

球関数を用いた磁場の表現とダイナモへの応用

Y. Yokoyama & H. Shimizu

Bullard&Gellman dynamoはhomogeneous dynamoの祖であり、その考え方はself-sustain systemの基本として重要である。このダイナモのスキームは一見複雑に見えるが、誘導過程の基礎を理解すれば非常に明解であることが分かる。ここではBullard&Gellman dynamoを理解することを第一の目的とし、そのための準備として誘導過程の計算で用いられる球関数のモードと誘導磁場について初めに述べる。その後Bullard&Gellman dynamoについて述べる。また、Bullard&Gellman以降発達してきた乱流ダイナモについても触れ、最後に現在主流となりつつあるMHD理論とそのモデルを紹介する。

Magnet Hydro Dynamics

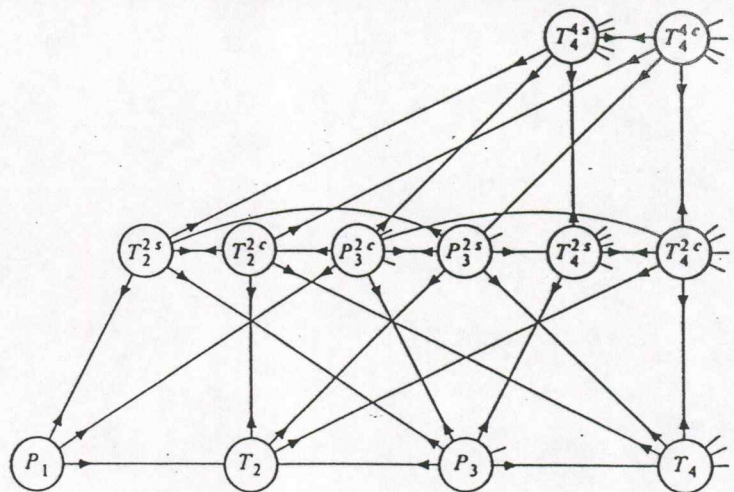


Fig. 6.8 Diagrammatic representation of the interaction of harmonics of velocity and magnetic fields when the velocity field consists of a T_1 ingredient and a P_2^{2c} ingredient. Each circle indicates an excited magnetic mode; coupling along the rows is provided by the T_1 -motion and coupling between the rows by the P_2^{2c} -motion. (From Bullard & Gellman, 1954.)

1. 球関数を用いた磁場の表現

1-1 トロイダルとポロイダル

磁場のポテンシャルは球関数を用いて

$$\phi = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} (g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi) P_n^m(\cos\theta) \quad (1)$$

と表される。ここで $P_n^m(\cos\theta)$ は半正規化ルジャンドル陪関数、 g_n^m 、 h_n^m はガウス係数である。 n は階数 (degree)、 m は次数 (order) と呼ばれる。トロイダル磁場とポロイダル磁場はこのポテンシャルを用いて

$$B_T = \nabla\phi \times r, \quad \text{トロイダル} \quad (2)$$

$$B_S = \nabla \times B_T \quad \text{ポロイダル} \quad (3)$$

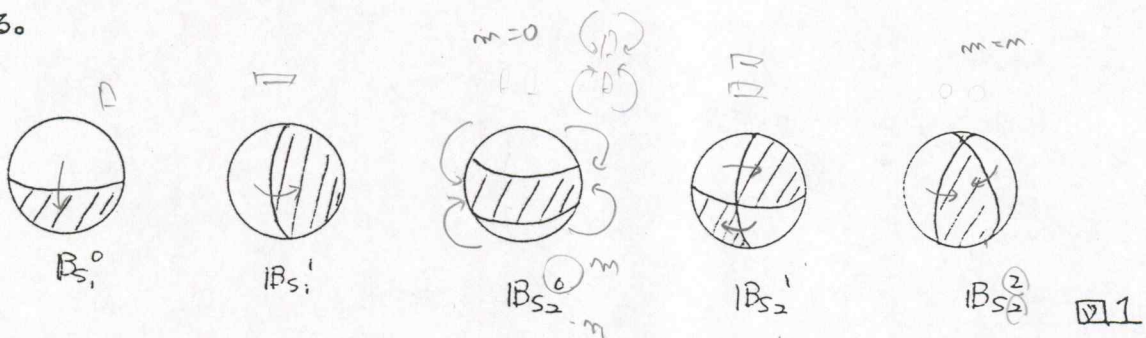
と表される。(2)式より明らかなようにトロイダル磁場は r 成分を持たない。即ち、地表への湧き出し、沈み込みのない磁場である。これに対してポロイダル磁場は r 成分を持つので核内より地表へ出てくることが出来る。我々が観測しているのはこのポロイダル磁場である。トロイダル磁場は直接観測することにはできないが、地球核内ではポロイダル磁場と同じ程度の強さであるかそれよりも強いと考えられており、ダイナモのメカニズムに大きく関係している。

速度場については、地球核内の流体運動が熱対流のようなポロイダル運動をしているのか、それとも地球の自転によって引き起こされる自転軸の周りの回転のようなトロイダル運動(対流のない運動)なのかが重要な問題である。そこで速度場についても磁場と同様にポロイダル、トロイダルのモードに分けて考えることが多い。

1-2 モード

ポロイダル磁場の湧き出しと沈み込みを図で表すと B_{S1}^0 、 B_{S1}^1 、 B_{S2}^0 、 B_{S2}^1 、 B_{S2}^2 は図1のよ

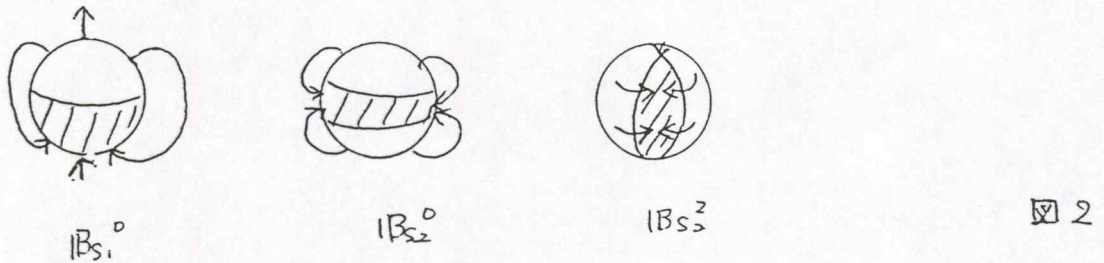
うになる。



◎ 斜線部分が沈み込み、白い部分が湧き出しを表す。一般に $B_{S_n}^m$ の図は経線を m 本等間隔に引き、緯線を $n-m$

本引いて、隣合わない部分に斜をかければできあがる。

湧き出し、沈み込みが判ればおおよその磁力線を描くことができる。図2のように湧き出しから沈み込みに向かって線を引くと磁力線を描くことができる。



次に、磁場のz成分（-r方向）を平面（地図）上に描いてみる。図1の $\overline{B_{S_2}^2}$ をz成分のコンターに直すと図3のようになる。

すと図3のようになる。

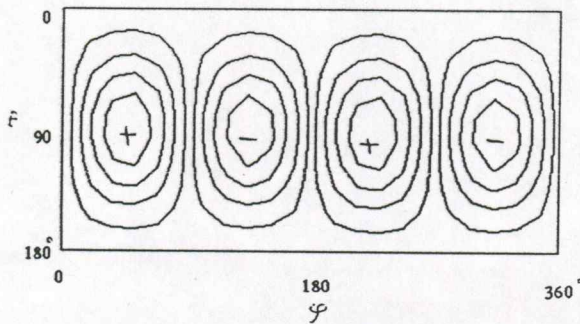
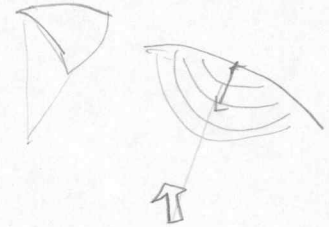


図3



モードのうちm(次数)=0のものは軸対称でzonalモードと呼ばれ、横縞模様になる。このモードは軸のまわりの回転による影響を受けない。また、n(階数)=m(次数)の西瓜のような縞が入ったモードはsectorialモードと呼ばれている。sectorialモードは赤道で振幅が最大となるので、

sectorialモードが著しい変化をする。

赤道付近で変化が起こっている。

のように考えることができる。

1-3 ガウス係数による表現

地磁気永年変化では西方移動(WESTWARD DRIFT)が有名である。この西方移動を球関数で展開したモードを使って表してみよう。例えば図4のようにモード(1, 1)が西へ移動したとする。

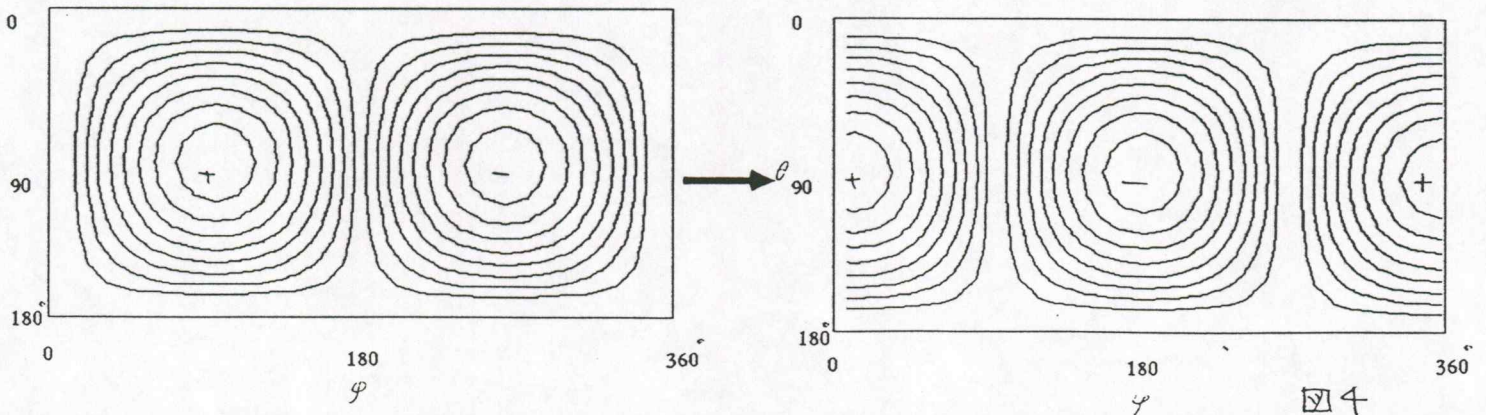
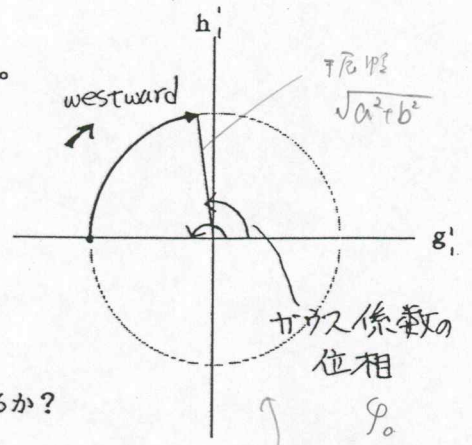


図4

この動きを g_1^1 、 h_1^1 で表してみると円周上を時計方向に動く軌跡になる。

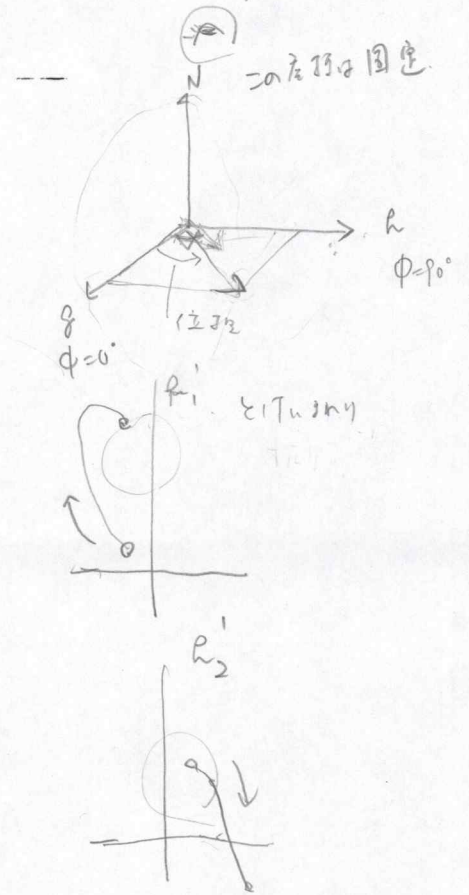
$$\sqrt{a^2+b^2} \cos(m\varphi - \varphi_0) \quad \text{図5}$$



考察 図4のパターンが斜めに動く時ガウス係数はどのように変化するか?

