方,最近になって構造物の剛性に関する研究が,マトロイド理論の応用などにより,大きく進歩した([1],[3],[4],[7]).

ここで構造物とは剛な(変形しない)棒を,角度の自由に変えられる接合により結んで作られる構造(バー・ジョイント構造)や,剛な立体を剛な棒で角度の自由に変えられる接合により結んで作られる構造(バー・ボディ構造)に代表されるようないくつかのモデルのことである.

本論文では,形状をバー・ジョイント構造として表現することにより剛性に関する諸概念を応用し,このような表現法がもたらす有効性について考察する.バー・ジョイント構造として表現することの利点は,形状に関する諸々の性質を,一般の場合には,座標値によらないトポロジカルな構造だけから論じることができることにある。こうした座標系に依存しない形状表現法により,単に座標値を記憶するだけでは行ない得なかった,形状に対する情報処理が可能となる.

まず第2章においては,基礎となるバー・ジョイント構造やバー・ボディ構造の基本的諸性質について述べる.次に第3章においては,一般の場合でない「特殊な場合」とはどのようなときかを明らかにするとともに,その物理的意味について考察する.

更にそのような場合を判定するためのアルゴリズムを構成する.

第4章においてはバージョイント構造の諸性質を具体的に形状

表現に応用する.

第2章 形状表現のためのモデル

形状表現を数理的に取扱うためには，なんらかのモデル化が必要となる．本章では，バー・ジョイント構造と呼ばれる最も基本的なモデルを中心に，形状を表現するためのいくつかのモデルについての基礎的な諸概念について述べる

2.1. バー・ジョイント構造[9]

2.1.1. バー・ジョイント構造とその剛性

(a) バー・ジョイント構造の定義

バー・ジョイント構造は，図2.1のように，いくつかの伸び縮みしないまっすぐな棒を端点において角度を自由に変えられる接合でつないだもので直観的に表現される構造である．接合部を頂点，棒を枝と見ればバー・ジョイント構造はグラフの構造と対応している．

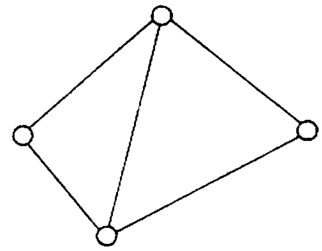


図 2.1 バー・ジョイント構造の例

一般にバー・ジョイント構造は以下のように定義される.

n次元バー・ジョイント構造とは,

(i) Vを頂点集合とし, Eを枝集合とする単純な無向グラフ

$G=(V, E)$と,

(ii) 写像 $\alpha: V \to PG(R, n)$

とからなる複合概念である. ただしαは各頂点aに対し

n次元射影空間$PG(R,n)$上の点$(a_1, a_2, \ldots, a_n, 1)$を対

応させる写像である.

このように定義されるバー・ジョイント構造を$G(\alpha)$と書く. 実際の応

用においては2次元または3次元のバー・ジョイント構造について

扱う.

(b) バー・ジョイント構造の無限小運動

バー・ジョイント構造$G(\alpha)$の各頂点を運動させることを考える.

運動は枝の長さを変えないという制約条件のもとで行なわ

れる. つまり各枝$\{a, b\} \in E$は

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2 = const. \qquad (2.1)$$

を満たさなければならない. a_i b_iを時間の関数とみ

なして(2.1)式の両辺を時間に関して微分すれば,

$$\sum_{i=1}^{n} (\dot{a}_i - \dot{b}_i)(a_i - b_i) = 0 \qquad (2.2)$$

が得られる. a_i, b_i はすでに与えられているから, (2.2)式は $\dot{a}_i$, $\dot{b}_i$ に関する線形方程式である. 従って(2.2)式の全体は次のように書ける.

$$M(G(\alpha))u = 0. \qquad (2.3)$$

ただし $M(G(\alpha))$ は $|E| \times n|V|$ 行列で, 各行は各枝に対応する. また $V = \{a, b, \ldots, f\}$ のとき, $u = {}^t(\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n, \dot{b}_1, \ldots, \dot{f}_n)$ となるように $M(G(\alpha))$ の列を並べる. このような行列 $M(G(\alpha))$ を剛性行列と呼ぶ. 剛性行列は例えば以下のような形をしている.

$$\begin{array}{c} \\ \text{枝}\{a,b\} \\ \text{枝}\{a,f\} \\ \cdots \\ \text{枝}\{e,f\} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \quad\text{頂点 } a \quad & \quad\text{頂点 } b \quad & \cdots & \quad\text{頂点 } f \quad \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc}
a_1 - b_1, \ldots, a_n - b_n & b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n & \cdots & 0, \ldots, 0 \\
a_1 - f_1, \ldots, a_n - f_n & 0, \ldots, 0 & \cdots & f_1 - a_1, \ldots, f_n - a_n \\
\cdots & & & \\
0, \ldots, 0 & 0, \ldots, 0 & \cdots & f_1 - e_1, \ldots, f_n - e_n
\end{array}\right]
\end{array}$$

$(\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n, \ldots, \dot{f}_n)$ は $(a_1, \ldots, a_n, \ldots, f_n)$ の速度ベクトルであり, 微小な運動を意味している. 従って(2.3)式の解を $G(\alpha)$ の無限小運動と呼ぶ. 無限小運動の中には構造全体の平行移動や

回転移動，またはその組合せに相当する，自明な運動が必ず存在する．そのような運動を自明な運動と呼ぶ．

(c) バージョイント構造の剛性

$G(\alpha)$の無限小運動が自明な運動だけしか含まないとき，$G(\alpha)$は剛であるという．

さて，$G(\alpha)$の頂点全体が少なくとも$n-1$次元アフィン空間を張るとき，$G(\alpha)$は full であるという．例えば，2次元平面内の線分は，full な2次元バージョイント構造（のうち最小のもの）である．full なバージョイント構造の自明な運動の次元は，平行移動のn，回転移動の$\binom{n}{2}$の合計$\binom{n+1}{2}$である．また，無限小運動の次元は，$\dim \mathrm{Ker}\, T_{M(G(\alpha))} = n|V| - \mathrm{rank}(M(G(\alpha)))$であるから（$T_{M(G(\alpha))}$は$M(G(\alpha))$に対応する線形変換），full なバージョイント構造が剛であるための条件は(2.4)式で表される．

$$\mathrm{rank}(M(G(\alpha))) = n|V| - \binom{n+1}{2} \qquad (2.4)$$

特に，$G(\alpha)$が剛でありかつ冗長な枝を含まないとき，つまり$G(\alpha)$の任意の枝を1本除去すると自明でない無限小運動が

生じるとき，$G(\alpha)$ は isostatic であるという．isostatic なバージョイント構造の剛性行列の行ベクトルは互いに線形独立である．なぜなら，もし線形従属であるとすると，ある枝に対応する行を除いても無限小運動の次元は増えないからその枝は冗長であるからである．従って次の定理が成り立つ．

定理 2.1[9]　full な n 次元バージョイント構造 $G(\alpha)$ に対し，以下の3条件は互いに同値である．

(i) $G(\alpha)$ が isostatic である．

(ii) $G(\alpha)$ が剛であり，かつ，$\mathrm{rank}(M(G(\alpha))) = |E|$ である．

(iii) $|E| = n|V| - \binom{n+1}{2}$　(2.5)

であり，かつ，$M(G(\alpha))$ の行ベクトルが互いに線形独立である．

(d) 一般の位置

$G(\alpha)$ の頂点の座標成分 $a_1, \ldots, a_n, \ldots, f_n$ を体 R 上の代数的に独立な不定元とみるとき，G の頂点の座標成分という言い方をする．そして $M(G(\alpha))$ に現れる $a_1 \ldots a_n \ldots f_n$ をこのような不定元とみなしたものを $M(G)$ と書く．ここである α をとって，それらの不定元に R 上の実際の値を対応させる．$M'(G)$ を

$M(G)$の任意の小行列として，$\det M'(G) \neq 0$ならば $\det M'(G(\alpha)) \neq 0$を満たすとき，$G(\alpha)$は一般の位置にあるという．このとき$\mathrm{rank}(M(G(\alpha))) = \mathrm{rank}(M(G))$となるから，(2.4)式により$G(\alpha)$が一般の位置にあるとき剛性は$G$だけによって決まり$\alpha$によらない性質である．従って$G(\alpha)$が一般の位置にあって剛[isostatic]であるとき，グラフGは(一般の位置で)剛[isostatic]であるという．

(e) Lamanの定理

グラフがisostaticであるかどうかは次の定理により，組合せ論的に判定できる．

定理 2.2 (Laman, 1970)[1]　グラフGが2次元でisostaticであるためには，次の(i)と(ii)とが成り立つことが必要十分である．

(i) $|E| = 2|V| - 3$

(ii) $|E(G')| \leq 2|V(G')| - 3$　$(^\forall G' \subseteq G,\ E(G') \neq \emptyset)$

3次元以上のバージョイント構造に対してはこのような組合せ論的特徴づけはまだわかっていない．

図2.2に2次元バージョイント構造とその剛性に関する例を示した.

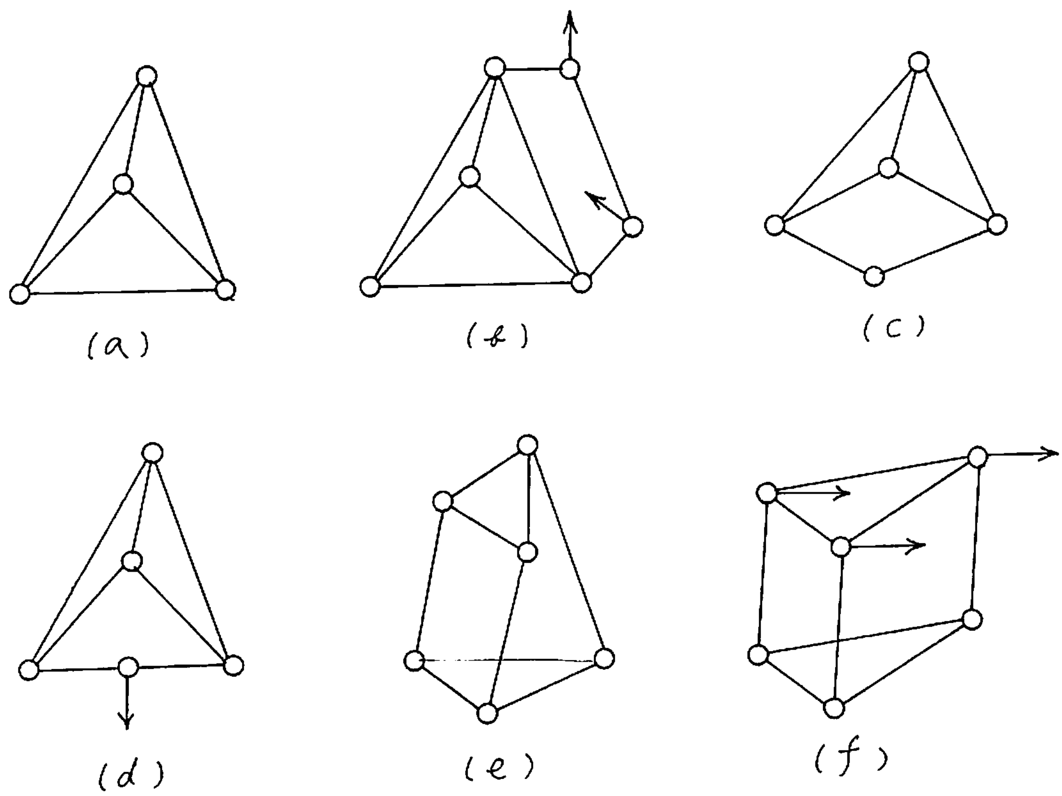


図2.2 2次元バージョイント構造と剛性（矢印は自明でない無限小運動の方向を示している.）

図2.2において剛なものは(a),(c),(e)である. (a)は冗長な枝を1本含む. (b)は全体として $|E|=2|V|-3$ の関係が成立しているが, 冗長な枝を持つ部分構造(a)を含むため他の部分で自明でない無限小運動が生じてしまう. (c),(e)はiso-staticな構造である. 一方(d),(f)はそれぞれ(c),(e)と同じグラフ構造を持ったにもかかわらず, 一般の位置にないため, 自明でない無限小運動を生じてしまう. ただし(d)においては実際の

運動としての変形は実現できない．一般に，一般の位置で剛でないグラフから作られるバー・ジョイント構造は，どの位置に置かれても自明でない無限小運動が存在するので，そのようなバー・ジョイント構造の自明でない無限小運動は常に実際の動きとして実現可能である．

2.1.2. バー・ジョイント構造の特殊位置条件

(a) 束縛枝の挿入

定理2.1より，full なバー・ジョイント構造が isostatic であるかどうかを調べるには，$|E| = n|V| - \binom{n+1}{2}$ であるような構造に対し，$M(G(\alpha))$ の行ベクトルが互いに線形独立であるかどうかを調べればよい．線形独立性を調べるために，$M(G(\alpha))$ に $\binom{n+1}{2}$ 本の行を挿入することにより，$M(G(\alpha))$ を正方行列の形にして，その行列式の値を調べるという方法をとる．

$G(\alpha)$ として $|E| = n|V| - \binom{n+1}{2}$ であるようなものをとる．このとき $G(\alpha)$ の束縛（tie-down）T とは，$\binom{n+1}{2}$ 本の束縛枝 $\{a, x\}, \{b, y\}, \ldots, \{c, z\}$ $(a, b, \ldots, c \in V,\ x, y, \ldots, z \notin V)$ の集合である．束縛に対して以下のような行集合を $M(G(\alpha))$ に挿入して

できた $n|V| \times n|V|$ 行列を拡張剛性行列と呼び $M(G(\alpha), T)$ と書く（束縛に対する行集合をまた束縛という）。

$$
\begin{array}{l}
\\
\text{枝}\{a,x\} \\
\text{枝}\{b,y\} \\
\cdots \\
\text{枝}\{c,z\}
\end{array}
\begin{array}{c}
\cdots \quad \text{頂点 } a \quad \cdots \quad \text{頂点 } b \quad \cdots \quad \text{頂点 } c \quad \cdots \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
\cdots & a_1-x_1,\dots,a_n-x_n & \cdots & 0,\dots,0 & \cdots & 0,\dots,0 & \cdots \\
 & 0,\dots,0 & \cdots & b_1-y_1,\dots,b_n-y_n & \cdots & 0,\dots,0 & \cdots \\
 & \cdots & & & & & \\
 & 0,\dots,0 & \cdots & 0,\dots,0 & \cdots & c_1-z_1,\dots,c_n-z_n & \cdots
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$x, y, \dots, z$ を $PG(R, n)$ に固定された点とみなすと，束縛はこれらの固定点と $G(\alpha)$ を剛な棒で結ぶことにより $G(\alpha)$ の自明な運動を阻んでいるものであると解釈できる．

定理 2.3 (White and Whiteley, 1983)[9] full な n 次元バージョイント構造が isostatic であるためには，正則な拡張剛性行列を作るような束縛が存在することが必要十分である．

(b) ブラケット

グラフ G において，$V = \{a, b, \dots, f\}$ のとき，$a, b, \dots, f$ の座標を行とする $|V| \times (n+1)$ 行列 A を座標行列という

$$
A = \begin{pmatrix}
a_1 & \cdots & a_n & 1 \\
b_1 & \cdots & b_n & 1 \\
 & \cdots & & \\
f_1 & \cdots & f_n & 1
\end{pmatrix}
$$

ここで $a_1, \dots, f_n$ は R 上の互いに代数的独立な不定元であり，ある

αをとることにより実際のR上の元を対応させることができるものである.

