インバージョン

一般に磁化 J の微小磁性体が存在するとき、距離 r 離れた点 P(x,y,z)における磁気ポテンシャル dV は

$$dV = -\vec{J} grad\left(\frac{1}{r}\right) d\alpha d\beta d\gamma$$

$$= -|\vec{J}|\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\right) d\alpha d\beta d\gamma \quad (1)$$

ここで(l,m,n)は磁化ベクトルの方向余弦として

$$\frac{\partial}{\partial t} = l\frac{\partial}{\partial x} + m\frac{\partial}{\partial y} + n\frac{\partial}{\partial z} \quad (2)$$

$$r^2 = (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2$$

となる。磁気異常 d(ΔT)は磁気ポテンシャルの地球磁場方向への微分なので

$$d(\Delta T) = -\frac{\partial}{\partial s} dV = |\vec{J}|\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\left(\frac{1}{r}\right) d\alpha d\beta d\gamma \quad (3)$$

ここで(L,M,N)は地球磁場ベクトルの方向余弦として

$$\frac{\partial}{\partial s} = L\frac{\partial}{\partial x} + M\frac{\partial}{\partial y} + N\frac{\partial}{\partial z} \quad (4)$$

$$r^2 = (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2$$

よって

$$\Delta T = |\vec{J}|\iiint \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\left(\frac{1}{r}\right) d\alpha d\beta d\gamma \quad (5)$$

ここで磁性岩体の磁化は誘導磁化によるものが大部分であり、残留磁化は無視できるものと仮定して、L=l, M=m, N=n とする。また一様磁化を仮定する。

(5)に 3 次元有限プリズムを当てはめて積分する。

ここで X を北、Y を東、Z を鉛直下方とする座標系を取り、プリズムの上面の中心を(x0,y0,H)とする。このとき、プリズムの中心は(α, β, γ)にある。 x 方向の磁性岩体の半分の長さを A、y 方向を B、プリズムの厚さを d、磁化の伏角をθ、磁化方向と岩体のなす角度（偏角）をφとする。

$$\Delta T = J \cdot G(x, y) \quad (6)$$

$$J = Ke \cdot To \quad (7)$$

Ke：磁化率

To：基準地球磁場の強さ

$$G(x, y) = \left[\left[\left[F1 + F2 + F3 + F4 + F5 + F6\right]_{hl}^{hu}\right]_{\alpha l}^{\alpha u}\right]_{\beta l}^{\beta u} \quad (8)$$

$$F1=\overline{m}\overline{n}Log\left(\frac{\sqrt{\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2+h_1{}^2}-\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2+h_1{}^2}+\alpha_1}\right)$$

$$F2=\overline{h}\overline{l}Log\left(\frac{\sqrt{\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2+h_1{}^2}-\beta_1}{\sqrt{\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2+h_1{}^2}+\beta_1}\right)$$

$$F3=-2\overline{l}\overline{m}Log\sqrt{\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2+h_1{}^2}+h_1$$

$$F4=-\overline{l}^2\tan^{-1}\left(\frac{\alpha_1\beta_1}{h_1\sqrt{\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2+h_1{}^2}+\alpha_1{}^2+h_1{}^2}\right)$$

$$F5=-\overline{m}^2\tan^{-1}\left(\frac{\alpha_1\beta_1}{h_1\sqrt{\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2+h_1{}^2}+\beta_1{}^2+h_1{}^2}\right)$$

$$F6=-\overline{n}^2\tan^{-1}\left(\frac{\alpha_1\beta_1}{h_1\sqrt{\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2+h_1{}^2}}\right)$$

ただし

$\alpha_1=\alpha-x$

$\alpha_u=A-x$

$\alpha_l=-A-x$

$\beta_1=\beta-y$

$\beta_u=B-y$

$\beta_l=-B-y$

$h_u=H$

$h_l=H+d$

$\overline{l}=\cos\theta\cos\varphi$

$\overline{m}=\cos\theta\sin\varphi$

$\overline{n}=\sin\theta$

x=X-x0

y=Y-y0

上式において、構造変数は A,B,H,d,x0,y0, θ , ϕ ,J の 9 個となる。

これらの構造変数のいくつかについて、ガウスの反復法を修正したマルカートの中間法を用いた非線形最小二乗法によるインバージョンを行う。

求める M 個のパラメーターを **m**(mi,mi=1,M)とし、データを fu(u=1,N)、理論式を g(xu,**m**)

とする。データ fu は誤差 ε u を含んでおり

$$f_u = g(x_u, \vec{m}_{true}) + \varepsilon_u \qquad (9)$$

ここで$\mathbf{m}_{\mathrm{true}}$は$\mathbf{m}$の真の値。最小二乗法は

$$S(\vec{m}) \equiv \sum_{u=1}^{N} \varepsilon_u = \sum_{u=1}^{N} \left\{ f_u - g(x_u, \vec{m}) \right\}^2 \to \min \qquad (10)$$

となる$\mathbf{m}$を求める。これは(11)式を満たす M 元連立方程式を解く。

$$S(\vec{m}) = \frac{\partial S(\vec{m})}{\partial m_r} = 2\sum_{u=1}^{N} \left[\left\{ f_u - g(x_u, \vec{m}) \right\} \left\{ \frac{\partial g(x_u, \vec{m})}{\partial m_r} \right\} \right] = 0 \qquad (11)$$

$(1 \le r \le M)$

ただしここで、g(xu,m)は非線形なので$\mathbf{m}$に$\mathbf{m}0$ という初期値を与え、g(xu,m)を$\mathbf{m}0$ のまわりで一次微分までのテーラー展開を行う。

$$g(x_u, \vec{m}) = g(x_u, \vec{m}_0) + \sum_{i=1}^{M} \left[\left\{ \frac{\partial g(x_u, \vec{m})}{\partial m_i} \right\} (m_i - m_{0i}) \right] \qquad (12)$$