← 方位を中心に回転して 回転して

$$\sqrt{a^2+b^2} \cos(m\varphi - \varphi_0)$$



2. 誘導磁場のモード

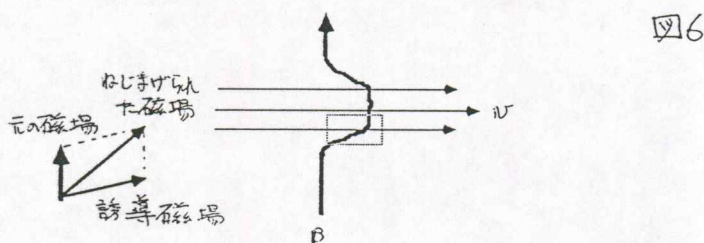
2-1 磁場の変形

磁場は電磁流体等を通るとねじ曲げられる。このことは、元の磁場に速度場によって新しく誘導された磁場が付け加わったと解釈することができる。ねじ曲げられた磁場は誘導方程式を用いて求めることができる。

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{\sigma\mu} \nabla \times \nabla \times B = \nabla \times (v \times B) \quad (4)$$

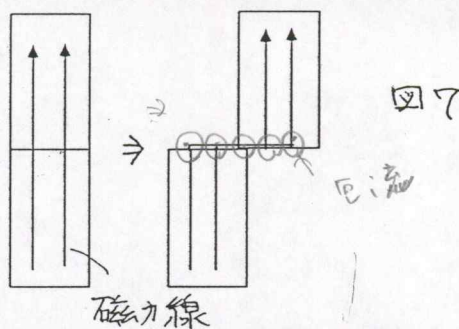
電流

B 、 v 、 σ 、 μ は磁場、速度場、電気伝導度、透磁率である。



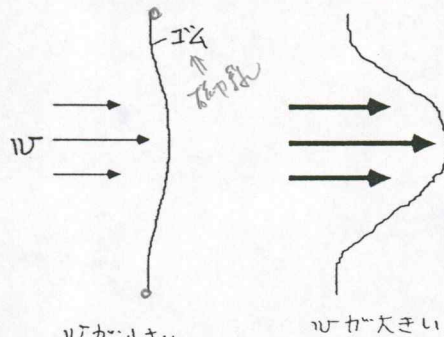
2-2 FROZEN-IN $\Rightarrow v = \infty$

磁場は v 、 σ 、 μ が大きいときは流線に沿って大きくねじ曲げられ、閉じ込められたようになる。この現象をFROZEN-INと呼んでいる。例えば、まっすぐなコンダクターを二つに切って動かすと磁力線はこれにくっついて動く。



この例は教科書によく載っているが、ダイナモでは核内の流体運動が起こすFROZEN-INを問題にするので、単に磁場の収まっている物体が動くのではなく、後からも次の物質がやってこなければならない。このため、図7では、実際と状況が異なるのではないかと指摘を受けたことがある。そこで、図8のような例に置き換えて考えてみよう。磁力線をゴム紐のようなものと考え、両端を固定して風を吹き付ける。そっと風を吹き付けるとゴム紐は動かないか、少ししか変化しない。しかし、強い力を送るとひもの中央部分は風の方向に流されてしまう。しかし、端が固定されているのでちぎれない限り全体が流れて行ってしまうことはない。

図8



このゴム紐の元に戻ろうとする力を表しているのが(4)式の左辺第二項である。 σ 、 μ はゴムがどれだけ伸びれるかの能力に相当する。 σ 、 μ が無敵大の時ゴムは無敵大まで伸び、左辺第二項は無視することができる。一方、(4)式の右辺は風に流されて引っ張って行く力、即ちゴムを曲げようとする力を表している。

2-3 誘導磁場のモード

磁場は速度場によってどのような変形を受けるのであろうか？それには、元の磁場から作られる新しい誘導磁場の形を知らなければならない。まず最初に、ポロイダル速度場がポロイダル磁場に及ぼす作用を考えてみよう。例えば、ポロイダルの(2, 1)という速度場は、ポロイダルの(1, 0)磁場に作用して新しくポロイダルの(1, 1)と(3, 1)、トロイダルの(2, 1)という誘導磁場を生み出す。即ち、(1, 0)の磁場はこの速度場を通るとポロイダルの(1, 0)、(1, 1)、(3, 1)とトロイダルの(2, 1)を重ね合わせた形に変形されるのである。[(n, m)は(階数、次数)を表す。]

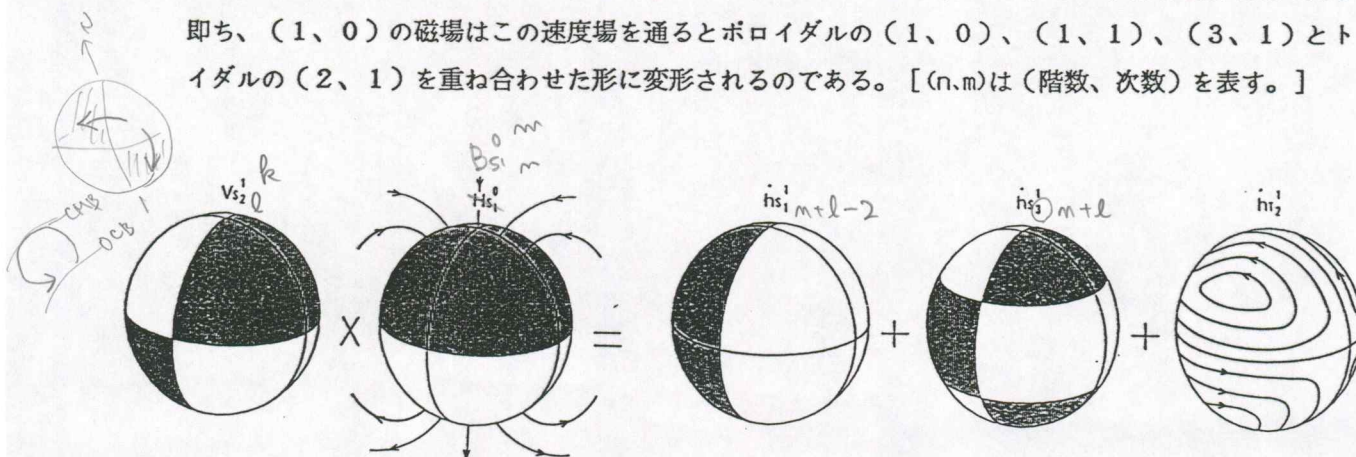


図9

誘導磁場の形を求めるには、原理的には(4)式の誘導方程式を計算しなければならない。しかし、そんな煩わしい事が嫌いな人のためには簡単な計算方法が用意されている。一般にモード(l, k)の速度場と(n, m)の磁場とでは、n+1個かl+1個のポロイダル誘導磁場を作ることができる。誘導磁場の次数はm±kと非常に簡単である。次数は勿論正でも負でも構わないが、良識ある人は正を使用している。一方階数の方であるが、まずn+l、n+l-2、n+l-4、...、n-lの値をとる。途中でn+1とl+1のうちの小さい方の数をモードの個数が越えるか、階数が次数より小さくなったらそこで打ち切れれば良い。

同じ組み合わせで作るトロイダルな誘導磁場は、ポロイダル誘導磁場とは1階ずれたモードになる。即ち、n+l-1、n+l-3、n+l-5、...、n-l+1の階数をとる。

この様に誘導磁場は、球関数の計算をしなくてもその形を容易に知ることができる。他の3つの組み合わせ、即ち、速度場がポロイダルで磁場がトロイダルな場合、速度場がトロイダルで、磁場がポロイダル、トロイダルな場合も同様に誘導磁場の形を知ることができる。4通りの速度場と磁場の組み合わせについて誘導磁場の形をまとめたのが表1である。

Table 1. The modes of an induced magnetic field.

	b	B_{s1}^m	B_{s2}^m
V_{s1}^k	b_r	$(n+l-2l-1, m\pm k)$ $i=0, 1, \dots, [(N+L-1)/2]$	$(n+l-2l, m\pm k)$ $i=0, 1, \dots, [(N+L)/2]$
	b_s	no mode exists	$(n+l-2l-1, m\pm k)$ $i=0, 1, \dots, [(N+L-1)/2]$
V_{s2}^k	b_r	$(n+l-2l, m\pm k)$ $i=0, 1, \dots, [(N+L)/2]$	$(n+l-2l-1, m\pm k)$ $i=-1, 0, \dots, [(N+L-1)/2]$
	b_s	$(n+l-2l-1, m\pm k)$ $i=0, 1, \dots, [(N+L-1)/2]$	$(n+l-2l, m\pm k)$ $i=0, 1, 2, \dots, [(N+L)/2]$

表1

3. DYNAMOへの応用

3-1 BULLARD&GELLMAN DYNAMO

BULLARD&GELLMAN (1954) は誘導方程式を用いてhomogeneous dynamoのモデルを作った。彼らのモデルはダイポールに速度場が作用して元の磁場とは異なる形の誘導磁場を作り、その誘導磁場にさらに別の速度場が作用し、やがて元の磁場と同じ形の磁場を作るというものである。そのシステムを示したのが図10である。前章で示したモードの計算方法を用いればこのモデルのトレースは容易である。

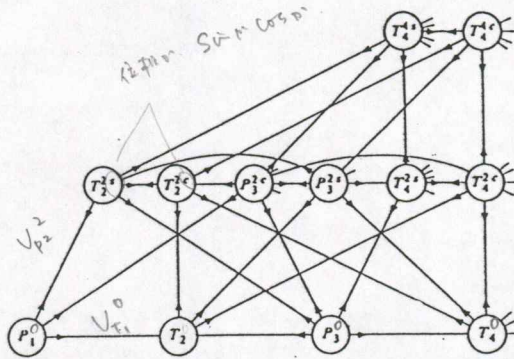
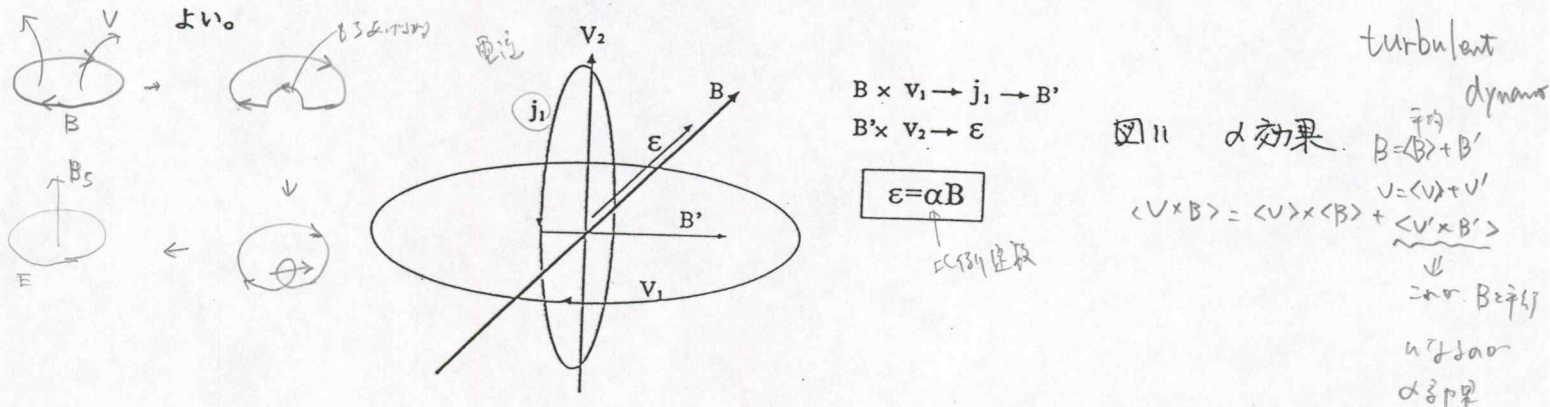