Aの中の$(n+1)$個の頂点, $c, d, \cdots, e \in V$に関する行によってできる$(n+1)$次小行列式をブラケットと呼び, $[c, d, \cdots, e]$と書く. またAから得られるすべてのブラケットにより生成される, $a_1, \cdots, f_n$の多項式環の部分環をGの頂点の上でのブラケット環と呼び, $B(G)$と書く.

(c) 特殊位置条件

補題 2.4 (White and Whiteley, 1983)[9] Gが線形独立な束縛を持つ isostatic なグラフであるとすると, 拡張剛性行列$M(G,T)$の行列式$C(G,T)$は, $C(G,T) \in B(G \cup T)$を満たす.

定理 2.5 (White and Whiteley, 1983)[9] 補題 2.4と同じ条件のもとで, $C(G,T)$は$B(G \cup T)$の上で$C(G,T) = C(G)C(T)$の形に因数分解できる. ここで$C(G)$はTによらない.

定理 2.6 (White and Whiteley, 1983)[9] 以下の2条件は互いに同値である.

(i) あるλに対して$C(G,\lambda) = 0$である.

(ii) $M(G,\lambda)$の行集合が線形従属である.

定理2.5で出てくる$C(G)$をGの特殊位置条件(pure condition)と呼ぶ。定理2.6により、$M(G(\alpha))$の行集合の線形従属性を調べるには、$C(G)$を計算すればよい。このように、結局束縛を加える前のもとの構造に戻って考えればよくなったが、束縛の入れ方に関する次の組合せ論的な定理は有用である。

定理2.7 (White and Whiteley, 1983)[9] 一般の位置にあるfullなバージョイント構造$G(\alpha)$と、一般の位置にある束縛Tをとる。各$v_i \in V$に対し、T_iをv_iに結ばれている束縛枝の集合とする。$|T_1| \geqq |T_2| \geqq \cdots \geqq |T_{|V|}|$となるように添え字を並べかえるとき、$C(T) \neq 0$となるためには(2.6)式が成り立つことが必要十分である。

$$\sum_{i=1}^{k} |T_i| \leqq nk - \binom{k}{2} \qquad (\forall k,\ 1 \leqq k \leqq n-1) \qquad (2.6)$$

(ただし、束縛$T = \{\{a, x\}, \{b, y\}, \ldots, \{c, z\}\}$ $(a, b, \ldots, c \in V,\ x, y, \ldots, z \notin V)$が一般の位置にあるとは、$x, y, \ldots, z$の座標要素がすべて$R$上で代数的に独立であることをいう)。

3章では$C(G)$のブラケット環としての形を構成する方法について考察する。そのための基礎となる定理[9]を引用する。

定理2.8 n次元空間で、$(n-1)$単体の特殊位置条件は1である。

る.

例えば，2次元においては線分の，3次元においては3角形の特殊位置条件は1となる.

定理2.9　n次元isostaticなグラフGに新たに頂点pとn本の枝$\{p, a_i\}$ $(1 \leqq i \leqq n, a_i \in V)$を付加して，グラフ$G'$をつくるとき，$G'$の$n$次元における特殊位置条件は(2.7)式のようになる.

$$C(G') = [p, a_1, \cdots, a_n]\, C(G) \tag{2.7}$$

定理2.10　n次元isostaticなグラフGが，少なくとも$n+1$個の頂点をもつn次元isostaticな部分グラフHを持つとき，$C(G) = C(H) \cdot C'$の形に因数分解できる.

グラフGに新たに頂点pと$|V|$本の枝$\{p, a\}$ $(\forall a \in V)$を追加してできたグラフを一点錐と呼び$G * p$と書く.

定理2.11　Gが$n+1$個の頂点を持つn次元isostaticなグラフであるとき，$G * p$は$n+1$次元isostaticなグラフであり，その特殊位置条件は，Gの特殊位置条件の各ブラケットの最後の部分にpを挿入することにより得られる.

例えば，Gの特殊位置条件が［a b c］などという形をしていれば，G＊pの特殊位置条件は［a b c p］となる.

2.1.3. 階層構造[2],[4],[6]

isostaticなバージョイント構造に対して，剛であるという性質が部分から全体へとどのように決まっていくかという階層構造を調べる. 簡単のために，以下2次元バージョイント構造について考える. 2次元isostaticなグラフGの枝xに対して，

$$K(x) = \cap \{X \mid x \in X \subseteq E, |X| \geqq 3, |X| = 2|V(X)| - 3\} \quad (2.8)$$

と定義する.

Gはisostaticであると仮定したから，Gには冗長な枝は含まれない. 従ってGの任意の剛な部分構造は $|X| = 2|V(X)| - 3$ を満たす. また $|X| \geqq 3$ の3は複数の枝からなる剛な構造の最小の枝数である. 従って $K(x)$ は枝xを含み，3以上の枝からなるすべての剛な部分構造の共通部分である. ただし(2.8)式の右辺で $|X| \geqq 3$ となるものが存在しないときは $K(x) = \{x\}$ とする.

ここで $K(x) \subseteq K(y)$ のとき $x \leqq y$ と書く. ≦は集合の包含関係

から自然に導かれる半順序関係である. $x \leqq y$ のとき, y を含む剛な部分構造には常に x が含まれることを意味し, このような半順序関係の小さいものから大きいものへという階層が, 剛な部分構造から全体の構造を積み上げていくという階層構造を表している. 一方このような階層構造求める効率のよい算法も提案されている.[2]

例として図2.3(a)の2次元バージョイント構造に対して階層構造を求める.

各 $K(x)$ は以下のようになる.

$K(a)=\{a\}$, $K(b)=K(c)=\{a, b, c\}$,

$K(d)=K(e)=\{a, d, e\}$, $K(f)=K(g)=\{a, b, \dots, g\}$,

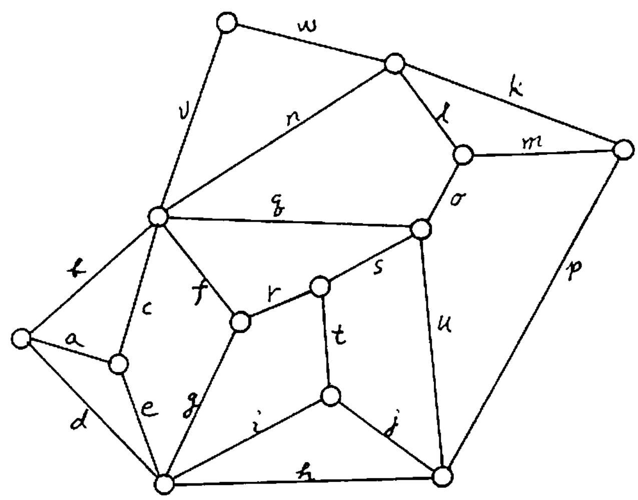
$K(h)=K(i)=K(j)=\{h, i, j\}$,

$K(k)=K(l)=K(m)=\{k, l, m\}$, $K(n)=\{n\}$,

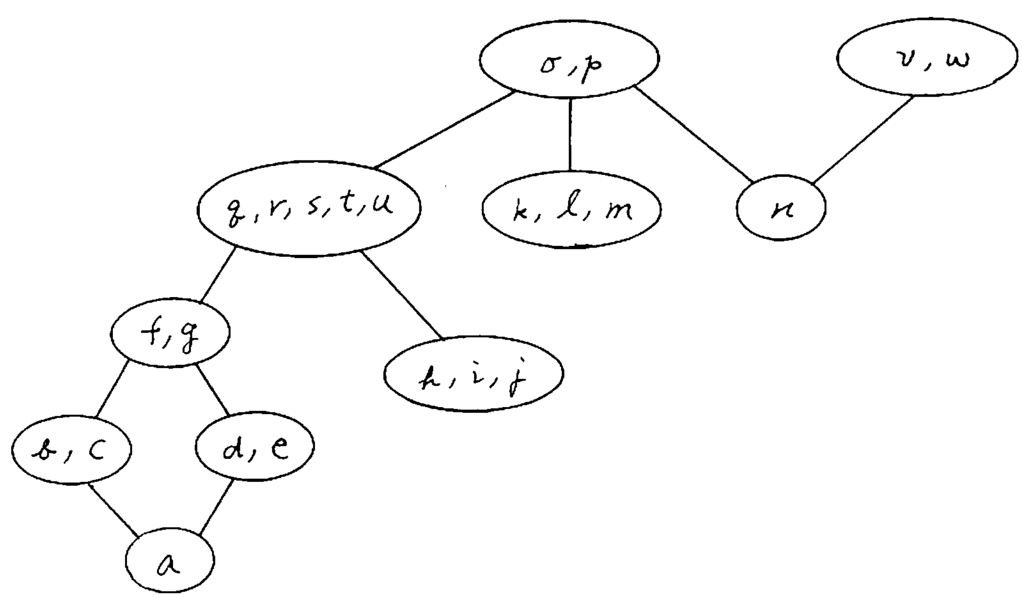
$K(o)=K(p)=\{a, b, \dots, u\}$, $K(q)=\cdots=K(u)=\{a, \dots, j, q, \dots, u\}$,

$K(v)=K(w)=\{n, v, w\}$.

これらの集合の包含関係によって導かれる半順序関係を図2.3(b)に示した.



(a) isostatic な バー・ジョイント構造



(b) (a)に対する階層構造

図2.3 isostaticな構造に対する階層構造

この図では $x \leqq y$ のとき x より y の方が上にくるように半順序を描いてあり，同じ半順序を持つものは同じ節点に入れてある．この階層構造における任意の節点と，それより下にあるすべての節点に含まれる枝の全体は剛な部分構造をなす．例えば図2.3(b)で f, g の入っている節点とそれより下にあるすべての節点に含まれる枝全体 $\{a, b, \cdots, f, g\}$ は剛な部分構造である．また，$X \subseteq E$ を含む剛な部分構造のうち極小なものもこうした階層構造から取り出せる．例えば図2.3(b)より，$\{b, d\}$ を含む剛な部分構造で極小なものは $\{a, b, \cdots, e\}$ であり，$\{h, k\}$ を含む剛な部分構造で極小なものは $\{a, \cdots, j, k, l, m, n, o, p, q, \cdots, u\}$ $(= E - \{v, w\})$ である．

2.2. バー・ボディ構造[10]

2.2.1. バー・ボディ構造の剛性

(a) n 次元空間内の回転の中心

バー・ボディ構造は，直観的にはいくつかの剛な立体を剛な棒でユニバーサルジョイントにより結びつけたものである．まず準

備として立体の運動について述べる.

ここで任意の点 p は $PG(R,n)$ 上の座標 $(p_1,\ldots,p_n,1)$ をもつとする. $PG(R,n)$ の d 次元部分空間 W をとると, W は R^{n+1} の $(d+1)$ 次元部分空間に対応する. このとき W は rank $(d+1)$ を持つという.

rank r の部分空間 W は底となる r 個の点 $p^1,\ldots,p^r$ によって決まる. W に対して外積 $p^1\wedge p^2\wedge\cdots\wedge p^r$ を考える. $p^1\wedge p^2\wedge\cdots p^r$ は $p^1,\ldots,p^r$ を行とする $r\times(n+1)$ 行列の r 次小行列式の列 ($\binom{n+1}{2}$ ベクトル) で表わされる (これを Plücker 座標という).

さて R^n における立体 B の回転運動を考えるが, このためには R^n 自身の回転を考えればよい. そのような回転の中心 (軸) は rank $(n-1)$ の部分空間 W となる. 例えば 2 次元においては W は点であり, 3 次元においては直線である. W に対して $Z=p^1\wedge p^2\wedge\cdots\wedge p^{n-1}$ とおき, W 内にない点 p をとると, $Z\wedge p$ は $(n+1)$ $(=\binom{n+1}{n})$ ベクトルで, 最初の n 個の要素は $\perp p(W+p)$ に垂直なベクトルとなり, $n+1$ 番目の要素は $-\iota(p_1 \cdots p_n)$ となる. $\perp p(W+p)$ は W の底

と p とが張る空間). つまり $\Xi' \wedge p$ は $sp(W+p)$ の平面の方程式の係数となる. ここで $sp(W+p)$ 上の別の点 p' をとれば $\Xi' \wedge p$ と $\Xi' \wedge p'$ は互いに一方が他方のスカラー倍の関係にある. その大きさは p と p' の W からの距離に比例する. 従ってある正規化定数を α とすれば $\alpha(\Xi' \wedge p)$ は, (最後の要素を除いて) すべての点 p について p における回転の速度ベクトルを表す. $\Xi = \alpha \Xi'$ とおき, これを回転の中心と呼び, $M(p) \equiv \Xi \wedge p$ を p における運動と呼ぶ.

次にベクトル v に沿った平行運動を考える. U を v に垂直な超平面族とすると, U は無限遠点 ($PG(R,n)$ 上の $(n+1)$ 番目の座標値が 0 の点) で rank $(n-1)$ の部分空間 W に交わる. このような W を回転運動の中心とすれば, 回転運動と同様にして Ξ, $M(p)$ が定義できる.

今, ある立体の運動がいくつかの回転運動と平行運動の和で表されているとする. 各運動の中心を $\Xi_1, \cdots \Xi_m$ とするとき, $\Xi = \sum_{i=1}^{m} \Xi_i$ をそのような運動の中心と呼び.

$M(p)=\sum_{i=1}^{m} Z_i' \wedge p = Z\wedge p$ を剛な立体の点 p における運動と呼ぶ.

