

上方接続 (物理数学Ⅱ. 力武常次・佐藤良輔・萩原幸男, 1980, 学会出版センターより)

直角座標による Laplace の方程式は

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

今、 $z$  を地表からの深さ方向にとるものとし、 $z \rightarrow \infty$  で  $T=0$  となるような解を選べば

$$T(x, y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-z\sqrt{m^2\omega_1^2 + n^2\omega_2^2}) (\alpha_{mn} \cos m\omega_1 x \cos n\omega_2 y + \beta_{mn} \cos m\omega_1 x \sin n\omega_2 y + \gamma_{mn} \sin m\omega_1 x \cos n\omega_2 y + \delta_{mn} \sin m\omega_1 x \sin n\omega_2 y)$$

が得られる。(式1)

上式において  $z$  を高さの方向にとる。ある高さ  $z_1$  における  $T(x, y, z_1)$  が与えられているとき、他の高さ  $z_2$  における  $T(x, y, z_2)$  を求める問題を考える。 $z_2 > z_1$  のとき、この問題をポテンシャルの上方接続 (upward continuation) の問題と言い、 $z_2 < z_1$  のとき下方接続 (downward continuation) という。

$T(x, y, z_1)$  が与えられていれば、式1によってフーリエ係数

$$(\alpha_{mn}, \beta_{mn}, \gamma_{mn}, \delta_{mn}) \exp(-z_1 \sqrt{m^2\omega_1^2 + n^2\omega_2^2})$$

は既知となる。 $T(x, y, z_2)$  も式1において  $z_1$  を  $z_2$  に置き換えただけの形式で書かれるからそのフーリエ係数は

$$(\alpha_{mn}, \beta_{mn}, \gamma_{mn}, \delta_{mn}) \exp(-z_2 \sqrt{m^2\omega_1^2 + n^2\omega_2^2})$$

となる。よって  $T(x, y, z_1)$  から  $T(x, y, z_2)$  が求められる。

直角座標による Laplace の方程式の解  $T(x, y, z)$  が境界条件

$$T(x, y, 0) = f(x, y)$$

$$T(x, y, \infty) = 0$$

を満たすとき、 $T$  の  $x, y$  に関するフーリエ変換

$$T^*(\xi, \eta, z) = \int \int_{-\infty}^{\infty} T(x, y, z) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy$$

は、以下で与えられる。ここで  $f^*$  は  $f(x, y)$  のフーリエ変換である。

$$T^*(\xi, \eta, z) = \int \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi, \eta) \exp(-z\sqrt{\xi^2 + \eta^2}) \quad (\text{式2})$$

高さ  $z_1$  におけるポテンシャル  $T(x, y, z_1)$  が既知ならば、そのフーリエ変換  $T(\xi, \eta, z_1)$  も既知

となる。そして式 2 の関係はそのまま  $z_1$  について成立する。 $z_2$  についても同様である。

$$T^*(\xi, \eta, z_1) = \iint_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi, \eta) \exp(-z_1 \sqrt{\xi^2 + \eta^2})$$

従って、 $z_2 > z_1$  の場合は

$$T^*(\xi, \eta, z_2) = T^*(\xi, \eta, z_1) \exp\{-(z_2 - z_1) \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\} \quad (\text{式 3})$$

の関係が得られる。

よってフーリエ変換とフーリエ逆変換の関係を式 3 に適用して

$$T(x, y, z_2) = \frac{z_2 - z_1}{2\pi} \iint \frac{T(x', y', z_1)}{\{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z_2 - z_1)^2\}^{3/2}} dx' dy'$$

これを使って数値計算により  $T(x, y, z_1)$  から  $T(x, y, z_2)$  を求めることができる。