図10 Bullard & Gellman dynamo の scheme

当時はダイナモが存在可能であるか否かが問題であり、BULLARD&GELLMANの研究は定常ダイナモが存在できることを示したことで重要な意味を持つ（後にBullard & Gellman dynamoは固有値を持たず、定常に存在しないことが分かった）。しかし、表1を利用すれば、このタイプのダイナモはいくらでも作ることができ、現在ではダイナモの存在が可能であるか否かは全く問題にはならない。

3-2 α 効果

BULLARD&GELLMAN以降、速度場と磁場を平均して取り扱う乱流ダイナモが流行した。平均値のスケールと小さなスケールとに分けて考える方法である。乱流ダイナモの中で最も重要な効果が α 効果と呼ばれるものである。 α 効果とは磁場と平行な電場を作ることで、螺旋上の運動があるときに起こりやすい（図11）。この効果があるとトロイダルな磁場からポロイダルをつくることができ、ダイナモに非常に都合がよい。

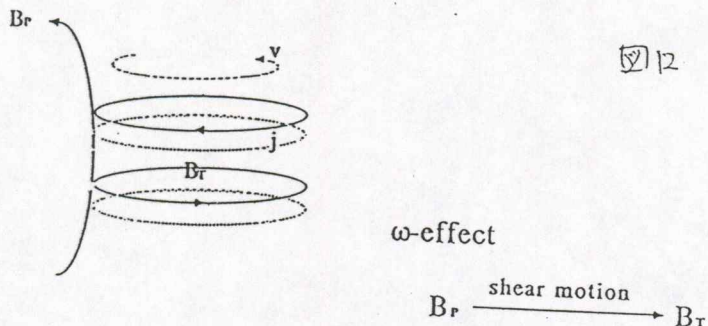


このように乱流ダイナモの小スケールの運動で起こる α 効果を考えると大きなスケールの運動では α 効果が起こらないように思えるかも知れないが、2章で述べた誘導磁場を变形する働きの中にも α 効果は働いている。例えば、トロイダルな磁場にポロイダルな運動が作用してポロイダル誘導磁場を作る、ポ

ロイダル磁場にポロイダル運動が作用してポロイダル磁場が誘導されるのも α 効果の一種である。

3-3 ω 効果

α 効果と並んで重要なのが ω 効果である。これは shear motion があると、ポロイダル磁場が巻き込まれてトロイダル磁場を作る効果である。この原理は2章で述べた frozen-in と同じである。ポロイダル (1, 0) 磁場にトロイダル (1, 0) 速度場が作用してトロイダルの (2, 0) 磁場を誘導するのは ω 効果の一つである。



3-4 $\alpha-\alpha$ DYNAMO と $\alpha-\omega$ DYNAMO

α 効果を利用したモデルに α^2 ダイナモがある。 α 効果を二回利用して元の磁場と同じ形の磁場を作るのでこの名前がある。 $\alpha-\omega$ ダイナモは α 効果と ω 効果の両方を利用してダイナモを作る。この2つのダイナモでは、トロイダル磁場の強さが決定的に異なる。 $\alpha-\omega$ ダイナモはポロイダル磁場を ω 効果によってトロイダル磁場に変形させ、このトロイダル磁場から α 効果により元と同じ磁場を再生するシステムなのでトロイダル磁場がポロイダル磁場の10倍から100倍と強くなければならない。これに対して、 α^2 ダイナモではトロイダル磁場はポロイダル磁場と同程度の強さになる。

トロイダル磁場が強いか弱いかということは、作られる磁場の時間変化のスケールに影響してくる。例えば2種類のダイナモで西方移動を説明しようとする場合 Kumar&Roberts (1975)の $\alpha-\omega$ ダイナモでは磁場の時間変化は $0.2^\circ/\text{year}$ と観測にほぼ一致した値を得ることができるが、Krause (1977)の α^2 ダイナモでは $0.036^\circ/\text{year}$ と磁場の変動は遅くなる。これはトロイダル磁場が弱いためと考えられる。

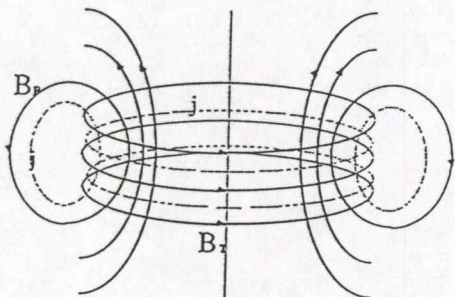


図13 α^2 -dynamo

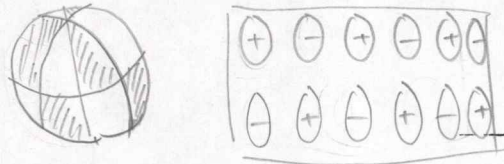
self-exciting system by α -effect

おさらいクイズ

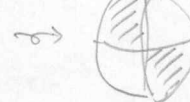
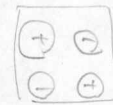
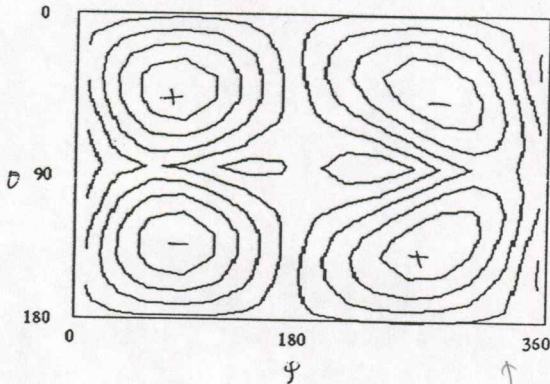
問1 ポロイダル磁場とトロイダル磁場がそれぞれ $\nabla \cdot B = 0$ を満たすことを示せ。(15点)

$\tau_j = \tau_z !!$

問2 $B_{S_4}^3$ の湧き出しと沈み込みを図1に倣って示せ。また、図3に倣ってこれのz成分を平面上のコンターになおせ。(5+5点)



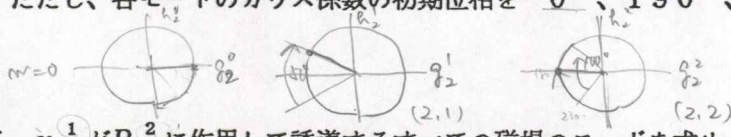
問3 下図はある磁場のz成分である。どのモードが卓越しているか？また、最も卓越したモードの他にどんなモードが見いだされるか？(5+10点)



$B_z^1 \rightarrow m$
 $B_z^2 \rightarrow m$
 $m=1$
 $m-m=1$

$J = 4 - 3 = 1$

問4 モード $(2, 0)$ 、 $(2, 1)$ 、 $(2, 2)$ の磁場が地球上に固定されている。地球が自転軸の周りを50度西に回転すると各モードのガウス係数はどう変化するか、ガウス係数のグラフを描いて説明せよ。ただし、各モードのガウス係数の初期位相を 0° 、 190° 、 230° とする。(2+4+4点)



問5 $v_{S_2}^1$ が $B_{T_3}^2$ に作用して誘導するすべての磁場のモードを求めよ。(10点)

$$v_{S_2}^1 \times B_{T_3}^2 = B_{T_5}^3 + B_{T_3}^3 + B_{T_5}^1 + B_{T_3}^1 + B_{T_1}^1 + B_{S_4}^3 + B_{S_4}^1 + B_{S_2}^1$$

問6 $v_{T_1}^0$ 運動が $B_{S_1}^0$ に作用して $B_{T_2}^0$ を誘導することを誘導方程式を用いて計算せよ。(25点)

$$B_{S_1}^0 = \nabla \times B_{T_1}^0 \quad \phi_i^0 = \frac{f(r)}{r} (g_i^0) P_i^0(\cos\theta) = \frac{f(r)}{r} \cdot g_i^0 \cos\theta$$

$$B_{T_1}^0 = \nabla \phi \times r$$

問7 Bullard&Gellman dynamoに倣い $B_{S_1}^0$ を維持するダイナモの別例を挙げよ。(15点)

基本公式

《ルジャンドル関数》

$$\star \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} + n(n+1) \right] P_n^m(\theta) = 0$$

$$\star \cos\theta P_n^m(\theta) = \{ \sqrt{(n+1)^2 - m^2} P_{n+1}^m(\theta) + \sqrt{n^2 - m^2} P_{n-1}^m(\theta) \} / (2n+1)$$

$$\star \sin\theta \frac{dP_n^m(\theta)}{d\theta} = \{ n\sqrt{(n+1)^2 - m^2} P_{n+1}^m(\theta) - (n+1)\sqrt{n^2 - m^2} P_{n-1}^m(\theta) \} / (2n+1)$$

《球座標での微分》

$$\star \nabla\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \right)$$

$$\star \nabla \cdot V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta V_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}$$

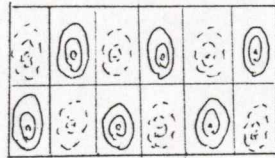
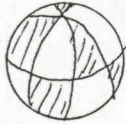
$$\star \nabla \times V = \left(\frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta V_\varphi) - \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial\varphi}, \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial V_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\varphi), \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial\theta} \right)$$

解答

問1 (1)式を(2)、(3)に代入して磁場を成分で表した後計算すれば良い。

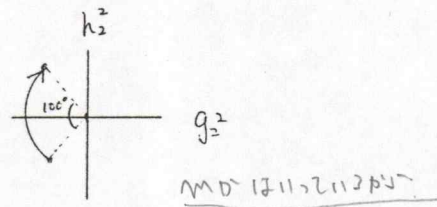
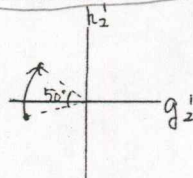
別解 ポテンシャルのラプラシアンが0である事を利用する。

問2



問3 (2, 1)、(2, 2)

問4 (2, 0)は変化しない。



問5 ポロイダル: (4, 3)、(4, 1)、(2, 1)

トロイダル: (5, 3)、(3, 3)、(5, 1)、(3, 1)、(1, 1)

問6 ひたすら計算してください。

問7 なんぼでもできまんがな!