例1. 運動の例として, R^3 の上での x 軸に関する回転を考える. x 軸は $(0,0,0,1)$ と $(1,0,0,1)$ によって決まる. すると $Z=(0,0,-1,0,0,0)$ (Plücker 座標) となる. ただし Plücker 座標は $P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{23}, P_{24}, P_{34}$ の順に並んでいるとする (P_{ij} は第 i 列, 第 j 列からなる小行列式).

また $M(p)=Z\wedge p=(0,-p_3,p_2,0)$ となる. ただし Plücker 座標は $P_{234},-P_{134},P_{124},-P_{123}$ の順に並んでいるとし, $p=(p_1,p_2,p_3,1)$ とする.

例2. R^3 の上で x 軸に沿っての平行運動を考える. $v=(1,0,0)$ だから U は $x=0$ なる (超) 平面で, 無限遠点において U から導かれる W は $\{(x,y,z,w) \mid x=w=0\}$ なる直線であり, 2点 $(0,1,0,0)$ と $(0,0,1,0)$ により決まる. すると $Z=(0,0,0,1,0,0)$ となり, $M(p)=(1,0,0,-p_1)$ となる.

(a) 剛性のための制約条件

2つの剛な立体 B_1, B_2 が1本の剛な棒で B_1 上の点 a と B_2 上の点 b で角度が自由に変化できるようなジョイントで接合されているとする. B_1 と B_2 がそれぞれ中心 Z_1 と Z_2 を持つような運動をするとき, a と b との間の距離が一定であるという条件を求める.

u, v をそれぞれ a, b における速度ベクトルとすると,

$M(a) = (u, -u \cdot (a_1, \dots, a_n))$, $M(b) = (v, -v \cdot (b_1, \dots, b_n))$

である. 従って求める条件は,

$$
\begin{aligned}
0 &= (u - v)((a_1, \dots, a_n) - (b_1, \dots, b_n)) \\
&= u \cdot (a_1, \dots, a_n) - u \cdot (b_1, \dots, b_n) - v \cdot (a_1, \dots, a_n) + v \cdot (b_1, \dots, b_n) \\
&= -M(a) \wedge b - M(b) \wedge a
\end{aligned}
$$

となる. $M(p) = Z \wedge p$ だから,

$$
Z_1 \wedge a \wedge b + Z_2 \wedge b \wedge a =
$$

$$
(Z_1 - Z_2) \wedge (a \wedge b) = 0 \tag{2.9}
$$

が得られる. ここで Z が $(n-1)$ 外積 $p^1 \wedge p^2 \wedge \cdots \wedge p^{n-1}$ であるとき,

$$
Z^* = (P_{12}, -P_{13}, \dots, (-1)^{i+j-1} P_{ij}, \dots) \tag{2.10}
$$

とおく. ただし P_{ij} は $p^1 \cdots p^{n-1}$ を行とする $(n-1)\times(n+1)$ 行列の第 i 列と第 j 列を除いてできる $n-1$ 次小行列式である.

また, $a\wedge b$ を $(Q_{12}, Q_{13}, \cdots, Q_{ij}, \cdots)$ のように並べる. ただし Q_{ij} は a, b を行とする $2\times(n+1)$ 行列の第 i 列と第 j 列からなる2次小行列式である. すると,

$$Z\wedge(a\wedge b) = p^1\wedge p^2\wedge\cdots\wedge p^{n-1}\wedge a\wedge b$$

$$= \det(p^1, \cdots, p^{n-1}, a, b) = \pm\sum_{i<j}(-1)^{i+j-1}P_{ij}'Q_{ij}$$

$$= \pm Z^*\cdot(a\wedge b) \tag{2.11}$$

が成り立つ. (2.9)式と(2.11)式により次の定理が成り立つ.

定理 2.12 (White and Whiteley, 1987)[10] 剛な立体 B_1, B_2 がそれぞれ運動の中心 Z_1, Z_2 をもつとき, B_1 上の点 a と B_2 上の点 b との間の距離を一定に保つためには (2.12)式が必要十分である.

$$Z_1^*\cdot(a\wedge b) - Z_2^*\cdot(a\wedge b) = 0 \tag{2.12}$$

(c) バー・ボディ構造の定義と剛性

ここでバー・ボディ構造を定義する. n 次バー・ボディ構造 $G(p)$ とは, 自己閉路を含まない, 並列枝はあっ(てもよい) グラフ

$G=(V,E)$ の各頂点 $v_i \in V$ $(i=1,\cdots,|V|)$ に対して R^n 上で剛な立体を対応させ，各枝 $e \in E$ が v_i, v_j を結ぶとき B_i 上の点 $a_i^{(e)}$ と B_j 上の点 $a_j^{(e)}$ を対応させたものである（この対応を p と書く）．ただし各立体はすべて full な剛構造であるとする．ここで立体が full であるとは，その立体上の点集合で，少なくとも $n-1$ 次元アフィン空間を張るものが存在するときを言う．これはバージョイント構造の full な性質の自然な拡張である．例えば 2 次元の剛な棒は full な立体である．

バージョイント構造の場合と同様に，バーボディ構造の枝の長さを変えないような運動を考える．各枝に対して，(2.12) 式のような線形な制約条件が存在し，それらをバーボディ構造全体に対して集めると次のような形に書ける．

$$M(G(p))\, Z^* = 0 \qquad (2.13)$$

ここで $M(G(p))$ は $|E| \times \binom{n+1}{2}|V|$ 行列で，各行は各枝に対応する．また ${}^tZ^* = ({}^tZ_1^*, \ldots, {}^tZ_{|V|}^*)$ であるように $M(G(p))$

の列を並べる．このようにおくと，バージョイント構造で行なった議論を使ってバーボディ構造の剛性を記述できる．まず(2.13)式の解空間はバーボディ構造の運動の空間に相当する．また，そのような運動の中には，構造全体の平行移動・回転移動に相当する自明な運動が常に存在する．自明な運動だけしか持たないとき，そのバーボディ構造は剛であるという．自明な運動は$\binom{n+1}{2}$次元だから，$rank(M(G(p)))$の最大値は$\binom{n+1}{2}(|V|-1)$である．そこで剛でかつ冗長な枝を含まないようなバーボディ構造をisostaticであるということにすると，定理2.1に相当する次の定理が成り立つ

定理 2.13[10] n次元バーボディ構造$G(p)$に対し，以下の3条件は互いに同値である．

(i) $G(p)$がisostaticである．

(ii) $G(p)$が剛であり，かつ$rank(M(G,p))=|E|$である．

(iii) $|E|=\binom{n+1}{2}(|V|-1)$であり，かつ (2.14)

$M(G(p))$の行ベクトルが互いに独立である．

ここで，一般の位置にあるということについてもバージョイント構造の場合と同様に定義する．つまり，$G(p)$の枝の両端点の座標を体R上で独立な不定元とみなしたとき，それらをGの座標と言うことにし，$M(G)$の任意の小行列$M'(G)$に対し$\det M'(G) \neq 0$ならば$\det M'(G(p)) \neq 0$のとき，$G(p)$は一般の位置にあるという．また$G(p)$が一般の位置にあるとき剛[isostatic]であるならば，グラフGは剛[isostatic]であるという．

(d) Tayの定理

n次元バーボディ構造をつくるグラフがisostaticであるかどうかは次の定理により組合せ論的に判定できる．

定理 2.14 (Tay, 1984)[7] グラフGがn次元でisostaticであるためには次の(i)と(ii)とが成り立つことが必要十分である．

(i) $|E| = \binom{n+1}{2}(|V|-1)$

(ii) $|E(G')| \leq \binom{n+1}{2}(|V(G')|-1)$ $(\forall G' \subseteq G,\ G' \neq \emptyset)$

バージョイント構造における類似の定理(定理2.2)

は2次元のみでしか成り立たなかったが，定理2.13は任意の次元において成り立っている．

2.2.2. バーボディ構造の特殊位置条件

(a) 束縛枝の挿入とバーボディ構造の特殊位置条件

バージョイント構造の場合と同様に，バーボディ構造においても $\binom{n+1}{2}$ 次元の自明な運動を阻止するような束縛を考えることができる．バーボディ構造の場合は，1つのfullな立体の自明な運動を阻止できる．従って束縛 T としては次のようなものをとればよい．

$$T = [\, I_{\binom{n+1}{2}} \;\; 0 \cdots 0 \,] \qquad (I_{\binom{n+1}{2}} \text{ は } \tbinom{n+1}{2} \text{ 次単位行列})$$

(2.14)式を満たす $G(p)$ に対して，$M(G(p))$ に T をつけ加えてできる $\binom{n+1}{2}|V|$ 次正方行列を拡張剛性行列と呼び $M(G(p), T)$ と書く．

ここでグラフ G に対し，各枝 $\{a_i^{(e)}, a_j^{(e)}\}$ （$a_i^{(e)}$ は $PG(R,n)$ 上の不定元とする）に対して $a_i^{(e)} \wedge a_j^{(e)}$ を行として並べてできる $|E| \times \binom{n+1}{2}$ 行列を考える．この行列のすべての $\binom{n+1}{2}$ 次小行列式の生成するブラケット環を $B_E(G)$ とする．すると

バーボディ構造に関して次の定理が成り立つ.

定理 2.15 [10] グラフ G が $|E| = \binom{n+1}{2}(|V|-1)$ を満たすならば, (2.15) 式が成り立つ.

$$\det(M(G, T)) = C(G) \tag{2.15}$$

ここで $C(G) \in B_E(G)$ である.

以下で枝 $a, b, \ldots, f \in E$ の作るブラケットを $[a, b, \ldots, f]$ と書くことにする.

定理 2.16 [10] $|E| = \binom{n+1}{2}(|V|-1)$ を満たすバーボディ構造 $G(p)$ に対して, $G(p)$ が isostatic であるためには, $C(G(p)) \neq 0$ が必要十分である.

(2.15) 式の $C(G)$ を特殊位置条件と呼ぶ.

(b) バーボディ構造の特殊位置条件を求める方法

本項では isostatic なグラフ G に対して特殊位置条件の形を求める方法を示す. ここで G の枝に勝手に向きをつけて有向グラフとして扱う. また G の枝集合 E に任意に順序をつけて順序集合として扱う.

G の fan π とは グラフ G の枝の互いに素な順序集合

f_i $(2 \leqq i \leqq |V|)$ への分割で各 i に対し $|f_i| = \binom{n+1}{2}$ であり，f_i の要素である枝は v_i と結合しているもののことを言う．

2つの fan π, π' に対して，ある i について f_i が f'_i にない枝を含むとき π と π' は異なるといい，そうでないとき π と π' は置換に対して同値であるという．

fan π の符号 $\sigma(\pi)$ を次のように定義する．

$$\sigma(\pi) = (-1)^r \cdot [E\text{から順序}(f_2, \cdots, f_{|V|})\text{への置換の符号}] \tag{2.16}$$

ここで，$r = \sum_{i=2}^{|V|} |\{e \mid e \in f_i,\ \partial^- e = v_i\}|$ である（$\partial^- e$ は e の終点）．つまり f_i の枝のうち v_i を終点とするものの総数である．

以上のように定義すると次の定理が成り立つ．

定理 2.17 [10] isostatic なグラフ G に対する特殊位置条件は (2.17) 式で書ける．

$$C(G) = \sum_{\pi} \sigma(\pi)\,[f_2] \cdots [f_{|V|}] \tag{2.17}$$

ただし和はすべての異なる G の fan に対する和を表す．

G の fan π に対する fan 図 $D(\pi)$ とは各 $e \in f_i$ に対し

$\partial^+ e = v_i$ となるように G の枝を書きかえてできる有向グラフである($\partial^+ e$ は e の始点)

fan 図 $D(\pi)$ の中に単純かつ初等的な有向閉路がある場合を考える。そのような有向閉路のうち互いに素なもののいくつかの集合を P とする。$p \in P$ に対して、各枝 $(v_{p(i)}, v_{p(i+1)})$ ($p(i)$ は p の i 番目の頂点) は $f_{p(i)}$ の中にあるが、これを $(v_{p(i)}, v_{p(i-1)})$ で置きかえることにより p を反転させる。この操作をすべての $p \in P$ について行なうと、新しく f_i' $(i = 2, \ldots, |V|)$ ができる。f_i' の作る fan π' を π の閉路反転と呼ぶ。

定理 2.18[10] 異なる fan π, π' を任意にとるとき、π の適当な閉路反転 π'' をとると、π' と π' は置換に対して同値である。

従って (2.17) 式の中のすべての異なる fan は、任意の1つの fan から閉路反転により作ることができる。また閉路反転した fan の符号は以下の定理により容易に求めることができる。

定理2.19[10] fan π の r 個の互いに素な単純かつ初等的な閉路を反転させて fan π' を作るとき(2.18)式が成り立つ.

$$\sigma(\pi') = (-1)^r \sigma(\pi) \tag{2.18}$$

例. 図2.4(a)のような isostatic なバー・ボディ構造 G に対して特殊位置条件を求めてみる. 図2.4(b)は fan の1つ $f_2=(a,b,c)$, $f_3=(d,e,f)$, $f_4=(g,h,i)$ に対する fan 図である. この中で単純かつ初等的な閉路は (c,f,g) と (c,d) の2つである. これらは互いに素ではないから π の閉路反転は2つあり, (c,f,g) に関する閉路反転によって π' $(f_2'=(a,b,\underset{\sim}{g}),\ f_3'=(d,e,\underset{\sim}{c}),\ f_4'=(\underset{\sim}{f},h,i))$ を得, (c,d) に関する閉路反転によって π'' $(f_2''=(a,b,\underset{\sim}{d}),\ f_3''=(\underset{\sim}{c},e,f),\ f_4''=f_4)$ を得る. それぞれに対する fan 図を図2.4(c),(d)に示した. それぞれの閉路反転において定理2.18を適用すると, $\sigma(\pi)=1$ だから $\sigma(\pi')=\sigma(\pi'')=-1$ となる. 結局 $C(G)=[abc][def][ghi]-[abg][dec][fhi]-[abd][cef][ghi]$ となる.