これを(9)に代入して

$$f_u = g(x_u, \vec{m}_0) + \sum_{i=1}^{M} \left[\left\{ \frac{\partial g(x_u, \vec{m})}{\partial m_i} \right\} (m_i - m_{0i}) \right] + \varepsilon_u \qquad (13)$$

$$fu = g_u^0 + \sum_{i=1}^{M} \left[Z_{iu}^0 \bullet \beta_i^0 \right] + \varepsilon_u \qquad (14)$$

ただし

$$g_u^0 = g(x_u, \vec{m}_0) \qquad (15)$$

$$\beta_i^0 = m_i - m_{0i} \qquad (16)$$

$$Z_{iu}^0 = \left\{ \frac{\partial g(x_u, \vec{m})}{\partial m_i} \right\} \qquad (17)$$

となり、変数 β_i^0 について線形化される。(14)式を(10)式に代入すると

$$S(\vec{m}) = \sum_{u=1}^{N} \left\{ f_u - g_u^0 - \sum_{i=1}^{M} \left(Z_{iu}^0 \beta_i^0 \right) \right\}^2 \qquad (18)$$

となり、(11)式は

$$\frac{\partial S(m)}{\partial mr} = 2\sum_{u=1}^{N}\left[\left\{ f_u - g_u^0 - \sum_{i=1}^{M}\left(Z_{iu}^0 \beta_i^0\right)\right\} Z_{ru}^0 \right] = 0 \qquad (19)$$

$(1 \le r \le M)$

すなわち

$$\sum_{u=1}^{N}\sum_{i=1}^{M}\left(Z_{iu}^0 \beta_i^0 Z_{ru}^0\right) = \sum_{u=1}^{N}\left\{\left(f_u - g_u^0\right) Z_{ru}^0\right\} \qquad (20)$$

を満たす M 元連立方程式となる。行列を用いると

$$Z_0^T Z_0 b_0 = Z_0^T d$$

$$Z_0 = \begin{bmatrix} Z_{11}^0 & \cdots & Z_{M1}^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{1N}^0 & \cdots & Z_{MN}^0 \end{bmatrix}$$

$$b_0 = \begin{bmatrix} \beta_1^0 \\ \vdots \\ \beta_M^0 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} f_1 - g_1^0 \\ \vdots \\ f_N - g_N^0 \end{bmatrix}$$

これを解いて β_i^0 を求め、(16)式より

$$m_i = m_{0i} + \beta_i^0$$

として m_i を求める。そして再びこの m_i を次の計算における初期値 m_{0i} とする。これを反復して β_i^0 を 0 に収束させたところの m_i を最確値とするのがガウスの反復法である。ただしこれは収束が悪い。そこで、(20) 式の代わりに収束係数 λ をおく、マルカートの中間法を用いる。

$$\sum_{u=1}^{N}\sum_{i=1}^{M}\left\{\left(Z_{iu}^0 Z_{ru}^0 + \delta_{ir}\lambda\right)\beta_i^0\right\} = \sum_{u=1}^{N}\left\{\left(f_u - g_u^0\right) Z_{ru}^0\right\} \qquad (22)$$

すると M×M の単位行列を E として

$$\left(Z_0^T Z_0 + \lambda E\right) b_0 = Z_0^T d \qquad (23)$$

ここでλは一回ごとのインバージョンの計算に置いてM×Mの行列の対角成分の平均値

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{u=1}^{N}\left(Z_{iu}^{0}\right)^{2} \Big/ M$$

に、10^{-2}、10^{-1}、1、10、100をかけた5通りのλを設定してそれぞれについて計算を行い、その中で標準偏差が最小となるλを最適なものとした。

ここで、構造変数HとdについてZ_{iu}^{0}は(17)より

$$Z_{iu}^{0}=\left\{\frac{\partial G}{\partial H}\right\}=h(h_u)-h(h_l)$$

$$Z_{iu}^{0}=\left\{\frac{\partial G}{\partial d}\right\}=-h(h_l)$$

$$h(h1)=\Bigg[\Bigg[\cos\theta\sin\theta\sin\varphi\bullet\frac{2h_1d_1}{\left(\beta_1{}^2+h_1{}^2\right)\sqrt{\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2+h_1{}^2}}$$

$$+\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\bullet\frac{2h_1\beta_1}{\left(\alpha_1{}^2+h_1{}^2\right)\sqrt{\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2+h_1{}^2}}$$

$$-2\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\bullet\frac{1}{\sqrt{\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2+h_1{}^2}}$$

$$-\cos^2\theta\cos^2\varphi\bullet\frac{-\alpha_1\beta_1}{\left(\alpha_1{}^2+h_1{}^2\right)\sqrt{\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2+h_1{}^2}}$$

$$-\cos^2\theta\sin^2\varphi\bullet\frac{-\alpha_1\beta_1}{\left(\beta_1{}^2+h_1{}^2\right)\sqrt{\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2+h_1{}^2}}$$

$$+\sin^2\theta\cos\varphi\bullet\frac{-\alpha_1\beta_1\left(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2+2h_1{}^2\right)}{\left(\alpha_1{}^2+h_1{}^2\right)\left(\beta_1{}^2+h_1{}^2\right)\sqrt{\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2+h_1{}^2}}\Bigg]_{\alpha l}^{\alpha u}\Bigg]_{\beta l}^{\beta u}$$

ただし

$$\alpha_u=-x+A$$

$$\alpha_l=-x-A$$

$$\beta_u = -y + B$$
$$\beta_l = -y - B$$
$$h_u = H$$
$$h_l = H + d$$