点数	コメント	評価
80-100	あんなめんどくさい計算をするなんて、 はっきり言ってあなたは病気です。	A
60-79	今日は楽しい宴会!	B
40-59	あなたは普通の人です。	C
39 以下	落第。夕食は抜きです。	D

H. Shimizu, Y. Yokoyama

1. はじめに

地球ダイナモの理論では、まずはじめに自励ダイナモ(self-exciting dynamo)ができるかどうか問題となった。この段階では、

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (1)$$

を満たす、時間変化しない速度 \vec{v} (及び α 効果) を適当に与え、induction方程式

$$\partial \vec{B} / \partial t = \operatorname{rot}(\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B} \quad (2)$$

のみを解いたとき、磁場が時間的にどのようにふるまうかが議論された。ただし、 η は磁気拡散係数で、透磁率 μ 、電気伝導度 σ をもちいて、 $\eta = 1/(\mu \sigma)$ で表される。このようなダイナモが、Kinematic Dynamo である。しかし、Kinematic Dynamo の場合、最初に与えた速度がその状態での流体運動を矛盾なく表現しているかどうかまず問題となる。また、ダイナモ作用によってある程度磁場が成長すると、流体運動を妨げるように働く Lorentz 力の影響が無視できなくなり、流体運動の変化も磁場の変化と同時に考えられなければならない。そのためには、induction 方程式と、流体運動を支配する方程式(Navier-Stokes equation)

$$D\vec{v}/Dt + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} = -\operatorname{grad}(p/\rho) - \beta T\vec{g} + (1/\rho \mu)(\operatorname{rot}\vec{B}) \times \vec{B} + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (3)$$

および、熱、組成等に関係した方程式を適当な境界条件下で同時に解く必要がある。ただし、 $\vec{\Omega}$ は地球回転の角速度、 $-\beta T\vec{g}$ は熱による浮力、 \vec{g} は重力加速度、 ν は動粘性係数である。この場合は、Kinematic Dynamo のように、速度を与えるのではなく、系において考えられる力や熱を仮定する。このように考えて求められる dynamo が、MHD-Dynamo(Magneto-Hydro-Dynamic Dynamo) である。これで解が求められればよいのであるが、方程式系が非線形であり、解析解を求めるのはほとんど不可能である。また、MHD-Dynamo を考えるときに必要な、地球流体核内の物性値についても不明な点が多く、仮になんらかの方法で解が求められたとしても、その中には現段階では取り除くことのできない不定性が含

まれることになる。

この冊子では、MHD-Dynamo を考えるときに知っておくと良い現象として、磁気流体波と回転系の熱対流について第2章で説明する。第3章では、self-exciting dynamo の解の存在状態と、地球ダイナモのモデルを紹介する。

2. 磁気流体波、回転系における熱対流

2-1. 磁気流体波(MHD-Waves)

電気伝導性をもたない流体では、密度等流体どうしの境界面がない場合には縦波(音波)のみが伝播し、横波は存在できない。これは、流体が剛性をもたないからである。一方、電気伝導性をもった流体では、磁力線がある程度流体粒子に凍結され、この磁場によってもたらされる Maxwell 応力が剛性に似た働きをするために、電磁流体中を電磁場の変化をとめないながら伝播する横波が存在できる。これが磁気流体波である。

磁気流体波の中で、最もよく知られているのが Alfvén 波である。Alfvén 波は糸を伝わる横波にたとえて考えられることが多い。糸にかかっている張力を T 、糸の線密度を k とすると(図 1 a)、糸を伝わる横波の伝播速度は $(T/k)^{1/2}$ で与えられる。ここで、磁束密度 \vec{B}_0 の一様な磁場の中でつりあっている、動粘性係数 $\nu=0$ 、電気伝導度 $\sigma=\infty$ である流体(すなわち、diffusion less である電磁流体)を考える。これには前に述べたように、Maxwell の応力(張力)をうけた磁力線が流体中を通っており、この磁力線は完全に流体粒子に凍結されている。従って、断面積 S の磁力管を考えると、これは、線密度が ρS の、磁力線に包まれた糸であるとみなすことができる(図 1 b)。この糸には張力として、 $B_0^2 S / \mu$ がかかっているから、

$$V_A = (T/k)^{1/2} = |B_0| / (\mu_0 \rho)^{1/2} \quad (4)$$

で磁力管方向に伝播する横波が存在することが考えられる。これは、断面積 S を十分小さくすることによって、磁力線を位相速度 V_A で伝播する横波が存在すると考えることができる。以上のことを induction 方程式と運動方程式を用いて確かめてみる。磁束密度 \vec{B}_0 の一様な磁場中で、 $\nu=0$ 、 $\sigma=\infty$ である流体がつりあっているとす(仮定は同じである)。ここで、 \vec{v} という微小速度で場を乱し、結果として \vec{b} という微小な磁場が誘導されるとする。すると、

induction 方程式、運動方程式より、

$$\partial \vec{b} / \partial t = (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{v} \quad (5)$$

$$\rho \partial \vec{v} / \partial t = -\nabla \pi + (1/\mu_0) (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{b} \quad (6)$$

と求められる。ただし、 \vec{v} , \vec{b} の2次以上の項は無視しており、 π はgradientの中に書き表される項をまとめたものである。この解として平面波(波数 \vec{k} , 角振動数 ω)

$$\begin{aligned}\vec{b} &= \hat{b} \cdot \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) \\ \vec{v} &= \hat{v} \cdot \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)) \\ \pi &= \hat{\pi} \cdot \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t))\end{aligned}\quad (7)$$

を仮定すると,

$$\omega^2 = (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2 / \mu_0 \rho \quad (8)$$

が求められる。従って、磁力線の方向 (B_0 の方向) には位相速度

$$V_A = |B_0| / (\mu_0 \rho)^{1/2} \quad (9)$$

で伝播する波が存在することになる。これは、糸を伝わる横波から考えたときと同じ結果であり、理論的にも磁力線を弾いたときに位相速度 V_A で伝播する横波が存在することが示されたことになる。この波が Alfvén 波である。地球流体核内に Alfvén 波が存在するとすれば、 $\rho = 10^4 \text{ Kg/m}^3$ として、

$$\begin{aligned}B_0 = 5 \text{ gauss} & : V_A = 0.005 \text{ m/s} \\ B_0 = 100 \text{ gauss} & : V_A = 0.1 \text{ m/s}\end{aligned}$$

となる。

これまでの条件に加えて、Coriolis 力が作用しているときに流体がつりあっているとす。Alfvén 波で考えたように微小速度 \vec{v} で場を乱し、 \vec{b} という磁場が誘導されたとすると、induction 方程式、運動方程式より、

$$\partial \vec{b} / \partial t = (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{v} \quad (10)$$

$$\rho \partial \vec{v} / \partial t + 2 \vec{\Omega} \times \vec{v} = -\nabla \pi + (1/\mu_0) (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{b} \quad (11)$$

が求められる。ここでも Alfvén 波の場合と同様にして平面波を仮定すると、

$$\omega = \vec{\Omega} \cdot \vec{k} / k \pm ((\vec{\Omega} \cdot \vec{k})^2 / k^2 + (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2 / \mu_0 \rho)^{1/2} \quad (12)$$

が求められる。ここで、 $B_0 = 100 \text{ gauss}$, $\Omega = 7 \times 10^{-5} \text{ 1/sec}$ を仮定すると、

$$(\vec{\Omega} \cdot \vec{k})^2 / k^2 \gg (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2 / \mu_0 \rho \quad (13)$$

であり、

$$\omega_+ = 2(\vec{\Omega} \cdot \vec{k}) / k \quad (14)$$

$$\omega_- = k(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2 / 2(\vec{\Omega} \cdot \vec{k}) \mu_0 \rho \quad (15)$$

が求められる。 ω_+ は磁場が存在しない場合の流体の慣性振動をあらわしている。また、 ω_- は磁場があることによって存在する波、すなわち、磁気流体波をあらわしている。この波は、磁場 (Lorentz 力) と Coriolis 力が balance しながら伝播することから、MC-wave (Magnetic-Coriolis wave) とよばれている。ここで、 $\rho = 10^4 \text{ Kg/m}^3$, $B_0 = 100 \text{ gauss}$, 波長 ($2\pi/k$) = 1800 Kmを仮定すると、周

期300年，位相速度 0.2 mm/s となる。

このほかにも Lorentz 力，浮力，Coriolis 力が balance しながら伝播する波も存在することが示されており，MAC-wave(Magnetic-Archimedean-Coriolis wave) とよばれている。

MC-wave, MAC-wave の位相速度は地球磁場の非双極子成分の西方移動の速さとほぼ同じであるので，これらの磁気流体波によって地球磁場の比較的長い周期(100~1000年)を持った時間変化が説明される可能性があると考えられている。また，磁気流体波が存在すれば，large scale の場による α 効果が可能になり，磁場が生成されやすくなることが，Braginskiy によって示されている。

2-2. 回転系における熱対流

非回転系で，図3のように下が熱く，上が冷たいような plane layer を考えると，下から上に熱を輸送するために矢印のような対流がおこる。これは，Bénard 対流とよばれている。しかし，回転系においてはこれとは少し異なったふるまいをすることがわかっている。

回転系における一様，非粘性流体の定常運動を考えると，運動方程式，連続の式は，

$$0 = -\nabla(p/\rho) - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} \quad (16)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (17)$$

となる。ただし，角速度 $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ である(図4)。これから，

$$\partial \vec{v} / \partial z = 0 \quad (18)$$

すなわち，速度は角速度の方向には変化せず，運動が2次元的になることが導かれる。これは，Taylor-Proudman の定理とよばれ，回転系における流体運動を考える場合に非常に重要である。図5のような上下を (rigid)boundary にはさまれた， Ω と直交するような plane layer に満たされた流体では，

$$v_z = 0 \quad \text{at } A, B \quad (19)$$

となる。Taylor-Proudman の定理を用いると，流体中どこでも $v_z = 0$ ，すなわち，この場合には上下方向の運動が存在しないことになる。また，図6のような，有限の曲率をもった境界の場合，Aにおける法線方向を \vec{n}_A ，Bにおける法線方向を \vec{n}_B とすると，

$$\vec{v} \cdot \vec{n}_A = 0 \quad \text{at } A \quad (20)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n}_B = 0 \quad \text{at } B \quad (21)$$

となる。Taylor-Proudman の定理より，角速度の方向と平行な AB 上においては，

$$\vec{v} \cdot \vec{n}_A = \vec{v} \cdot \vec{n}_B = 0 \quad (22)$$

となり、運動は \vec{n}_A 、 \vec{n}_B の両方に垂直な方向($\vec{n}_A \times \vec{n}_B$ の方向)にしかおこらないことになる。たとえば、球のような回転軸に対して軸対称の境界を持つ場合には、いま考えているような非粘性、一様な流体の定常運動では zonal 方向の流れしか存在できない。

これまでは、対流に必要な浮力については全く考えていなかったが、ここでは浮力を加えたときの、流体運動に対する回転の影響を調べる。運動方程式、連続の式、境界条件は、

$$0 = -\nabla(p/\rho) - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} - \beta T \vec{g} \quad (23)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (24)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{at boundary} \quad (25)$$

となる。これから、

$$2\Omega \partial \vec{v} / \partial z = \vec{g} \times (-\beta \nabla T) \quad (26)$$

が導かれる。ここで、 $\vec{\Omega}$ と \vec{g} の方向が同じである Bénard layer を考えると(図7),

$$v_z = 0$$

となり、Benard 対流はおこらないことになる。(図8のように、 $\vec{\Omega}$ と \vec{g} が垂直な Benard layer のときは、回転の影響を受けずに対流できる)。しかし、実際には流体が粘性を持つことによって図7のような場合でも、対流をおこすことができる。

流体がごくわずかに粘性をもつ場合、粘性力は流体の大部分に対してはきかないが、境界付近に境界層を形成し、この層においては粘性力が運動に対して支配的になる。Taylor-Proudman の定理は非粘性流体に対する定理であるから、流体の大部分(境界層以外の部分)には適用できるが、粘性が効いてくる境界層には適用することはできない。したがって、境界層では回転系であっても熱対流が可能になる。対流は縦横比が1になるようなスケールでおこるので、まず、境界層内で、境界層の厚さ d を代表長さとする対流がおこる(図9a)。それにひっぱられるようにして、境界層以外の部分でも $\vec{\Omega}$ の方向に運動し、全体で対流していることになる。このときは主な対流が境界層の中なので、対流の横スケールは d になって、図9bのような細長い対流がおこる。これをななめ上からみると、図9cのようになる。