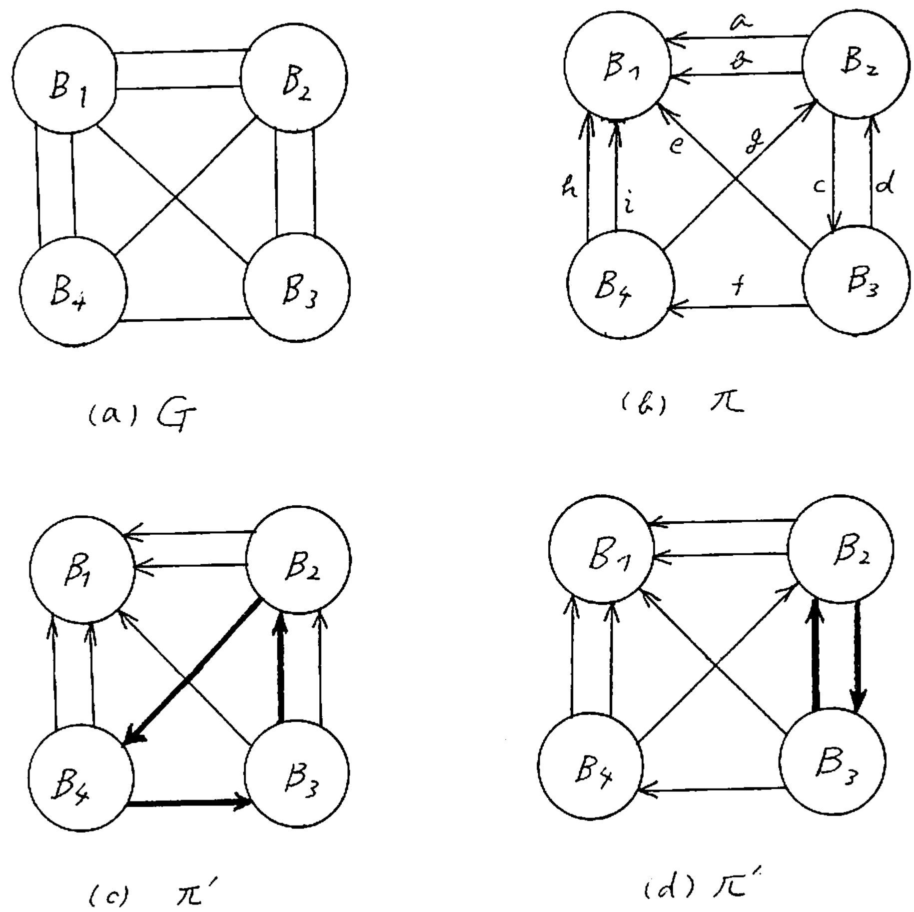


図2.4 バーボディ構造と特殊位置条件（太線は反転した閉路

2.3. 多面体の投影図[5][11]

本節では,後の章では直接には扱わないが,形状表現の1つのモデルとなる多面体の投影図について述べる.

2.3.1. 多面体に対応する隣接構造

隣接構造 I とは,頂点集合 V,面集合 F, $R \subseteq V \times F$ から

なる複合概念であり，$(v, f) \in R$ は面 f の上に頂点 v があることを意味し，I は多面体の位相的構造に対応する。

I の各頂点 $v_i \in V$ に対し2次元平面上の点 (x_i, y_i) を対応させたもの（この対応を g と書く）を I の投影図と呼び，$I(g)$ と書く。ここで更に各点に z 座標を与えて3次元座標 (x_i, y_i, z_i) とし，$I(g)$ が多面体の投影図を表すかどうかについて考える。各面 f_j を $a_j x + b_j y + z + c_j = 0$ で表すことにすると，$I(g)$ が多面体の投影図を表すためには各 $(v_i, f_j) \in R$ に対して v_i が f_j の上になければならないから，

$$a_j x_i + b_j y_i + z_i + c_j = 0 \tag{2.19}$$

を満たす必要がある。これは z_i, a_j, b_j, c_j についての線形方程式だから (2.19) 式をすべて集めると次のような式に書ける。

$$N(I(g))\,w = 0. \tag{2.20}$$

ただし行列 $N(I(g))$ は $|R| \times (|V| + 3|F|)$ 行列で，各行は各 R の元に対応する。また $w = {}^t(z_1 \cdots z_{|V|}, a_1, b_1, c_1,$

$\cdots, a_{|F|}, b_{|F|}, c_{|F|})$ となるように $N(I(g))$ の列を並べる.

(2.20)式の解を可能空間配置と呼ぶことにすると, 可能空間配置全体のなすベクトル空間の次元は $|V| + 3|F| - \mathrm{rank}\, N(I(g))$ である。これを $I(g)$ の自由度と呼ぶことにする. また $(a_i, b_i, c_i) \neq (a_j, b_j, c_j)$ $(\forall i, j\ \ i \neq j)$ となる可能空間配置が存在するとき $I(g)$ は再現可能であるということにする. 2つ以上の面を持つ再現可能な投影図は少なくとも自由度4をもつ. なぜなら1つの面の3点の z 座標は任意に与えられ, 他の面の1点で z 座標を任意に与えられるものがあるからである.

ここで $I(g)$ を一般の位置に置いたとき, $I(g)$ の自由度や再現可能な性質は g によらない. 一般の位置においたときの $I(g)$ の自由度を I の自由度と呼び, $I(g)$ が再現可能であるとき I は再現可能であるという.

以上のように定義すると次の定理が成り立つ.

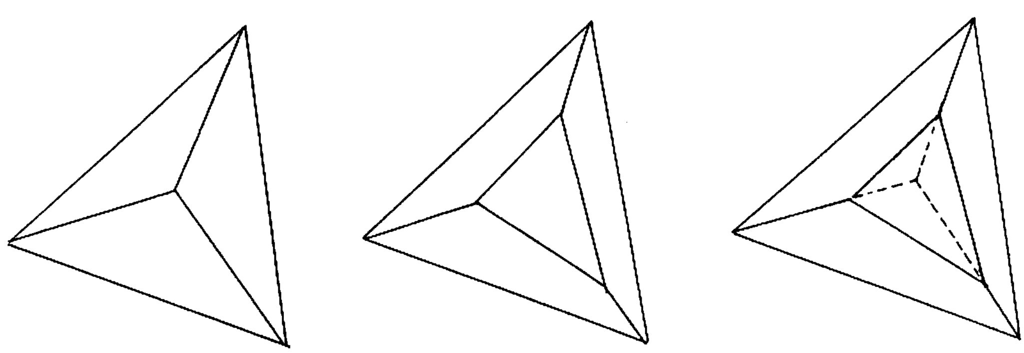
定理2.20[5] 隣接構造 $I=(V, F, R)$ が再現可能で自由度が4であるためには以下の(i), (ii)が成り立つ

ことが必要十分である.

(i) $|R| = |V| + 3|F| - 4$

(ii) $|R(X)| \leqq |V(X)| + 3|X| - 4 \quad (^{\forall}X \subseteq F,\ |X| \geqq 2)$

図2.5の例を考える. 図2.5(a)は定理20の条件(i),(ii)を満たすので一般の位置で再現可能である. ところが(b)の場合は(i)を満たさないので, (c)のように3直線が1点で交わるときのみ多面体(三角錐台)を表し, 一般の位置では再現可能でない.



(a) (b) (c)

図2.5 多面体の投影図の再現可能性

2.3.2. 2次元バージョイント構造との対応関係[5]

Lamanの定理の自然な拡張により以下の定理が成り立つ.

定理2.21[5] グラフGが2次元バージョイント構造の意味

で剛であり，任意の1本の枝をとるとisostaticなグラフとなるものであるためには，以下の(i),(ii)が成り立つことが必要十分である．

(i) $|E| = 2|V| - 2$

(ii) $|E(G')| \leqq 2|V(G')| - 3 \quad ({}^{\forall}G' \subsetneqq G, |V(G')| \geqq 2)$

図2.6の例を考える．(a)はisostaticなグラフであり，(b)は定理2.21の条件(i),(ii)を満たすグラフでどの1本の枝を取り除いてもisostaticとなる．(c)では枝a,bを取り除いても剛であり，実際定理2.21の(i),(ii)は満たさない．

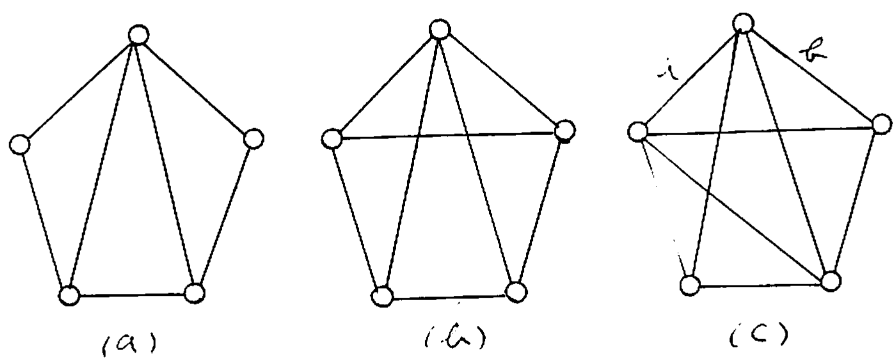


図2.6 冗長な枝を1本含む構造

定理2.20と定理2.21に対して次の定理が成り立ち，多面体の投影図とバージョイント構造との対応関係が示される．

定理2.23[5] Pが球に同相な多面体であるとする. Pに対応する隣接構造をI_Pとし, Pに対応する2次元バージョイント構造をつくるグラフをG_Pとするとき, I_Pが定理2.20の条件(i),(ii)を満たすためには, G_Pが定理2.21の条件(i),(ii)を満たすことが必要十分である.

図2.7に例を示す. 多面体(a)は定理2.20の条件を満たし, それに対するバージョイント構造(a')は任意の1本の枝を除くとisostaticとなるような構造であり定理2.21の条件を満たす. 定理2.20の条件を満たさない多面体の投影図(b)に対するバージョイント構造(b')は枝eを除くと自明でない運動が生じてしまう. (c)の多面体は自由度5を持つため定理2.20の条件を満たさない. 実際に, 対応するバージョイント構造(c')は2本の枝e, e'を除いてもなお剛であり定理2.22の条件を満たさない. (d)の投影図はeとe'が同一直線上にあるときだけ再現可能となるものであり一般の位置では再現可能ではない. 実際, 対応するバージョイント構造(d')で枝eを除くと自明でない運動が生じ

てしまい定理2.21の条件を満たさない。

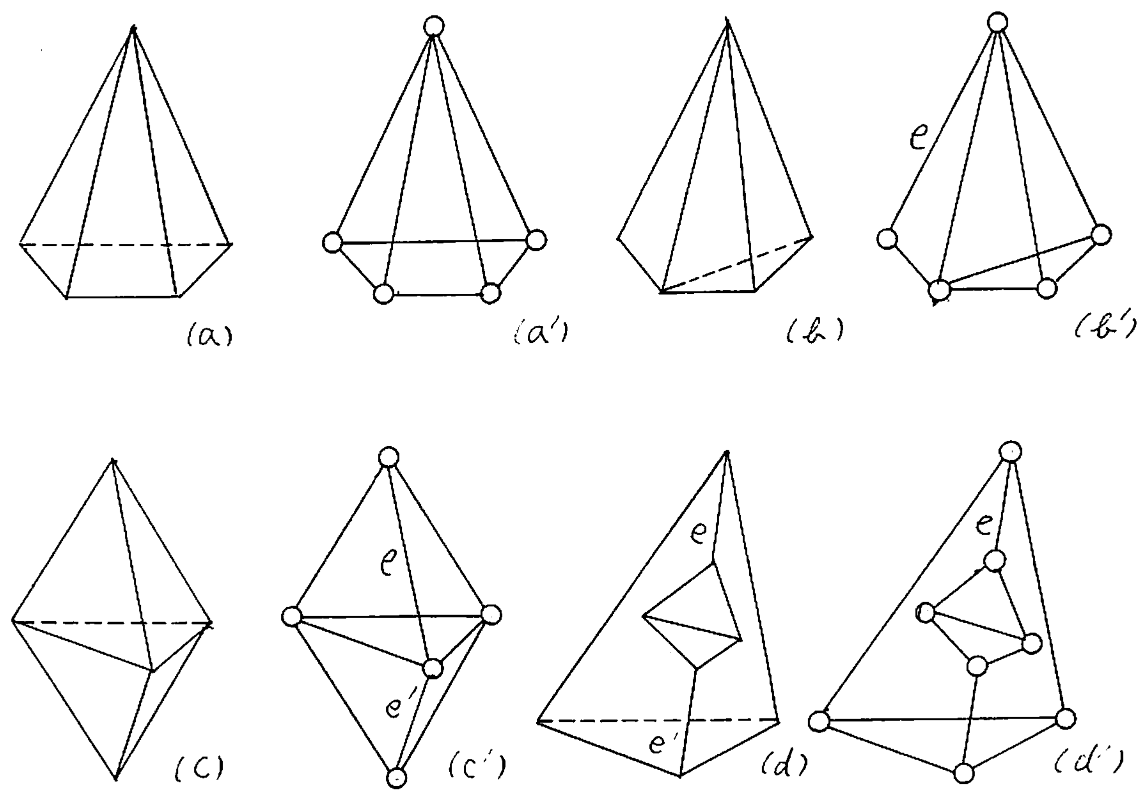


図 2.7 多面体の投影図とバージョイント構造との対応関係

2.3.3. 2次元バー・ボディ構造との対応関係[11]

隣接構造Iの頂点$v_i \in V$が面$f_1, \cdots, f_m \in F$に隣接するとき，v_iに関する$N(I(g))$の行集合は次の形をしている。

$$
\begin{array}{c}
\\ \text{面}\, f_1 \\ \text{面}\, f_2 \\ \cdots \\ \text{面}\, f_m
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc:cccc} \quad & i & \quad & \text{面}\, f_1 & \text{面}\, f_2 & \cdots\ \text{面}\, f_m & \cdots \end{array}\\
\left[\begin{array}{ccc:ccccccccccc}
 & 1 & & x_i & y_i & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_i & y_i & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
 & \vdots & & \cdots & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x_i & y_i & 1 & \cdots
\end{array}\right]
\end{array}
$$

これに行基本変形を施し以下の形を得る.

$$
\left[\begin{array}{ccc:l}
 & 1 & & x_i, y_i, 1 \quad 0,0,0 \quad \cdots \quad 0,0,0 \quad \cdots \\
0 & 0 & 0 & -x_i, -y_i, -1 \quad x_i, y_i, 1 \quad \cdots \quad 0,0,0 \quad \cdots \\
 & \vdots & & \quad \cdots \\
 & 0 & & -x_i, -y_i, -1 \quad 0,0,0 \quad \cdots \quad x_i, y_i, 1 \quad \cdots
\end{array}\right]
$$

これをすべての頂点に対して集め, 適当に行の入れかえを行なうと次の形に書ける.

$$
\begin{bmatrix} I_{|V|} & C \\ 0 & D \end{bmatrix} \tag{2.21}
$$

Dの各行は長さが$3|F|$で次のような形をしている.

$$(\ldots, x_i, y_i, 1, \ldots, -x_i, -y_i, -1, \ldots)$$

一方2次元バー・ボディ構造では枝$\{a, b\}$に対応する行は次の形をしている.

$$(\ldots, a \wedge b, \ldots, -a \wedge b, \ldots)$$

$a \wedge b$は3-ベクトルだから上記のDの各行と対応させることができる. 従って, 隣接構造の各面に対して2次元バー・ボディ構造のボディを対応させ Dの各行に対してそのバー・ボディ構造の枝を対応させることにより, 隣接構造と2次元バー・ボディ構造との間に写像Lを定義できる. また上の

手順を逆にたどることによりこの写像が同型写像であることがわかる. 以上により次の定理が成り立つ.