今までは plane layer でどのようなになるかをみてきた。次に、球殻(shell)内の熱対流がどのようなになるかをイメージすることにする。球核は、内球が外球よりも熱いとし、重力は常に球の中心に向いているとする(図10)。すると、極

付近では、図9cのタイプ、赤道付近では図8のタイプの対流がおこると考えられる。その他の部分では、両者を Mix したような対流が起こり、全体としては図11の対流ができると考えられる。対流の横スケール ($\vec{\Omega}$ と直交する方向のスケール) は、境界層のスケールとほぼ同じになり、Taylor-Proudman の定理により、対流セルは $\vec{\Omega}$ 方向にまっすぐのびると考えられる。これは実際に、実験、数値計算によってたしかめられている。

次に、磁場による系への影響について考える。 $\vec{\Omega}$ と \vec{g} が平行である、Bénard layer に外部から磁場を与えたとすると(図12)、磁場の強さと粘性力の比を表す Chandrasekhar number Q と臨界 Rayleigh number Ra_c の関係は、図13のようになる。 $Q < T^{1/2}$ では、磁場が存在することによって対流のよこスケールが大きくなり、必要なエネルギーが減少することによって Ra_c が小さくなる。また、 $Q > T^{1/2}$ では、強い磁場が存在することによって(つまり、流体に凍結された磁力線間に働く Maxwell 応力が強くなることによって) 流体の運動を妨げ、対流を起こりにくくするために、 Ra_c が大きくなる。この Ra_c が最小値をとるのは Coriolis 力が Lorentz 力にほぼ等しくなるときである。また、Taylor-Proudman の定理を導いたときと同様にして、

$$2\Omega \partial \vec{v} / \partial z = \vec{g} \times (-\beta \nabla T) + (1/\mu_0) (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} \quad (27)$$

が求められる。従って、ある程度の強さの磁場があれば Taylor-Proudman の定理は成り立たず、図14a,bに示した対流が起こってもよいことになる。

3. 地球ダイナモのモデル

3-1. self-exciting dynamo の存在状態

電磁流体力学に矛盾しないような self-exciting dynamo (MHD-dynamo) の存在状態を知るために、まず Childress-Soward dynamo についてみる。これは、2-2. で考えたような、 $\vec{\Omega}$ と \vec{g} が平行になる Bénard-layer におけるダイナモである。ここで、仮定として生成される磁場は十分小さいとする。この仮定により、

- ①. 対流の水平スケールは垂直スケールに対して十分小さい ($l/d \ll 1$).
すなわち、図9cの様な対流が存在する場合に相当する。
- ②. 磁場の運動に対する影響は無視できる。

となり、これらより、比較的容易に解を求めることができる。図15は、Soward によって求められた、self-exciting dynamo ができるときの、磁場エネルギー

M^* と、温度差を表すパラメータ λ との関係である。これから、 $\lambda=2.5$ 付近で磁場エネルギーが急激に増加していることがわかる。これ以上磁場が強くなると、ここまで仮定していたこと(上記①, ②)に反するので、これ以上の λ , M^* ではどうなるのかは、この図からは判断できない。しかし、self-exciting dynamo として取り得る解の状態になんらかの変化がおこっていることが読みとれる。その後の数値計算によって、self-exciting dynamo が存在するときの、磁場の強さ B と、Rayleigh number Ra の関係(図16a)が求められた。

Childress-Sowardの結果でみられたのは S' 付近の変化であると考えられている。また、曲線の傾きから、 $Ra^m S'$ および ST では、状態は安定であり、 $S'S$ では不安定であることがわかる。安定な branch のうちで、 ST を strong field branch, $Ra^m S'$ を weak field branch とよんでいる。

次に、地球に近い形状の場合にどうなるかを考える。2-2で、磁場が十分小さいときの球殻内の流体の対流が、図11のようになることを述べた。これをまねて、図17に示した輪の中に満たされた電磁流体によるダイナモについて、Busseにより研究がなされた。輪の上, 下面は球に合わせるように傾斜がつけられており、重力, 熱は図17のように与えられているとする。このダイナモでも図16aのような関係を持つことがわかった(他に、図16bに示されるような関係を持つ場合もあることが知られている)。また、weak field branch は、Lorentz 力と粘性力が balance している状態で、地球流体核のパラメータの時は磁場の強さは 10^{-6} gauss程度であり、また、strong field branch は Coriolis 力と Lorentz力がほぼつり合っている状態で、磁場の強さは数10-数100 gauss 程度であることがわかった。従って、地球にふさわしいダイナモを考える場合、strong field branch ST について解析を行なう必要がある。しかしこの場合、流体運動に対する磁場の影響が大きく perturbation method 等を用いて解析的に解を求めることはほとんど不可能である。このために、我々の知りたいダイナモの解を求めるためにはどうしても数値計算に頼ってしまうことになる。

3-2. 地球ダイナモのモデル

3-2-1. Taylor の Constraint

地球流体核のような球状単連結の電磁流体の場合、系において慣性力, 粘性力が無視できるとすると、運動方程式を積分することにより、

$$T = \int_{C(s)} (J \times B)_\phi ds = 0 \quad (28)$$

が求められる(今後, 円筒座標系(s, ϕ, z), 極座標系(r, θ, ϕ)を断わりなしに用いる. 但し, 回転系における回転角速度 $\vec{\Omega}$ は, z 方向, または, $\theta=0$ の方向を向いているとする). これは, 図18において回転軸を中心軸とする半径 s の円筒の側面には, Lorentz 力は円筒を回転させる方向に働かないことを意味しており, この $T=0$ が Taylor の Constraint である. 流体運動に対して, 確かに流体核の大部分では粘性はきかない. しかし, Core-Mantle 境界付近には粘性が流体運動を支配する境界層が形成される. この境界層について,

①.境界層の存在は, 他の部分に対してはほとんど影響を与えず, perturbation とみなせる

②.境界層の存在が流体核内の運動および電磁場に大きく影響を与える, つまり, 境界層は系において fundamental である

という2つの状態が考えられる. ①の場合は $T=0$ となって Taylor の Constraint をみたすが, ②の場合では粘性を無視することはできず, $T \neq 0$ となる. 従って, Taylor の Constraint を満たすかどうかは, 系に対して粘性(境界層)が effective かどうかを知る指標となる.

3-2-2. Nearly axisymmetric model

ここでは, 磁場, 速度場を

$$\vec{B} = \bar{B}_\phi \vec{1}_\phi + \vec{B}' + \vec{B}_0 \quad (29)$$

$$\vec{v} = \bar{v}_\phi \vec{1}_\phi + \vec{v}' + \vec{v}_0$$

と分けて考える. ただし, $\vec{1}_i$ は i 方向の単位ベクトル, $\bar{v}_\phi, \bar{B}_\phi, \vec{v}_0, \vec{B}_0$ は軸対称場 ($\partial f / \partial \phi = 0$) であり, \vec{v}', \vec{B}' が非軸対称場である. また, ρ はポロイダル, ϕ はトロイダル(zonal成分)をあらわしている. ここで, 各項のオーダーとして, magnetic Reynolds number R ($R = UL/\eta$, U :系の代表速さ, L :代表長さ)をもちいて,

$$|\vec{v}' / \bar{v}_\phi| \sim |\vec{B}' / \bar{B}_\phi| \sim O(R^{-1/2}) \quad (30)$$

$$|\vec{v}_0 / \bar{v}_\phi| \sim |\vec{B}_0 / \bar{B}_\phi| \sim O(R^{-1}) \quad (31)$$

と仮定する. 流体核では ($R \sim 100 \gg 1$) と見積られており, $|\bar{v}_\phi| \gg |\vec{v}'|, |\bar{B}_\phi| \gg |\vec{B}'|$ であることから Nearly axisymmetric model とよばれている. この model では, leading orderのみを考えることによって, 問題を2次元的に扱えるという利点がある(流体核内でそうであるかどうかはわからない). また, 上式(30,31)では $|\bar{B}_0|$ よりも $|\vec{B}'|$ が $R^{1/2}$ だけ大きいので地表では \vec{B}' が支配的になると直感的に考えられるが, 実は, \vec{B}' は \bar{B}_ϕ の $R^{1/2}$ 以下のものしか流体核の外部にはでないことが解析的に証明できる. 従って, 地表では \vec{B}_0 が支配的になり, 双極子磁場

等の軸対称な磁場が地表ではおもに観測されることになる。式(29)を induction 方程式に代入すると、軸対称成分(leading order)について、

$$\partial \bar{B}_\varphi / \partial t + s \vec{v}_0 \cdot \nabla \cdot (\bar{B}_\varphi / s) - \eta (\nabla^2 - s^{-2}) \bar{B}_\varphi = s \vec{B}_0 \cdot \nabla \omega \quad (32)$$

$$\partial \bar{A}_\varphi / \partial t + s^{-1} \vec{v}_0 \cdot \nabla (s \bar{A}_\varphi) - \eta (\nabla^2 - s^{-2}) \bar{A}_\varphi = \alpha \bar{B}_\varphi \quad (33)$$

となる。ただし、

$$\vec{B}_0 = \nabla \chi (\bar{A}_\varphi \hat{1}_\varphi) \quad (34)$$

$$\omega = \vec{v}_\varphi / s \quad (35)$$

$$\alpha = \eta \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} (s^{-1} (1-m^2) (\vec{u}'_{ms} \times \vec{u}'_{mc})_\phi - \nabla (r u'_{mcr}) \cdot \nabla u'_{msz}) \quad (36)$$

$$\vec{u}' = \vec{v}' / \vec{v}_\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} (\vec{u}'_{mc}(s, z) \cos(m\phi) + \vec{u}'_{ms}(s, z) \sin(m\phi)) \quad (37)$$

と表され、 \bar{A}_φ は \vec{B}_0 のベクトルポテンシャルの ϕ 成分、 ω は角速度である。また、 α は上記のように表されるが、非軸対称成分は運動方程式と連立させると、2-1でみたような MC-wave や MAC-wave 等の磁気流体波を形成する。従って、この α は磁気流体波による α 効果を表している。また、上式で \bar{B}_φ は $\vec{B}_0 \cdot \nabla \omega$ によって、 \bar{A}_φ は $\alpha \bar{B}_\varphi$ によって生成されるから、このダイナモは $\alpha \omega$ ダイナモであることがわかる。上式(32~37)を、電磁流体力学に矛盾しないように解けばよいが、3-2-1.でも述べたように、Taylor の Constraint を満たす場合と満たさない場合の、2つの状態が考えられる。これから、Nearly axisymmetric model で、Taylor の Constraint をみたすダイナモの例として、Fearn-Proctor のモデルを、満たさない場合の例として Braginskiy の model-Z を紹介する。

3-2-2a. Fearn-Proctor のモデル

このモデルは、球状単連結の電磁流体を考えており、内核は無視している。ここでは、

①. 定常

②. 外部に双極子磁場を作る

と仮定し、境界条件として

③. $v_r = 0$ on boundary

④. \vec{B}_0 は連続, $B_\varphi = 0$ on boundary

を考える。Fearn-Proctor は α 効果による起電作用 $\alpha B_\varphi = E$ と \vec{v}_0 を適当に与え(図19)、Taylor の Constraint をみたすように、場の解を求めた(図20)。これは、Taylor の Constraint を満たすということで、MHD に矛盾しないように解くという条件をクリアしている。

3-2-2b. Braginskiy の model-Z

このモデルも球状単連結の電磁流体を考え、内核は無視している。ここで、

①. α は, MHD-wave によって構成されるが, これを解析的に求めることは不可能なので, 流体核内の MAC-wave の存在状態を推定し, α を適当に与える。

②. v のなかで温度差によって生じる流れ (温度風) を適当に与える。のように, α および熱については適当に与える。境界条件は,

$$\begin{aligned} \vec{B}_0 & \text{は連続, } B_\varphi = 0 \quad \text{on boundary} \\ \vec{v} & = 0 \quad \text{on boundary} \end{aligned}$$