定理 2.24[11] 投影図 $I(g)$ と, それに対応するバー・ボディ構造 $G(p)=L(I(g))$ をとるとき, 以下の (i), (ii) が成り立つ.

(i) $I(g)$ の可能空間配置に対し $(a_i, b_i, c_i)=(a_j, b_j, c_j)$ $(\forall i, j)$ であるためには $G(p)$ が剛であることが必要十分である.

(ii) $I(g)$ が再現可能であるためには, $G(p)$ のすべてのボディの間に中心の異なる運動があることが必要十分である.

図2.8に多面体の投影図とそれに対応するバー・ボディ構造を示す. (a) は再現可能であり, これに対応するバー・ボディ構造 (a′) はすべてのボディに対して自明でない運動が生じるはずである (頂点の数7に対して枝の数は8だから自明でない運動の存在はわかる). (b) は投影図が定理2.24 (i) を満たし, これに対応するバー・ボディ構造が剛に

なる.

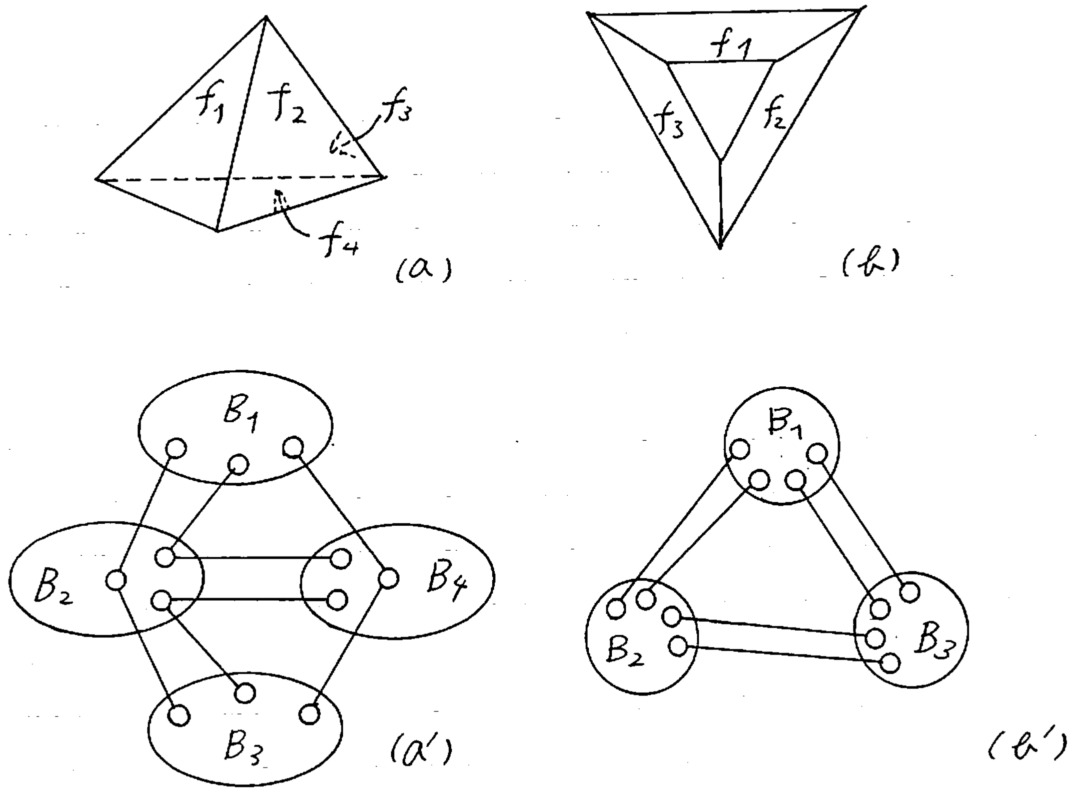


図2.8 多面体の投影図とバー・ボディ構造との対応関係

以上に述べたように，多面体の表現はバー・ジョイント構造またはバー・ボディ構造の枠組で論じることができる.

第3章 特殊位置の判定法

第2章においてバー・ジョイント構造とバー・ボディ構造の2つの場合について特殊位置条件と呼ばれるものを導入した．本章ではその両方に共通な物理的意味を考察し，形状表現においてどのような意味を持つかを述べる．更にバージョイント構造についてそのグラフ構造だけから特殊位置条件を求める手続きを考える．

3.1. 特殊位置条件の物理的な意味

ここではバー・ジョイント構造における言葉を使って特殊位置条件の物理的意味を考える．これらの物理的意味はバー・ボディ構造に対応する言葉で置きかえてもほとんど成り立つことである．

isostaticなグラフGを考え，あるαをとってバー・ジョイント構造$G(\alpha)$を作る．$G(\alpha)$が一般の位置にあることの判定は定理2.6（バー・ボディ構造では定理2.16）により，$C(G(\alpha))\neq 0$を満たすことを調べればよい．$C(G(\alpha))=0$の場合は一般の位置にないから特殊な位置にあると言うことにする．する

と特殊な位置にある場合は G(α) に自明でない無限小運動が生じることを意味する.しかしこれはほとんどの場合実現不可能である(図 2.2(d) 参照).なぜなら特殊な位置から少しでもずれるとほとんどの場合一般の位置となるため isostatic になり運動できなくなるからである.ただし図 2.2(f) のように実現可能な運動となる場合もある.

第4章で述べるように,形状表現において寸法の指定をバー・ジョイント構造の枝の長さで指定するとき,その指定により一義的に形状を表現するためにはバー・ジョイント構造が剛でなければならない.しかし無限小運動が存在しても,それが実現不可能ならば形状を一義的に定義できる.従って形状の一義性という問題に限って言えば実現可能な無限小運動だけに注意すればよい.ところが実現不可能な無限小運動も以下の意味で形状の定義において注意を要する.

枝の長さをコンピュータ上の有限桁のデータとして与えるときには誤差という問題が不可避である.そうした微小

誤差が枝の長さに対して生じたとき、無限小運動の方向に、その微小誤差に対して相対的に大きなずれが生じる。図3.1にその例を示した。3角形ABCと3角形ABC'でAC'とACの間にdだけ微小な差が生じるとCC'には$O(\sqrt{d})$の差が生じる。$\sqrt{d}$はdが小さいときにはdに対して十分大きい。このような寸法の指定は形状の表現においてはよくない指定であると言うことができる。

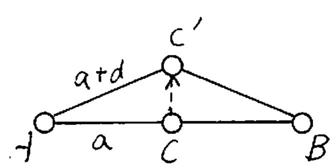


図3.1 特殊位置条件と微小誤差

3.2 バージョイント構造の特殊位置条件の例[9]

isostaticなバージョイント構造のうち基本的なものは定理2.8〜2.11により特殊位置条件を求めることができるが、2次元バージョイント構造に対してそうした例と定理2.8〜2.11からは導かれない例を図3.2に示し、それに対する特殊位置条件を表3.1に示した。

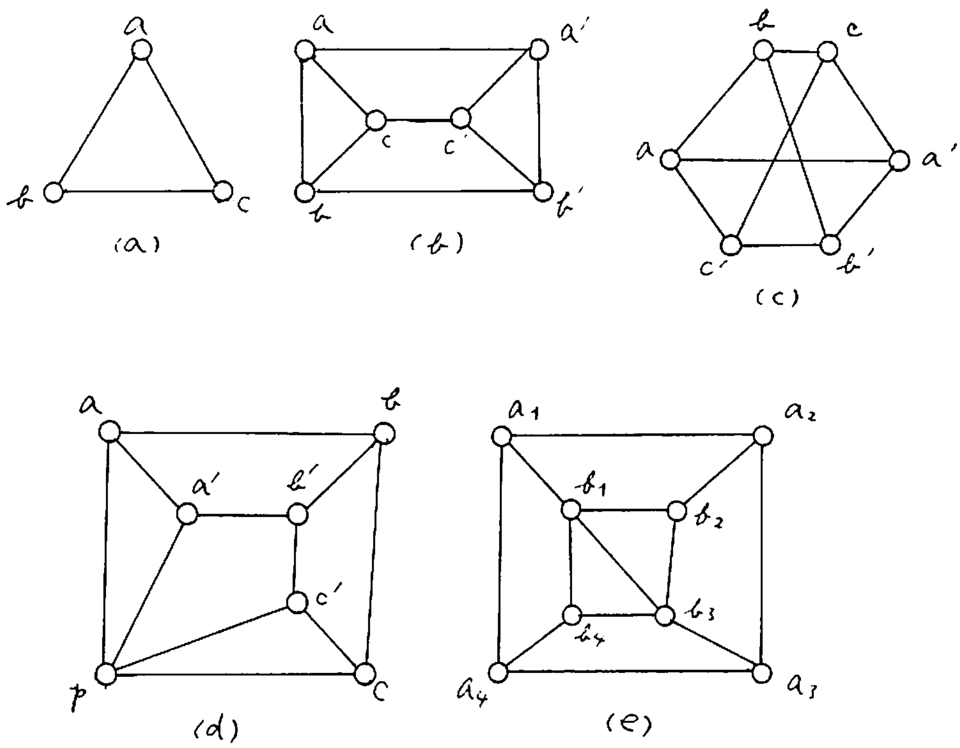


図3.2 isostaticな2次元バージョイント構造

表3.1 図3.2に対する特殊位置条件

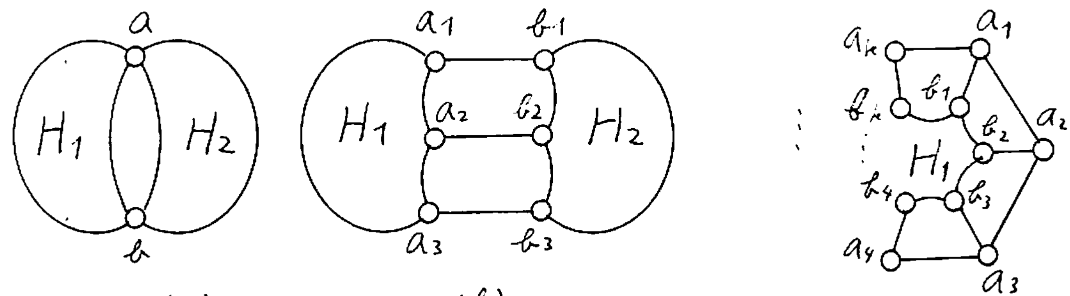
特殊位置条件	幾何学的意味
(a) [abc]	・3点が同一直線上にある.
(b) [abc][a'b'c']・([abb'][a'c'c]−[a'bb'][ac'c])	・2つの3角形のいずれかが同一直線上にある.または3直線aa', bb', cc'が一点で交わるか平行である.
(c) [abc][ab'c'][a'b'c'][abc'] −[a'bc][a'b'c'][ab'c][abc']	・6点が2次曲線の上にある.[12]

表3.1（続き）

特殊位置条件	幾何学的意味
(d) $[paa'][pcc'] \cdot ([aba'][bcb'][b'c'p] - [abb'][bcb'][a'cp] + [abb'][bcc'][a'b'p])$	・2つの3角形のいずれかが同一直線上にある．または（abと$a'b'$の交点），（bcと$b'c'$の交点），pの3点が同一直線上にある．
(e) $[b_1b_2b_3][b_1b_3b_4] \cdot ([a_1a_2b_1][a_2a_3b_2][a_3a_4b_3] \cdot [a_4a_1b_4] - [a_1a_2b_2][a_2a_3b_3] \cdot [a_3a_4b_4][a_4a_1b_1]$	・2つの3角形のいずれかが同一直線上にある．または（a_1b_1とa_2b_2の交点），（a_3b_3とa_4b_4の交点），（a_1a_4とa_2a_3の交点）の3点が同一直線上にある．

図3.2で(a)の特殊位置条件は定理2.8と定理2.9より導かれる．定理2.10により(b)，(d)，(e)の3角形部分に対しては(a)と同様の因子を持つことがわかる．

定理2.10を使えるような部分構造の組合せのパターンを図3.3に示し，表3.2にそれぞれに対する特殊位置条件を示した．



(a) (b) (c)

図 3.3 isostaticな2次元バー・ジョイント構造の組合せ

表 3.2 図3.3に対する特殊位置条件

制約	特殊位置条件
(a) $H_1, H_2 \cup \{a, b\}$ が isostatic	$\cdot C(H_1) \cdot C(H_2 + \{a, b\})$
(b) H_1, H_2 が isostatic	$\cdot C(H_1) \cdot C(H_2) \cdot ([a_1 b_1 a_2] \cdot [a_3 b_3 b_2] - [a_1 b_1 b_2][a_3 b_3 a_2])$
(c) H_1 が isostatic	$\cdot C(H) \cdot ([a_1 a_2 b_1] \cdots [a_k a_1 b_k] + (-1)^{k+1} [a_1 a_2 b_2] \cdots [a_k a_1 b_1])$

3.3 特殊位置条件を求めるアルゴリズム

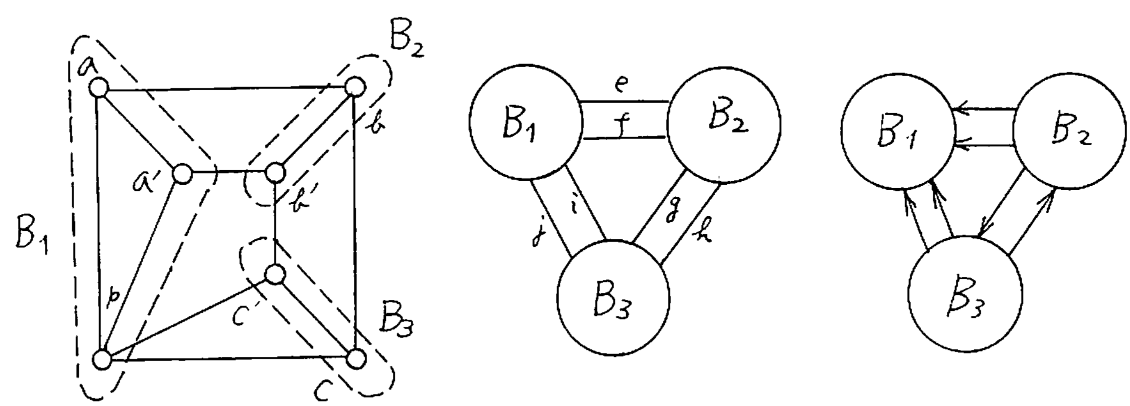
バー・ジョイント構造の意味でisostaticなグラフが与えられたとき それに対する特殊位置条件を求めるアルゴリズムを

作りたい.