とし, 初期条件として, $t=0$ で双極子型の磁場を与え, time-step ごとに \vec{B} , \vec{v} を計算し, 定常になったときの値を解とした (図21)。このモデルにおいて Braginskiy は Core-Mantle boundary に粘性による境界層ができることによって, この境界層内に電流を集中的に流すことが可能であることを示している。これは, 境界層の存在がその他の部分にも強く影響を与えていることを示しており, この場合は前にも述べたように, Taylor の Constraint をみたさない。また, 境界層内を電流が集中的に流れることにより, 流体核の大部分で B_0 の磁力線は z 方向を向き, 境界付近で急激にまげられ, 外部磁場と連続になる。流体核の大部分で B_0 の磁力線が z 方向を向くことから, このモデルは model-Z とよばれている。

流体核が Taylor の Constraint を満たすようなダイナモになっているのか, model-Z のような状態であるのかは, 現時点ではわからない。両者のダイナモがともに存在できるときは, 電流を境界層に集中的に流す model-Z のほうが不安定ではないかと言われているが, 詳しい研究はまだほとんどなされていない。

3-2-3. Zhang-Busse のモデル

これは, 3次元解析を行なったモデルで, 図22に示したような球殻について考えている。運動方程式, induction 方程式, 熱伝導の方程式

$$(\partial/\partial t + \vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} = -\nabla(p/\rho) - \beta \vec{g} \hat{\theta} + \nu \nabla^2 \vec{v} + (\rho \mu_0)^{-1} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} \quad (38)$$

$$(\partial/\partial t + \vec{v} \cdot \nabla) \hat{\theta} + \vec{v} \cdot \nabla T_s = \kappa \nabla^2 \hat{\theta} \quad (39)$$

$$\partial \vec{B} / \partial t = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B} \quad (40)$$

を,

$$\vec{v} : \text{stress free on boundary} \quad (41)$$

$$\vec{B}_0 \text{ は連続, } B_\varphi = 0 \quad \text{on boundary} \quad (42)$$

$$\hat{\theta} = 0 \quad \text{on boundary} \quad (43)$$

という境界条件のもとで同時に解くことを考える。ただし,

$$T_s = T_0 - \gamma r^2 \quad (44)$$

$$\hat{\theta} = T - T_s \quad (45)$$

と表され、 T_s は流体が静止しているときの温度分布、 T_0 は球殻の中心の温度、 γ は、熱源の分布を表す定数、 $\hat{\theta}$ は実際の温度 T の T_s からのずれを表す。 \vec{B} 、 \vec{v} が divergence free であることから

$$\vec{v} = \nabla \times (\nabla \times \vec{r} \Phi) + \nabla \times \vec{r} \Psi \quad (46)$$

$$\vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{r} h) + \nabla \times \vec{r} g \quad (47)$$

とあらわし、

$$\Phi = \sum_{\nu, n, l} a_{\nu n l} \exp(i \nu m (\phi - ct)) P_l^{\nu m}(\cos \theta) \sin(n \pi (r - r_i)) \quad (48)$$

$$\Psi = r \sum_{\nu, n, l} c_{\nu n l} \hat{e} \exp(i \nu m (\phi - ct)) P_l^{\nu m}(\cos \theta) \cos((n-1) \pi (r - r_i)) \quad (49)$$

のように境界条件を満たすように Φ 、 Ψ 、 h 、 g を表現し、 $a_{\nu n l}$ 、 $c_{\nu n l}$ 等の係数を求めることにより解が求められた(図23)。ここでは、式(48,49)からもわかるが時間依存性は ϕ 方向のみに限定されており、軸対称場としては定常な解が求められる。

この研究は、各々のパラメーターがどのような値をとるときに、流体運動、磁場が励起されるかを調べる、パラメータースペースにおける研究である(図24)。現段階では計算上の問題で現在考えられている流体核のパラメーターについての数値計算はなされていない。従って、地球でどうであるかという議論はできないが、有力なモデル(方法)であると考えられている。また、最初(第1章)に流体核の物性値がよくわかっていないと述べたが、逆にこれらのモデルから流体核内の電磁流体がどのような物性値をとっていると考えべきかという Constraint が求められることも期待されている。

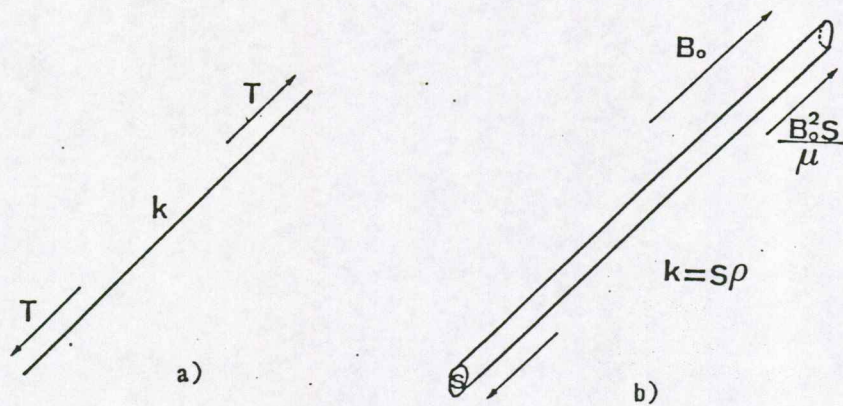


図1.a)張力Tで張られている線密度kの糸.

b)一様な磁場 B_0 中の断面積Sの磁力管. kは, 磁力管の線密度に相当する.

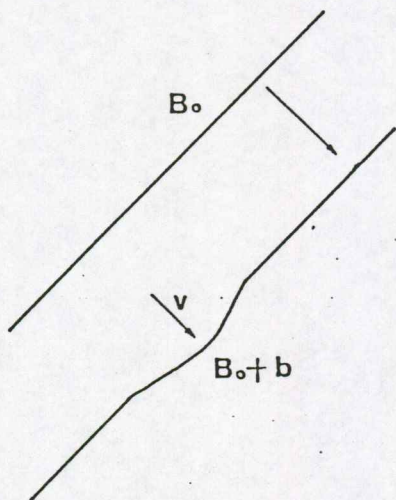


図2.一様な磁場 B_0 の磁力線に対して加えられる微小速度vと, 誘導される磁場b.

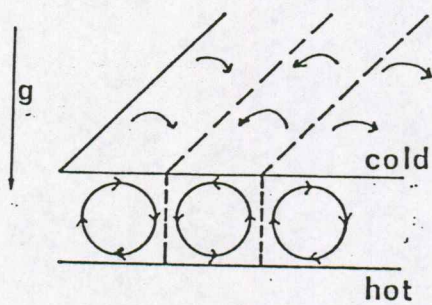


図3.Benard layer. gは重力加速度.

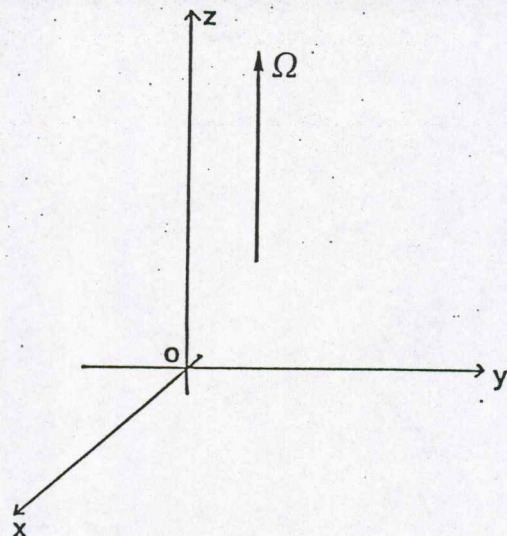


図4.回転角速度 Ω は, z方向にとる.

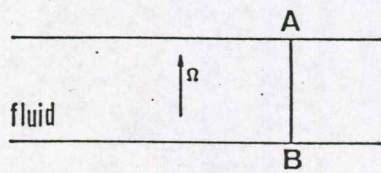


図5.

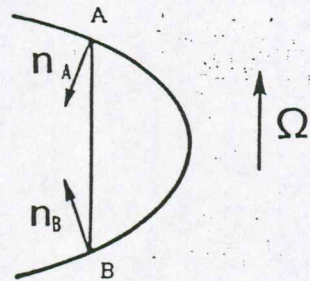


図6.(Gubbins and Roberts.1987)

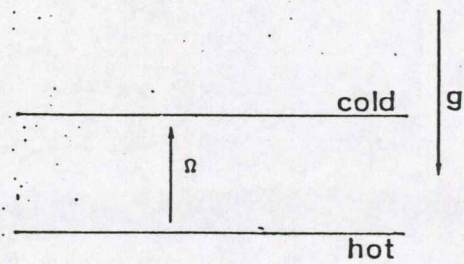


図7.回転しているΩとgが平行なBenard layer.

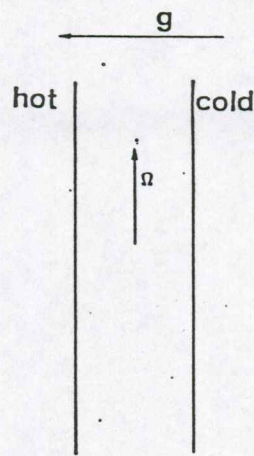


図8.回転しているΩとgが垂直なBenard layer. 対流は簡単におこりうる.

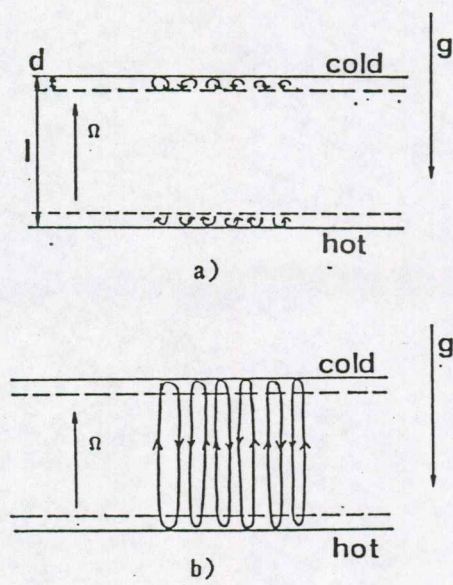


図9.a)厚さdの境界層内での熱対流. たて, よこスケールともにdである.
 b)全体での対流. たてスケールはl, よこスケールはdになる.
 c)ななめ上からみたところ.

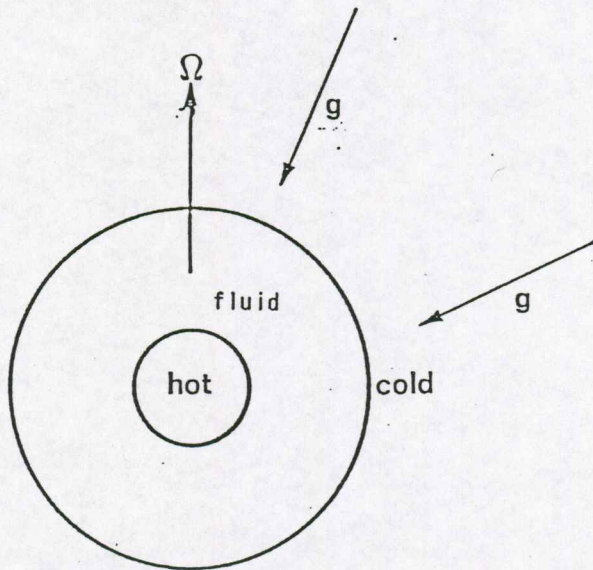


図10.