3.3.1 バー・ボディ構造の利用

バー・ジョイント構造に対する直接的な性質，つまり2.1.2.項や3.2節で述べた諸定理や例を用いる他にバー・ボディ構造を利用することが考えられる. バー・ボディ構造の枠組に入れることができれば，2.2.3項で述べた方法により，(バー・ボディ構造としての)特殊位置条件を求めることができる. バー・ジョイント構造をバー・ボディ構造の枠組に入れる際に注意しなければならないことがいくつかある. まず各立体はfullでなければならないから，2次元においては線分を含む剛構造である必要がある. また，立体同士は点を共有していてはならない. しかし逆にこれらの条件を満たしていればよいのだから，バー・ジョイント構造で，点を共有しない線分(または3角形)の集合で頂点全体を覆うことができれば，バー・ジョイント構造をバー・ボディ構造にすることができる. 例えば図3.2(d)についてそれを行なってみると，立体として B_1 = 3角形 $aa'p$，B_2 = 線分 bb'，B_3 = 線分 cc' のようにとることができる(他のとり方もあ

る). これらの接続関係は図3.4(b)に示したようになり, このバー・ボディ構造に対する特殊位置条件は $[efg][hij]-[efh][gij]$ となる.



(a) バー・ジョイント構造　(b) (a)のバー・ボディ構造　(c) fan図

図3.4 バー・ジョイント構造をバー・ボディ構造にする例.

ところがこのようにすると, バー・ジョイント構造としては生じてくるはずの3角形 $cc'p$ に対する特殊位置条件は出てこないという問題が生じる.

3.3.2 階層構造の利用

定理2.10により, Gの特殊位置条件は, その isostatic な部分構造に対する特殊位置条件を因子として含む. このように部分構造を積み重ねることにより特殊位置条件を求めるというのは2.1.3項で述べたバー・ジョイント構造の階層

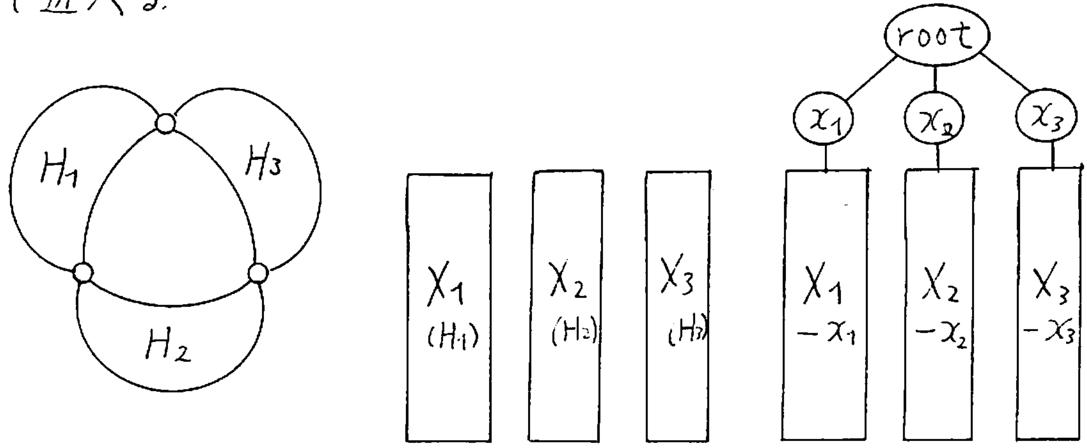
構造にそのまま対応している. 階層構造を用いて特殊位置条件を求めていくという方式をとれば, バーボディ構造の利用で生じた問題は回避される.

3.3.3 階層構造を利用したアルゴリズム

(a) 階層構造をたどるアルゴリズム

階層構造を利用して剛な部分構造をたどっていくという考え方に基いて, アルゴリズムを書き下すことにする. そのための準備として階層構造について付加的な概念を導入する. まず階層構造とは図2.3(b)のように示される図であり, 同じ半順序をもつ枝集合はまとめて1つの節点に入れる. また図3.5(a)に示した例のように, 複数の階層構造 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ からなるときは, 各々の極大な節点 $x_1, \cdots, x_m$ をとって, それらから0個の枝を持つ仮想的な節点 root への階層を付け加える (root $\succeq x_1, \cdots, x_m$). さらに $a \succeq b$ であり, かつ $a \succeq c \succeq b$ なる c が存在しないとき, a を b の子節点と呼び, b を a の親節点と呼ぶことにする. 以上に基いて図3.6にアルゴリズムを示す. これは階層構造をたどる手順を示したものであり

具体的に特殊位置条件を求めるアルゴリズムについては(b)で述べる.



(a) バージョイント構造　(b) (a)の階層構造　(c) rootの付加

図3.5 複数の階層構造からなる場合

procedure PURECONDITION(G):

begin

1. $X \leftarrow G$の階層構造(必要ならrootを付加する);

2. $a \leftarrow X$の極小節点の1つ;

3. repeat

begin

4. $B \leftarrow \{b_i \mid b_i$は$a$の親節点$\}$;

5. for $b_i \in B$ do $C_i \leftarrow \{c_{ij} \mid c_{ij}$は$b_i$の子節点, $c_{ij} \neq a\}$;

6. $\Pi \leftarrow \{b_i \mid b_i \in B,\ C_i = \phi$ または $\forall c_{ij} \in C_i$ が極小$\}$;

7. $U \leftarrow B - W$;

8. for $b_i \in W$ do

begin

9. a, b_i, C_i に対する特殊位置条件の既約因子を求める; ①

10. X で $c_{ij} \in C_i$ をすべて b_i に縮約する; ②

end;

11. if $U \neq \phi$ then

begin

12. $c^* \leftarrow \{c_{ij} \mid b_i \in U, c_{ij}$ は極小でない$\}$ の1つの元;

13. $a \leftarrow \{d \mid c^* \gneq d, d$ は極小$\}$ の1つの元;

end

14. else X で $b_i \in B$ をすべて a に縮約する ②

end

15. until X がただ1つの節点である

end

図3.6 特殊位置条件を求めるアルゴリズム

図3.6中①の手順きについては(b)で述べる. 図3.6②の手続きは次のように書ける.

Xで節点pを節点qに縮約するとは次の手続きによりXを変形することである:

pの親節点をすべてqの親節点に加え, pに属する枝をすべてqに属する枝に加えた後, Xからpを除去する.

(b) 特殊位置条件の既約因子を求める方法

図3.6の手続きのうち①の手続きを考える. ①を実行する直前においては階層構造は一般に図3.7の形をしている.

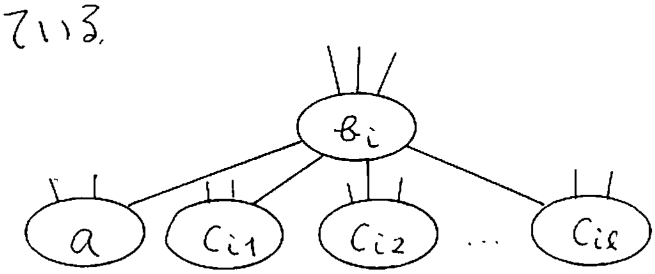


図3.7　図3.6①を実行する直前の階層構造

$a, C_{i1}, \dots, C_{il}$に対応するisostaticな部分構造をH_0, $H_1, \dots, H_l$と書くことにし, B_iに対応する枝集合をH_{B_i}と書くことにする. 図3.7の階層構造について特殊位置条件の

既約因子を求めるアルゴリズムを構成したい．ここでは特に2次元の場合を考える．

(6-1) 1つの節点の特殊位置条件

$H_0, \cdots, H_\ell$ のうち図3.6のアルゴリズムの行番号1. における λ の極小節点となっているものについてまず特殊位置条件の既約因子を求める．このような H_i が以下の (i), (ii), (iii) のいずれかの条件を満たすと仮定すれば，それぞれ既に述べた方法を用いて特殊位置条件の既約因子を求めることができる．

(i) H_i は1本の枝のみからなる（定理2.8参照）．

(ii) H_i は3角形をなす（図3.2(a) 参照）．

(iii) H_i はバーボディ構造の枠組に入れることができる（つまり互いに点を共有しない H_i の枝集合で H_i の頂点全体を覆うことができる．3.3.1項参照）．

(6-2) 定理2.9の利用

$H_0, \cdots, H_\ell$ のうち1本の枝だけからなるものの集合を I とし，それ以外のものの集合を J とする．枝 $e \notin I \cup H_{全}$ で

以下の(i),(ii)の条件を満たすものが存在するとする.

(i) e, f は1点 p を共有する.

(ii) e, f の(i)以外の端点 q, r がいずれもある H_i $(0 \leqq i \leqq l)$ 内の点になっている. ただし $e, f \notin H_i$ である.

このとき, 特殊位置条件の既約因子として $[p\,q\,r]$ がとれる.

このあと, e と f のうち I に属するものは H_i に縮約する.

また H_{6i} に属するものは単に H_{6i} から H_i に移す.

(6-3) バー・ボディ構造の利用

(6-2)と同様に I, J を定義する. J の要素である構造は互いに1点も共有することがないとする. また以下の(i),(ii),(iii)を満たす枝集合 $E_6 \subseteq I \cup H_{6i}$ がとれたとする.

(i) E_{6i} は J の要素と1点も共有しない.

(ii) E_{6i} の異なる要素は点を共有しない.

(iii) $E_{6i} \cup J$ が含む頂点は $I \cup J \cup H_{6i}$ が含む頂点に等しい.

このとき, ボディの集合 $E_6 \cup J$ と枝集合 $I \cup H_{6i} - E_{6i}$ とからなるバー・ボディ構造とみなすことができ, バー・ボディ構造

としての特殊位置条件を求めることができる. この方法により図3.2(b),(c),(e),図3.3(b)及び図3.3(c)でkが偶数の場合の特殊位置条件は求められる.

(6-4) 図3.3(a)の利用

あるiについてH_iと$H_0 \cup \cdots \cup H_{i-1} \cup H_{i+1} \cup \cdots \cup H_\ell$とが2点$\alpha, \beta$で結ばれているとき, H_iのかわりに枝$\{\alpha, \beta\}$とした階層構造に対する特殊位置条件を求めればよいことになる. これによってH_iが(6-2)や(6-3)において定義されたIの要素となるため, (6-2)や(6-3)を新しい階層構造に対して適用してみることが考えられる. また, この繰返しにより$H_0, \cdots, H_\ell$がすべて1本の枝だけからなるようにできれば, $H_{b_i} \cup H_0 \cup \cdots \cup H_\ell$に対して(6-1)を適用してみることが考えられる.

(6-5) その他の例

(6-4)の付加によって, ほとんどの場合に対して特殊位置条件を求めることができると考えられるが, 図3.2(d)や図3.3(d)でkが奇数となるようなものなどは求められない.

このようなものは図3.6に示したアルゴリズムに対しては①(9行)に来たとき((b-2),(b-4)と組合せて)個別に調べるしかない.

(c) 具体例

実際にいくつかの例に対して図3.6のアルゴリズムを適用してみる.

まず簡単な例として図3.8(a)を考える. これは階層構造図3.8(b)を持つ。最初に、aに節点αが入る(2行), b_1にβ, b_2にγが入る(4行). b_1, b_2はともに子節点を持たないから $W=B=\{b_1, b_2\}$, $U=\phi$となる(5~7行). まずb_1について①を実行する:

特殊位置条件の既約因子を求める階層構造は図3.8(c)に示したとおりである. (b-2)の条件を満たす2本の枝としてa, bがとれる. 実際 $a, b \in I \cup H_{b_1} = H_0 \cup H_{b_1} = \{a, b, c\}$であり$a$, bは1点pを共有し他の端点q, rがいずれもH_0内の点になっていて$a, b \notin H_0$である. 従って特殊位置条件の既約因子として$[p\,q\,r]$が得られる. a, bの枝をH_0に移すと1つの

節点となるので①の手続きを終了する.

更にb_2について①を実行して同様に特殊位置条件の既約因子[qrs]を得る. $U=\phi$だからb_1, b_2をaに縮約して図3.8(d)になる(14行). これは1つの節点となるので手続きを終了する(15行).
最終的に図3.8(e)の形の特殊位置条件が得られる.