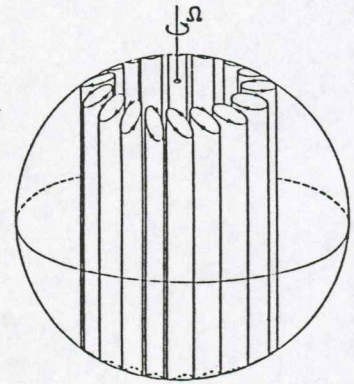


図11.回転しているshellにおける熱対流。(Roberts.1988)

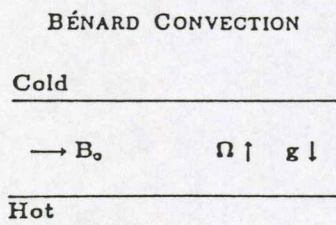


図12.(Roberts.1988)

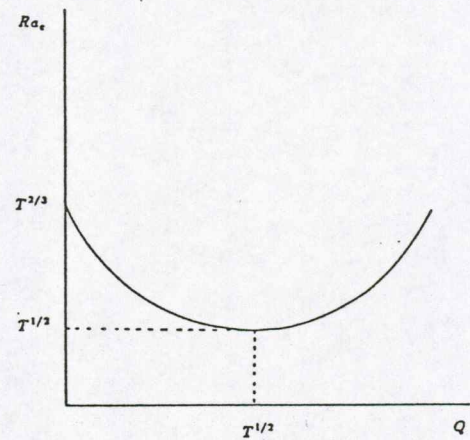


図13.TはTaylor number(付録参照)。(Roberts.1988)

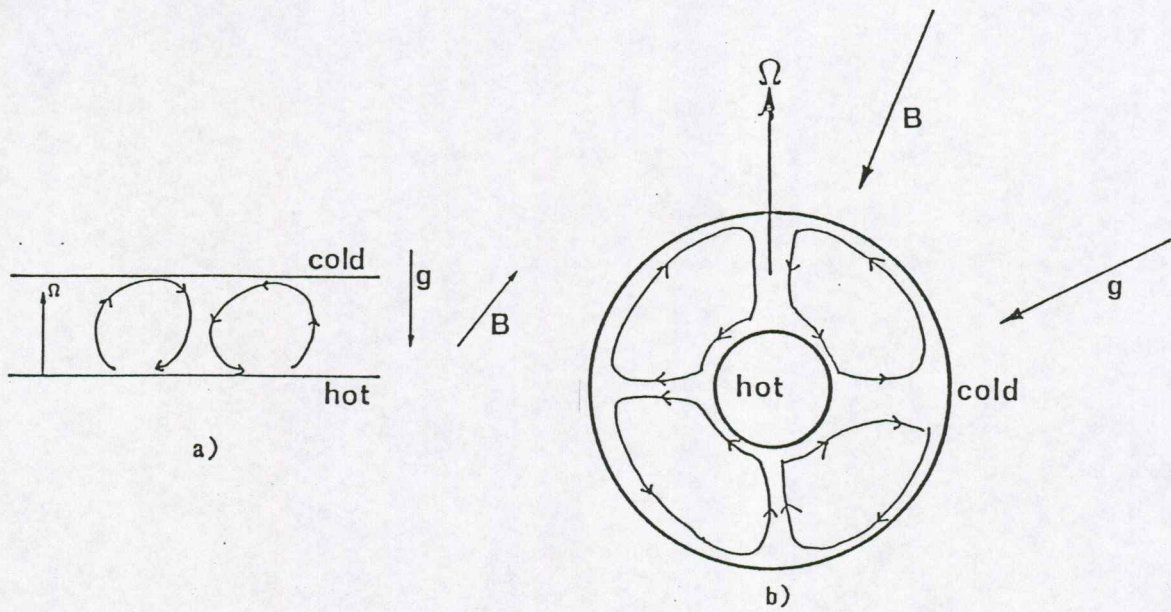


図14.a)b) 磁場がある程度の強さを持つときに考えられる対流.

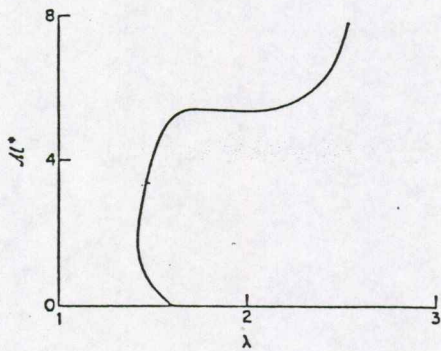


図15.(Roberts.1987)

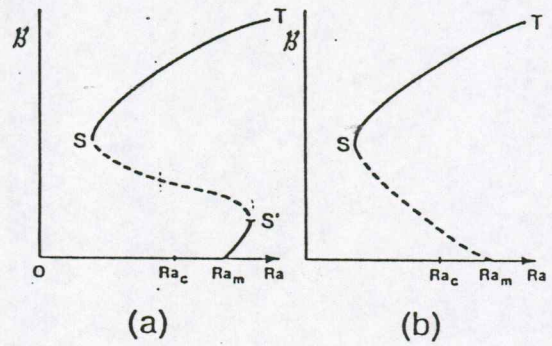


図16.a)supercritical,b)subcritical.(Roberts.1988)

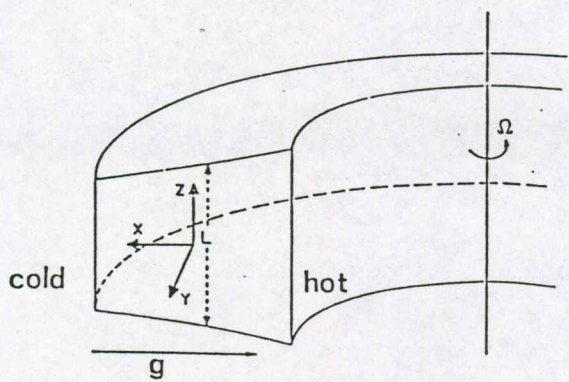


図17.熱; 重力はradial方向に与えられている。(Busse.1975)

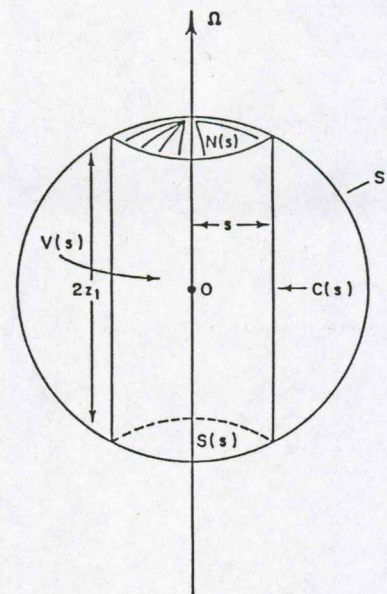


図18.面Sが, core-mantle境界に相当する. 円筒面C(s)にかかる力が問題となる。(Roberts.1987)

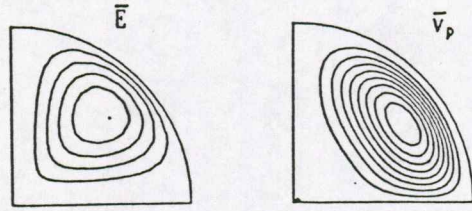


図19.a)与えられた \bar{E} の等値線. 中が強い.
 b)与えられた \bar{v}_p の流線
 (Fearn and Proctor.1987)

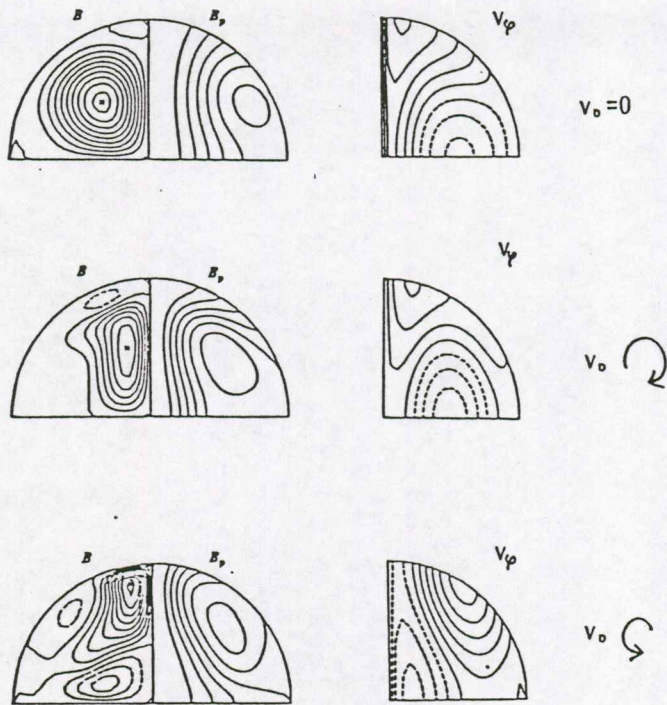


図20.求められた磁場, 速度場. 左から, 等 B_p 線, B_p の磁力線, 等 v_p 線である.
 また, 右に示したような向きの v_p を与えている.
 (Fearn and Proctor.1987)

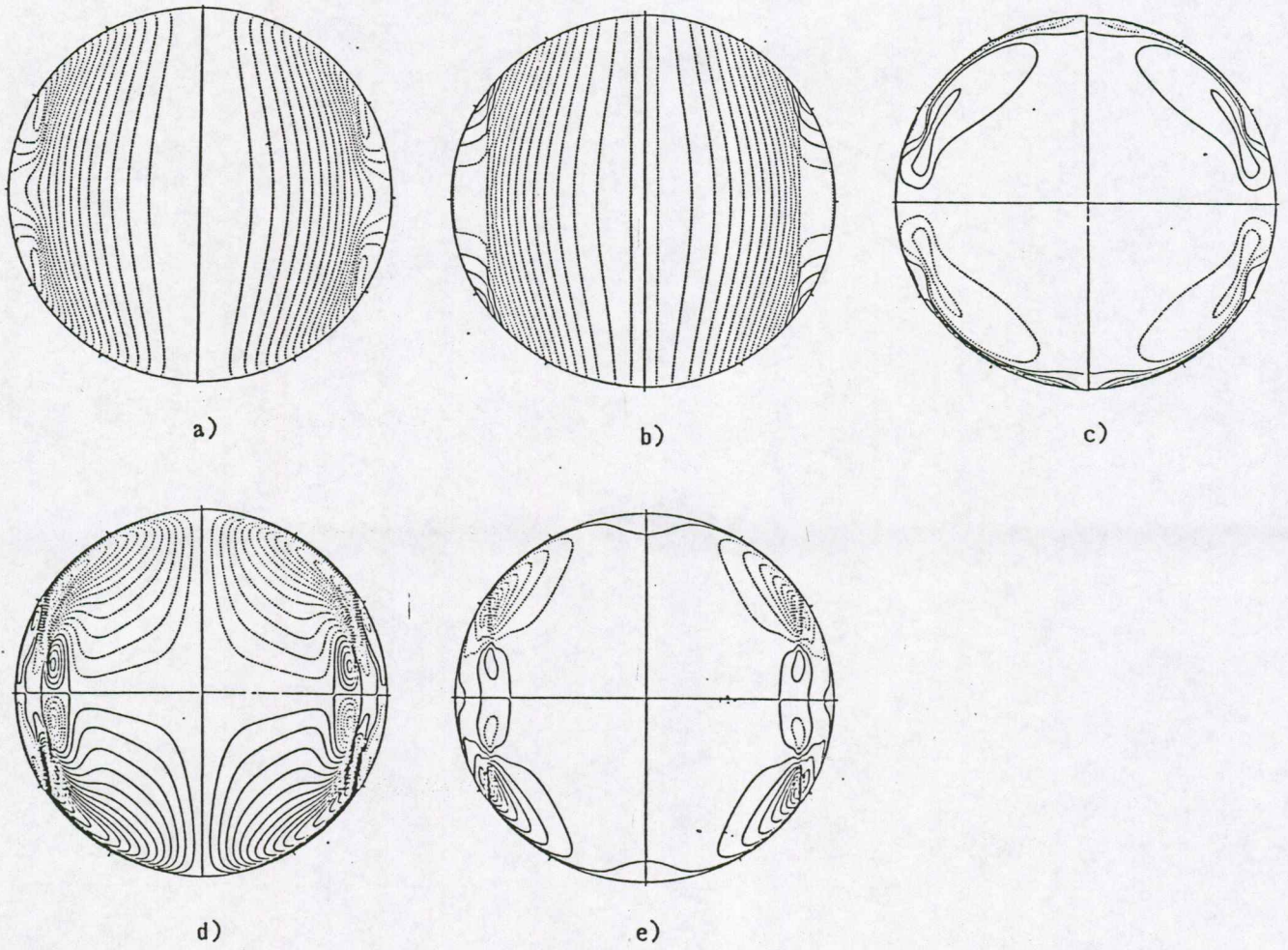


図21.model-Zの磁場，速度場．a) B_0 の磁力線，b)等 ω 線，c)等 B_z 線，d)等 B_ϕ 線
e) v_0 の流線．(Roberts.1987)

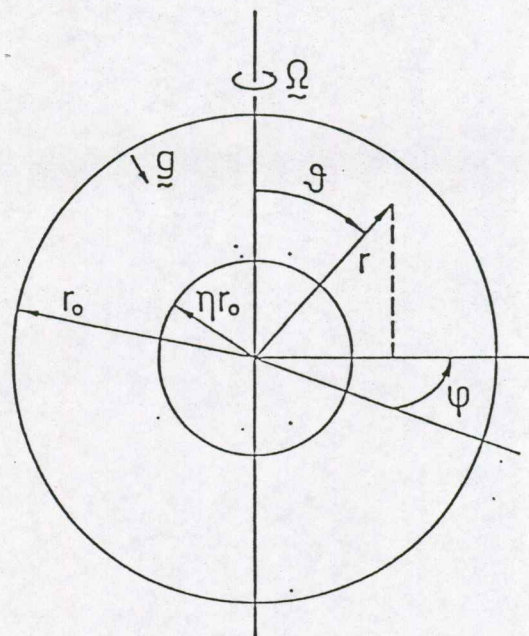


図22.考えている形状と座標系． η は内球の半径の外球の半径に対する比である．
(Busse and Zhang.1988)

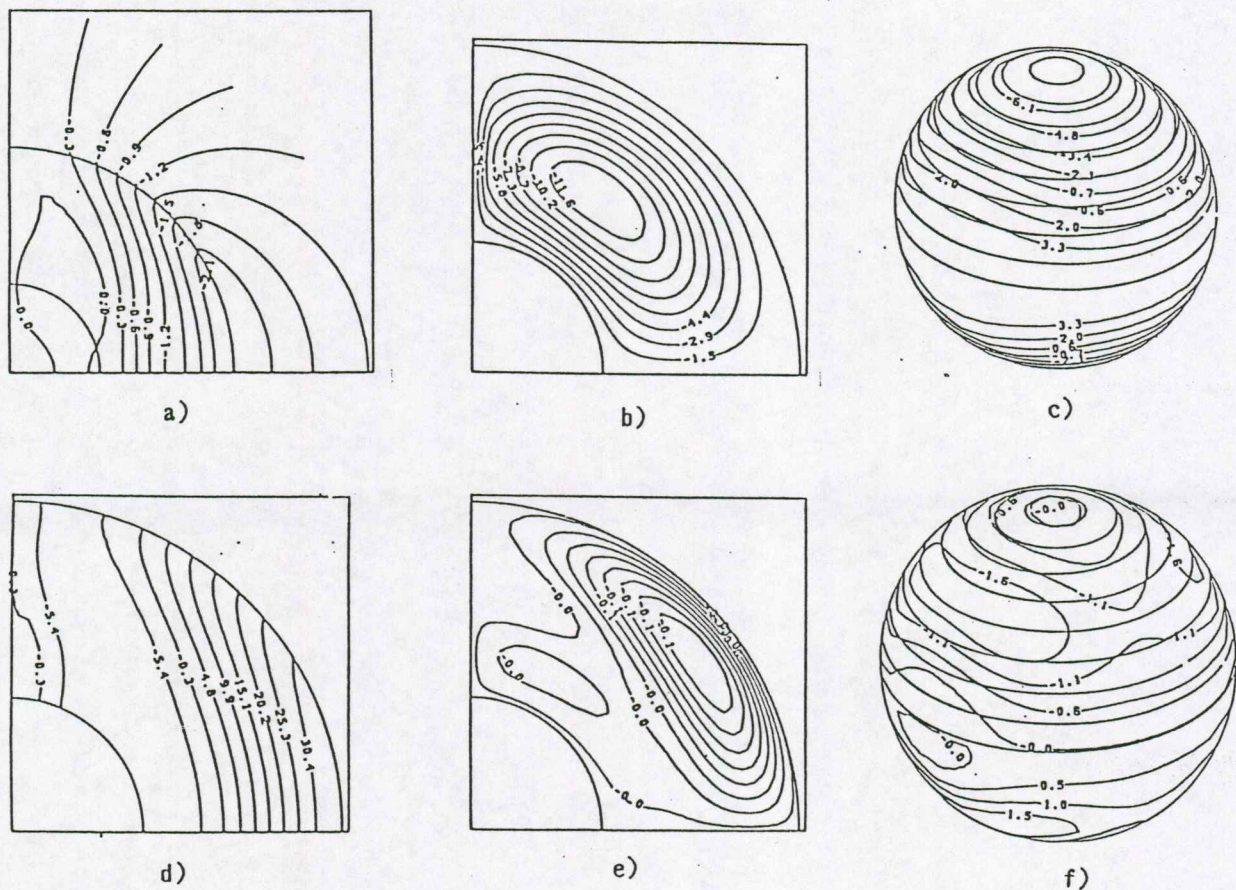


図23. $Ra=4000$, T (Taylor number)=587000, P (Prandtl number)=0.1, P_m (magnetic Prandtl number)=14.7, $\eta=0.4$ のときに求められた磁場, 速度場. a)ポロイダル磁場の軸対称成分の磁力線, b)トロイダル磁場の軸対称成分の等値線, c) $r_0/2$ でのトロイダル磁場の磁力線, d)等 ω 線, e)meridional circulationの流線, f) r_0 における磁場のradial成分(B_r)の等値線. (Busse and Zhang.1988)

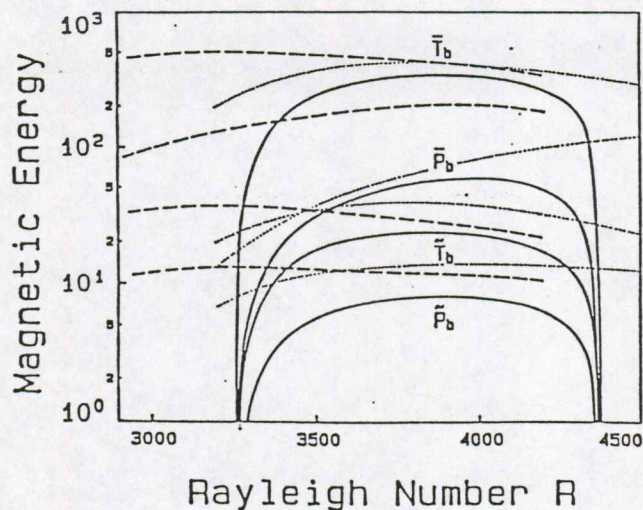


図24. Ra とMagnetic energyの関係(実線に注目). T_b, P_b はそれぞれトロイダル, ポロイダル磁場で, \sim は軸対称成分を, $-$ は非軸対称成分を表している. $3300 < Ra < 4800$ で磁場が励起されやすいことがわかる. (Zhang and Busse.1989)

Table 1 Notation and numerical magnitudes.

Symbol	Name	Source of value	Value	Coordinate symbols	
				Symbol	Name
L	Typical lengthscale	Core radius	$3.46 \cdot 10^6 \text{ m}$	r, x	radius vector from geocenter, O
\mathcal{B}	Typical B	Core values	5 Gauss (B_r) 500 Gauss (B_T)	r	radial coordinate, $ r $
U	Typical v	Westward drift	10^{-4} m s^{-1}	θ	colatitude ($\theta=0$ is axis Oz)
ω	Typical zonal shear	U/c	$3 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-1}$	ϕ	longitude
α	α -effect coefficient in relation $J = \alpha B / \mu$			z	Cartesian coordinate (Oz parallel to Ω)
				s	distance from rotation axis
				t	time
μ	magnetic permeability	free space value	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$	<i>Other fields</i>	
σ	electrical conductivity	core value	$3 \cdot 10^5 \text{ S m}^{-1}$	Symbol	Name
τ_e	free decay time $= \mu \sigma L^2 / \pi^2$	that of core	15,000 years	p	pressure
ρ	fluid density	mean core value	10^4 kg m^{-3}	Ω	angular velocity
ν	kinematic viscosity	that of the core	$10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$	v	fluid velocity; magnitude U
κ	thermal diffusivity	that of the core	$10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$	B	magnetic field; magnitude \mathcal{B}
γ	coeff. volume expansion	that of core	$5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	B_T	toroidal field; magnitude \mathcal{B}_T
β	temperature gradient			B_P	poloidal field; magnitude \mathcal{B}_P
Ω	angular speed	that of the Earth	$7 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$	J	electric current density $\approx \mathcal{B} / \mu L$
g	accel. due to gravity	typical for upper core	10 ms^{-2}	$2\rho\Omega \times v$	Coriolis force ($/\text{m}^3$) $\approx 2\rho\Omega U$
				$J \times B$	Lorentz force ($/\text{m}^3$) $\approx \mathcal{B}^2 / \mu L$
				$\rho\nu\nabla^2 v$	viscous force ($/\text{m}^3$) $\approx \rho\nu U / L^2$

Table 1 (continued)

Dimensionless numbers (measures effect $N \neq$ effect D)

Symbol	Name	Definition	N	D	Typical value
R	magnetic Reynolds number	$\mu\sigma UL$	creation of B by v	destruction of B by σ	
R_ω	ω -effect Reynolds number	$\mu\sigma\omega L^2$	creation of B_p by ω	destruction of B_p by σ	100
R_α	α -effect Reynolds number	$\mu\sigma\alpha L$	creation of B_M by α	destruction of B_M by σ	$10(?)$
D	dynamo number	$R_\omega R_\alpha$			$10^2 - 10^4$
Ra	Rayleigh number	$g\gamma\beta L^4 / \nu\kappa$	buoyancy	dissipation	
T	Taylor number	$(2\Omega L^2 / \nu)^2$	Coriolis forces	viscous forces	10^{10}
Q	Chandrasekhar number	$\sigma\mathcal{B}^2 L^2 / \rho\nu$	Lorentz forces	viscous forces	10^{15}
P	Prandtl number	ν/κ	viscous diffusion	thermal diffusion	$0.1(?)$
P_m	Magnetic Prandtl number	$\mu\sigma\nu$	viscous diffusion	magnetic diffusion	10^{-6}
q	Unnamed Prandtl number	$\mu\sigma\kappa$	thermal diffusion	magnetic diffusion	10^{-3}
Λ	Elsasser number	$\sigma\mathcal{B}^2 / 2\Omega\rho$	Lorentz forces	Coriolis forces	1

Critical dimensionless numbers

Symbol	Significance
R_c	Value of R at which dynamo action is marginally possible
D_c	Value of D at which $\alpha\omega$ -dynamo action is marginal
Ra_c	Value of Ra at which convection of infinitesimal amplitude can occur
Ra_m	Smallest (i.e. marginal) value of Ra at which infinitesimal field can be dynamo maintained
Ra_s	Smallest value of Ra at which a finite amplitude field can be dynamo maintained.