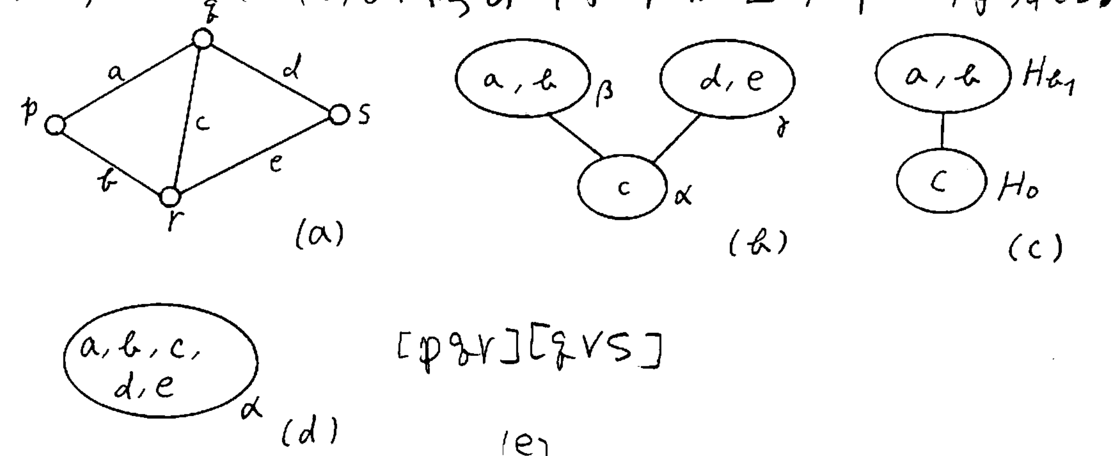


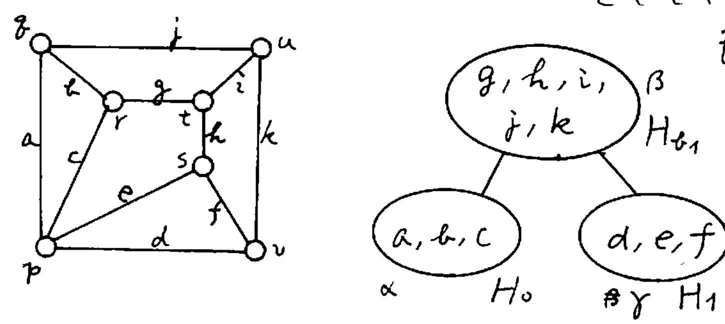
図3.8 特殊位置条件を求めるアルゴリズム~~(1)~~の振舞いの例I

次に図3.9(a)を考える. これは階層構造図3.9(b)を持つ. 最初に, aに節点αが入る(2行). b_1にβが入り(4行), c_{11}にγが入る(5行). c_{11}は極小だから$W=B=\{b_1\}$, $U=\phi$となる. b_1について①を実行する:

(b-1)によりH_0について[pqr], H_1について[psu]を得る. (b-1)～(b-4)が利用できないので~~の利用では~~これ以上の既約因子を求められない. ~~しかし[pqr],[psu]という因子はきちんと求められ, バー・ボディ構造の直接の利用により生じた問題は回避される.~~ そこでc_{11}を

← b_1 に縮約する(10行).

$U=\phi$ だから a に b_1 を縮約する(14行). これは1つの節点になるので手続きを終了する(15行). 最終的に図3.9(c)の形の特殊位置条件が得られる. この例では手続きとしては終了するが求められない既約因子が存在する。



(a) (b)

[pqr][psv]·C

(Cはこの手続きで求められない既約因子)

(c)

図3.9 特殊位置条件を求めるアルゴリズム~~(甲)~~の振舞いの例 II

次に図3.10(a)について, 階層構造をたどる手順と, 求められる特殊位置条件の既約因子を示す. 最初に節点αをaとして, 図3.8の例と同様に図3.10(c)まで手続きが進む. ここまでで求められる特殊位置条件の既約因子~~として~~は[qrs], [pqr]~~が~~である. ここで今度は節点βをaとして(13行)図3.10(d)まで手続きが進む. 図3.10(d)でαとβは1点も共有しないからバー・ボディ構造図3.10(e)をなし, ここまでに更に特殊位置条件の既約因子として[tuv][uvw]が求められ, バー・ボディ構造としての既約因子[fgh]が求められ, 手続きを終了する. 最終的には図3.10(f)の形の特殊位置条件が得られる.

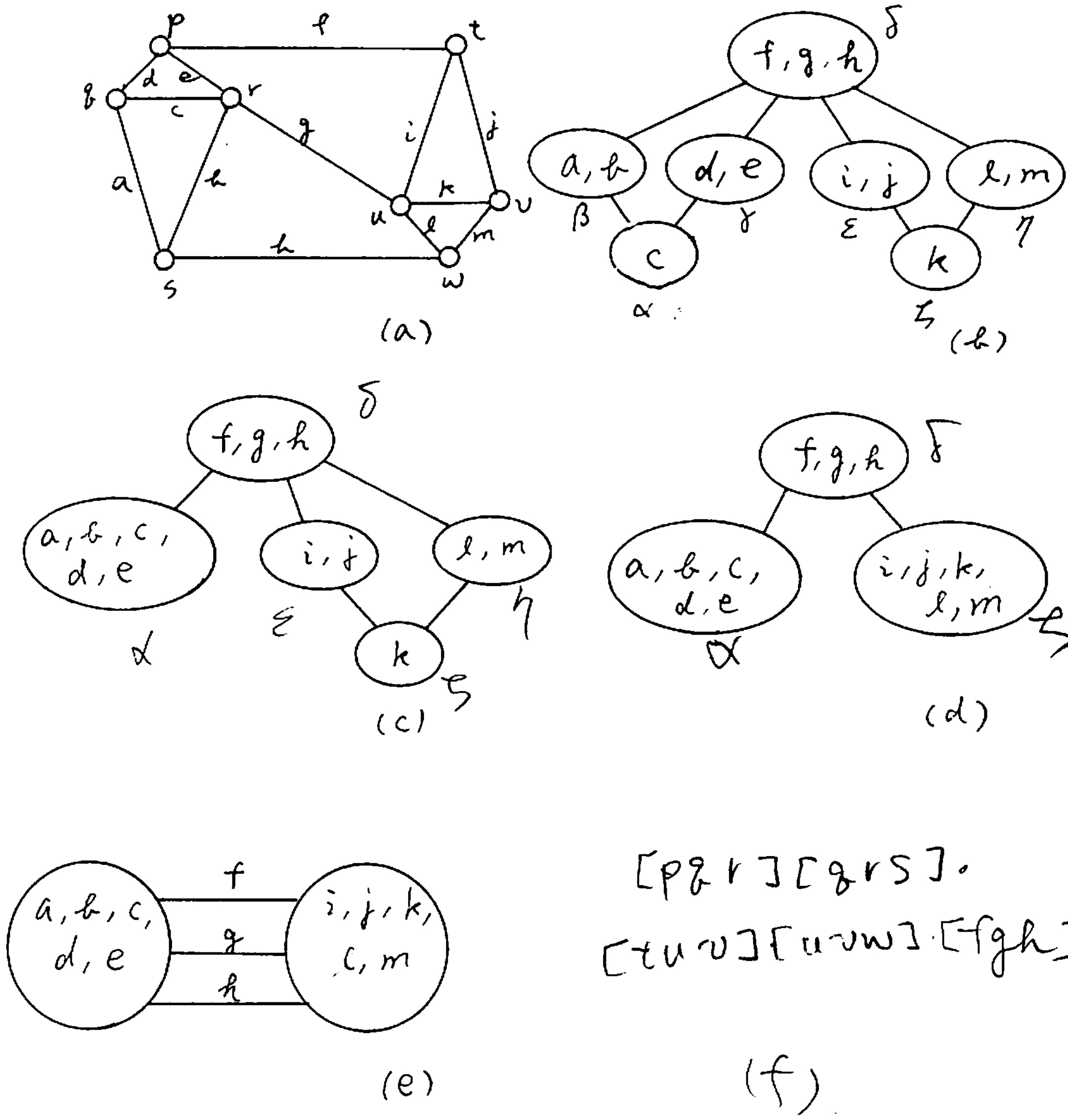


図3.10 特殊位置条件を求めるアルゴリズム~~(Ⅲ)~~ の振舞いの例 Ⅲ

第4章 寸法・角度の指定による形状表現法

形状表現を第2章で述べたバー・ジョイント構造と対応させ，寸法や角度を適正に指定する方法について述べる．

4.1 寸法の指定による形状表現法 [6]

物体の形状を，その物体上の2点の間の寸法を何ヶ所か指定することにより定義することを考える．このような寸法の指定は2点間に剛な棒を入れることと等価である．寸法の指定された点を頂点とすれば，頂点と剛な棒はバージョイント構造をなす．従って寸法指定によって物体の形状を一義的に決定できるかどうかは，対応するバージョイント構造が剛であるかどうかという問題に帰着される．更にそのような寸法指定に冗長性がないようにするためにはそのバージョイント構造がisostaticであればよい．

2.1.3.で，バージョイント構造は部分構造から全体を構成するような階層構造をなすことを述べた．上記の

寸法指定により形状を作成する際には1つ1つの寸法値をもとに部分から全体を作っていくという手順をたどるのであるが，これはまさに階層構造の意味そのものである．このような見地から階層構造を眺めると，寸法指定が形状の作成しやすさに対して適正なものであるかを論じることができる．形状の作成のしやすさというのは，1ヶ所から出発して，少しずつ段階的に全体を構成していけることを意味する．こうした意味では図2.3で示したような階層構造は適正でない．まず第1に極小となる節点が複数あるため，1ヶ所から出発して構成していくことができない．また5つもの枝を含む節点があるが，これはこの5つを同時に決めなくてはならず，一般には作図不可能である．

一方isostaticなグラフ構造をもつ寸法指定でも，対応するバージョイント構造が特殊位置となってしまうときには適正な寸法指定とはいえない．3.1節で述べたように，そのような場合には形状が一義的に決定できない

こともあるし，そうでないときでも微小な誤差に対して形状が大きく変化してしまうという問題も持っているからである．このような寸法指定は特殊位置条件が0かどうかを判定することによって見つけることができる．

4.2. 角度の指定による形状表現法

4.2.1. バージョイント構造における角度の指定

物体の形状は4.1.節で述べたような寸法の指定だけで表現されるとは限らない．一般には2線分の間のなす角度，平行な2線分の間の距離，点と線分との間の距離などで指定される．ここでは2線分の間の角度を指定することを考える．また一般の工業用図面などでは，2線分が平行である，または垂直であるといったことは暗黙の情報として陽には指定されていない場合がほとんどであり，それにもかかわらず頻繁に使われている情報である．しかしコンピュータの上で形状を表現する際にはそのような情報も陽に入れる必要がある．

平行も垂直も2線分間の角度がそれぞれ0度，90度という指定に対応する．

さてバージョイント構造で2本の枝$\{a, b\}$，$\{c, d\}$の間の角度θが一定であるという条件を考えよう．θを陽に扱うことは難しいので，代わりに$\cos\theta$が一定であるという問題に置きかえると，(4.1)式を得る(a, b, c, dを各点のベクトルを表す記号としても使うことにする)．

$$\cos\theta = \frac{(a-b)\cdot(c-d)}{|a-b|\cdot|c-d|} = const. \qquad (4.1)$$

ここで次の制約を設ける．

制約4.1　角度を指定するのは2線分の長さがそれぞれ指定されている場合に限る．

このとき(4.1)式は(4.2)式のようになる．

$$(a-b)\cdot(c-d) = const. \qquad (4.2)$$

各点を時間の関数と見て時間で微分すれば(4.3)式を得る．

$$(\dot{a}-\dot{b})\cdot(c-d) + (a-b)\cdot(\dot{c}-\dot{d}) = 0 \qquad (4.3)$$

これは(2.2)式と同様，線形の制約であるから角度の

指定は次のような行を付加することで剛性行列に入れることができる.

$$\begin{array}{cccccccccc} & & \text{頂点}a & & \text{頂点}b & & \text{頂点}c & & \text{頂点}d & \\ \text{角度}\theta & (\cdots & c-d & \cdots & -(c-d) & \cdots & a-b & \cdots & -(a-b) & \cdots) \end{array}$$

ただし頂点a, b, c, d以外の要素はすべて0である.

また剛性行列には制約4.1.により既に次の2本の行が入っている.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccc} & \text{頂点}a & & \text{頂点}b & & \text{頂点}c & & \text{頂点}d & \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{枝}\{a,b\} \\ \text{枝}\{c,d\} \end{array} & \left(\begin{array}{ccccccccc} \cdots & a-b & \cdots & -(a-b) & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & c-d & \cdots & -(c-d) & \cdots \end{array}\right) \end{array}$$

4.2.2. 角度の指定を含むバージョイント構造の剛性

角度の指定を剛性行列に入れることができた結果,角度の指定を含むバージョイント構造においても,含まない場合と同様に剛性を議論できる.そこで角度の指定を含むisostaticなバージョイント構造をどのように作ったらよいかを考える.

まず,角度の指定を含まないisostaticな構造に1つの角度指定を行なった場合を考える.このとき情報としては1つ冗長である.従ってisostatic性を保つためには,どこか

1ケ所の枝を取り除かなければならない.どのような枝が取り除けるかを考える.

補題4.1 角度指定を含まないバージョイント構造の意味でisostaticなグラフGをとる.Gの任意の2本の枝a,bをとり,a,bを含むisostaticなグラフで極小のものを$G' \subseteq G$とするとき,Gから$c \in E(G') - \{a, b\}$を任意に除くとG内にはaとbの角度を変化させるような運動が生じる.

isostaticなグラフで極小なものは2.1.3項で述べた階層構造から容易に求めることができる.補題4.1の意味するところは,例えば図2.3(a)に対して枝bと枝iをとったとき,bとiを含むisostaticな部分構造のうち極小のもの$\{a, b, \cdots, g, h, i, j, k, \cdots, u\}$から任意の枝(例えば$s$)を除くと,$b$と$i$の角度を変化させるような運動が生じるということである.直観的に自明な補題4.1をもとに以下の定理が成り立つ.

定理4.2 角度指定を含まないバージョイント構造の意味でisostaticなグラフGをとる.Gの2本の枝a bを

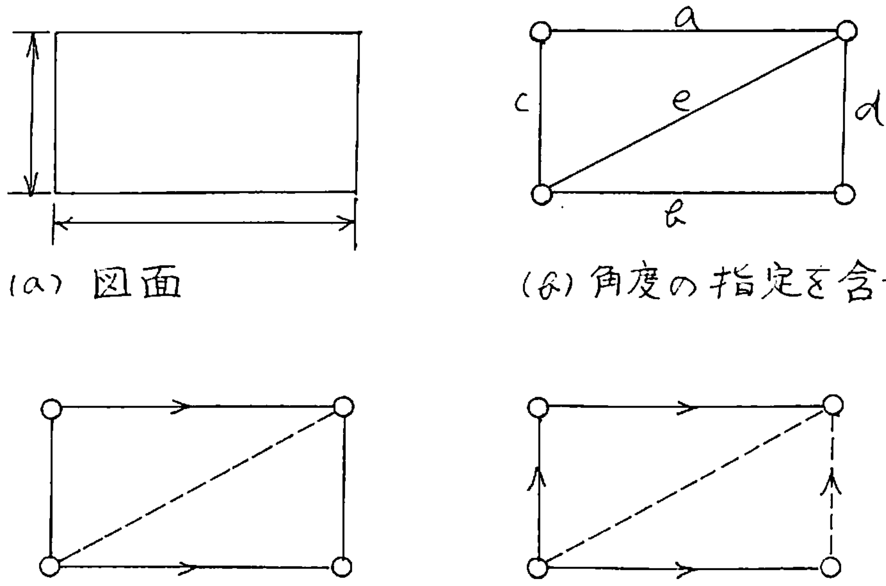
とり，a, b を含む isostatic なグラフのうち極小のものを $G' \subseteq G$ とするとき，G から $c \in E(G') - \{a, b\}$ を任意に除き，a と b の間に角度を指定すると，G は isostatic となる．

定理4.2によって角度が指定された isostatic な構造に対してさらに別の場所に角度を指定する場合を考える．角度の指定を含む極小な剛構造がわかれば定理4.2と同様の手順で2つの角度の指定を含む isostatic なバージョイント構造が作られる．このようにして順次複数の角度を含む isostatic なバージョイント構造が構成できることがわかる．ただし制約4.1により一旦角度が指定された枝についてはその枝の寸法の指定(つまり構造としては枝そのもの)を除くことはしない．

制約4.1は(4.1)式を(4.2)式に変形する際に料した制約であるが，上記のような角度の指定においては，例えば以下のような不都合が生じる．

図4.1(a)のような図面があったとする．この中には暗に2直線の平行と1ヶ所の垂直が仮定されている．これを表

現するためにまず(b)のような角度指定を含まないisostaticなバージョイント構造を考える. そして枝aと枝bの角度0度を指定し,枝eを除いて(c)を作る. 次に枝cと枝dの角度0度を指定して枝を除こうとしても制約4.1を満たすような枝は存在しない. 無理に枝dを取り除いて(d)を作ると, aとdの長さが異なるときには図面として矛盾を生じてしまう. 一方図4.2の場合のように制約4.1を無視した枝の除き方をしても矛盾が生じないようにできることもある.



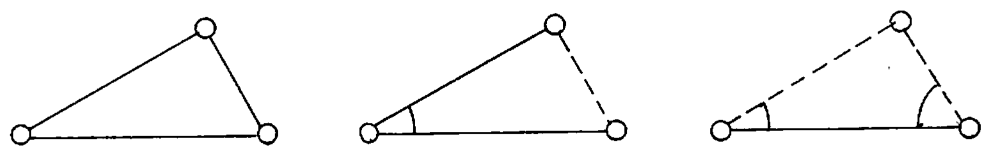
(a) 図面

(b) 角度の指定を含まない.

(c) 角度の指定1つ

(d) 角度の指定2つ(制約4.1に反する)

図4.1 角度の指定を含む寸法指定の例(I)



(a) 3辺　(b) 2辺夾角　(c) 2角夾辺

図4.2 角度の指定を含むす法指定の例 (II)

4.2.3. 角度の指定と階層構造

角度の指定を含んだ場合も階層構造を考えることができる。ここで4.2.2項の手順に従って，角度指定を含まない構造に対して角度の指定を加えていくと，一般に階層構造は変化する。例えば，図4.3(a),(b)はそれぞれ(c),(d)の階層構造をもつが，4.2.2節の手順に従って(e),(f)のように角度の指定を入れるとそれぞれ(g),(h)のように階層構造が変化する。(d)と(h)を形状の作成のしやすさという観点で比較してみると，(d)では9個の枝を一度に決めなければならないのに対し，(h)では角度の指定された部分から始まって少しずつ段階的に決めることができる。

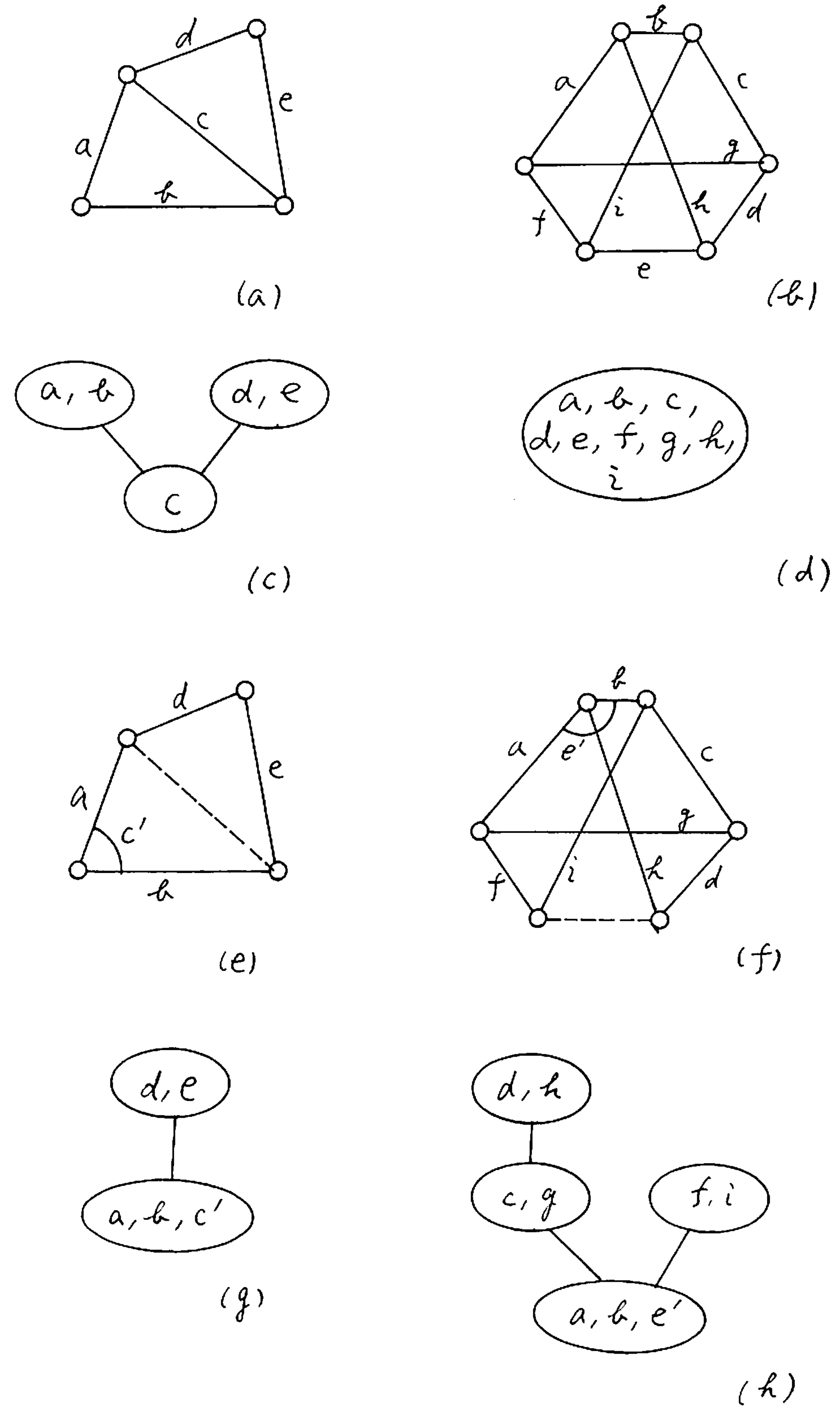


図4.3 角度の指定による階層構造の変化

図4.3に示したような階層構造の変化を一般的に求めるアルゴリズムが存在すれば，極小な部分構造がすぐに求められるから，角度の指定をすることが容易になるが，一般にそれは難しい．そこで少し目標を変えて，角度指定を含んだバージョイント構造から，それと等価な，角度指定を含まないバージョイント構造を求めるという問題を考えてみる．

ここで角度の指定を以下の(i)と(ii)の場合に分けて考える．

(i) 2つの枝が1点を共有するようなとき，その2つの枝の間の角度の指定．

(ii) (i)以外の2つの枝の間の角度の指定

角度の指定が(i)の場合には，その2つの枝とその間の角度から決まる3角形と等価(階層構造は一般に異なる)だからそれに置きかえればよい．

例えば図4.3(e)と等価な構造は図4.3(a)となる．また図4.3(f)と等価な構造は図4.4(a)となり，その階層構造は図4.4(b)になる．

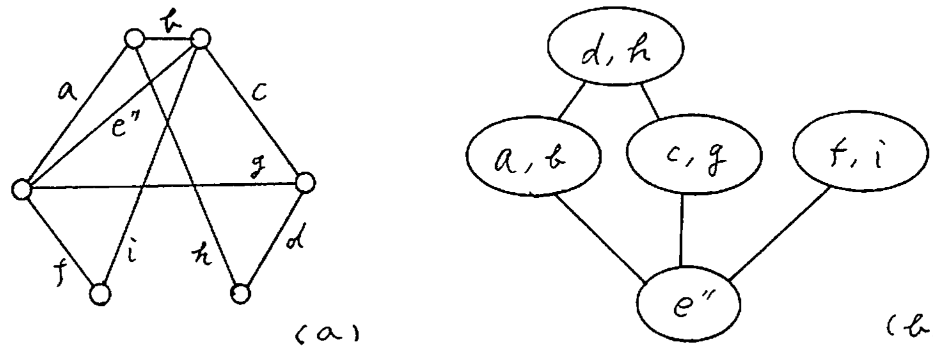


図4.4 図4.3(f)に等価な角度指定を含まないバージョイント構造

(ii)の角度指定が1つだけ含まれているときを考える.(i)の角度指定に対しては既に上記の方法で等価なものに置き換えられているとする.このとき角度の指定を除くと自明でない運動が生じるが,どこかに1本枝を挿入することによりその運動を阻止することができるはずである.従ってそのような枝を探すことにより等価な角度の指定を含まないバー・ジョイント構造が求められる.

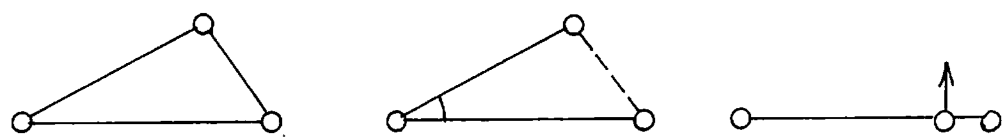
4.2.4. 角度の指定と特殊位置条件

角度の指定をしたとき特殊位置条件がどのようなものになるかを考えてみる.

角度の指定が剛性行列の行として表現できたから角度の指定を含むisostaticなバージョイント構造に対しても特

殊位置条件は同様に定義できる.

そこで角度指定が入った場合の特殊位置条件がどうなるかという問題に対して,図4.5の例に基いて述べていくことにする.



(a)　(b)　(c)

図4.5 角度の指定に対する特殊位置条件

図4.5で(b)は(a)に1ヶ所角度を指定し,代わりに枝を1本除いたものである.(a)では(c)のように3点が同一直線上に並んだとき特殊位置条件が0になるがそれは矢印のような自明でない無限小運動が生じてしまうことに対応している.これに対し,(b)においては3点が同一直線上にあっても角度が一定という条件によって,(a)のような無限小運動は生じない.ところが角度の指定に対して自然に導入される特殊位置条件は0になってしまうのである.これは以下の理由による.

角度指定を剛性行列の行として表現する際にθを直接使うかわりに$\cos\theta$を用いた.$\cos\theta$は$\theta=0,\pi$において導関

数の値が0である. つまり図4.5(c)において矢印方向の微小変化に対して$\cos\theta$は変化しない.

従って(b)のような場合には特殊位置条件が0になってもそれは単なる形式的なものであり物理的に何ら問題を生じない. (a)と(b)とは等価なバージョイント構造をなしているが, 特殊位置がないという意味において(b)の方が適正な寸法指定であると言うことができる.

第5章 結論

形状の定義法やその適正さについて，バー・ジョイント構造の枠組に入れることによって，バー・ジョイント構造のもつ階層構造や特殊位置条件などを用いて論じてきた．主な未解決部分は，第1に特殊位置条件を求めるアルゴリズムを任意のisostaticなグラフに適用できるように拡張することと，できるだけ小さなオーダーの計算量でそれを求めるようなアルゴリズムに改良することであり，第2に角度指定を含めた場合にバー・ジョイント構造の階層構造に対応した構造を求めるアルゴリズムを構成することである．

本論文で述べた特殊位置の判定や角度の指定などは，単なる座標値を与えることによる形状表現では行ない得なかったことであり，以上のような諸問題が解決されれば，本手法の特徴を十分に生かすことができよう．

本論文で述べたような，あるいはそれに類するトポロジカルな形状表現法は，形状の情報を処理する必要性が増すに従って，重要度を増すことが期待される．

謝辞

卒業研究の半年間，親身になって御指導頂いた指導教官の杉原厚吉助教授に深く感謝します．また本論文を書くにあたり貴重なコメントを頂いた久保田光一助手，富岡豊助手，大学院生の磯部庄三氏をはじめ伊理研究室の皆様方に感謝します．

参考文献

[1] Laman, G. : On graphs and ~~the~~ rigidity of plane skeletal structures, Journal of Engineering Methods, Vol. 4 (1970), pp. 331-440.

[2] Nakamura, M. : On the representation of the rigid sub-systems of a plane link system, Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol. 29, No. 4 (1986), pp. 305-318.

[3] Sugihara, K. : On some problems in the design of plane skeletal structures, SIAM Journal of Algebraic and Discrete Methods, Vol. 4, No. 3 (1983), pp. 355-362.

[4] Sugihara, K. : A unifying approach to descriptive geometry and mechanisms, Discrete Applied Mathematics, Vol. 5 (1983), pp. 313-328.

[5] Sugihara, K. : A correspondence between line drawings of polyhedrons and plane skeletal structures, Proceedings of the First International Symposium for Science on Form (1986), pp. 273-280.

[6] 杉原 : 図形の移動と変形に関する推論技術, 情報処理, Vol. 28, No. 11 (1987), pp. 1485-1492.

[7] Tay, T. S. : Rigidity of multi-graphs I, linking rigid bodies in n-space, Journal of Combinatorial Theory, B36 (1984), pp. 95-112.

[8] Tay, T. S. and Whiteley, W. : Recent advances in the generic rigidity of frameworks, Structural Topology, Vol. 9 (1984), pp. 31-38.

[9] White, N. L. and Whiteley, W. : The algebraic geometry of stresses in frameworks, SIAM Journal of Algebraic and Discrete Methods, Vol. 4, No. 4 (1983), pp. 481-511.

[10] White, N. L. and Whiteley, W. : The algebraic geometry of motions of bar-and-body frameworks, SIAM Journal of Algebraic and Discrete Methods, Vol. 8, No. 1 (1987), pp. 1-32.

[11] Whiteley, W. : A correspondence between scene analysis and motions of frameworks, Discrete Applied mathematics, Vol. 9 (1984), pp. 269-295.

[12] Whiteley, W. : Infinitesimal motions of a bipartite framework, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 110, No. 1 (1984), pp. 233-255.