

# 非駆動関節を有する水平3軸マニピュレータの 非ホロノミック拘束下におけるフィードバック制御

荒井裕彦<sup>\*1</sup> 谷江和雄<sup>\*1</sup> 城間直司<sup>\*2</sup>

## Feedback Control of a 3-Axis Planar Manipulator with a Passive Joint under a Nonholonomic Constraint

Hirohiko Arai<sup>\*1</sup>, Kazuo Tanie<sup>\*1</sup> and Naoji Shiroma<sup>\*2</sup>

Feedback control of a manipulator with a passive joint which has neither an actuator nor a holding brake is investigated. The manipulator has three axes in a horizontal plane, with the third joint being passive. The dynamic constraint on the free link is 2nd-order nonholonomic. A trajectory for positioning is composed of simple translational and rotational trajectory segments. The trajectory segments are stabilized by nonlinear feedback, considering the motion of the center of percussion of the free link. Simulations and experimental results show the effectiveness of the feedback control law.

**Key Words:** Manipulator, Passive Joint, Dynamics, Nonholonomic Constraint, Nonlinear Feedback Control

### 1. はじめに

ロボットマニピュレーションに関する研究の一つの方向性として、“minimalism” [1] という概念が様々な分野において提唱されている。これは、ある与えられたクラスの作業を行うにあたり、作業の力学的特性を有効に活用して最も単純な装置構成により作業を実行する、というものである。例えば、アクチュエータの数よりも多くの軸数を有するマニピュレータが制御できるようなれば、マニピュレータの軽量化・コストダウン・省エネルギー化・耐故障性等に貢献できると考えられる。

筆者らはさきに非駆動関節を有するマニピュレータを関節間の動力学的干渉を利用して制御する手法を提案した。非駆動関節はアクチュエータの代わりに保持ブレーキを備え、非駆動関節が自由に回転できる状態では、能動関節との間の干渉性を用いて間接的に非駆動関節を制御する。非駆動関節を固定した状態では能動関節を制御する。これらの制御モードの組み合わせによる位置決め制御 [2] [3] や、非駆動関節を解放した状態における作業座標系内の制御 [4] および経路追従制御 [5] を実現した。

この手法では、マニピュレータの動力学的のうち慣性の線形的な干渉を主に用いていたため、位置決め制御において非駆動関節のブレーキを必要とした。ところが動力学的非線形性に着目し、非駆動関節によって生ずる非ホロノミック拘束を利用すれば、ブレーキを用いなくとも位置決めが可能であることが

Orioloと中村 [7] [8] によって指摘されており、中村ら [9] [10] は実際に位置決めの実現に成功している。

非駆動関節を有するマニピュレータにおける非ホロノミック拘束は、これまで代表的な非ホロノミック系として研究が進められてきた車輪型移動体 [11]~[13] や浮遊リンク系 [14] [15] などとは異なる特徴をもつ。これらの例における拘束条件は、運動の方向が幾何学的に限定されるような運動学的拘束、または角運動量の保存による動力学的拘束であり、一般化座標および一般化速度を含む積分不可能な微分方程式として表される。一方、非駆動関節を有するマニピュレータにおける動力学的拘束は、一般化加速度までを含む形の拘束となる。このことが、これまでに非ホロノミック系を扱うために考案された数学的手法をそのまま適用することを困難にしている。Orioloと中村 [7] [8] はこうしたマニピュレータに関して拘束条件が可積分となるための条件を導いた。また中村ら [9] [10] は、第1関節が能動関節、第2関節が非駆動関節である平面マニピュレータにおいて、第1関節に周期入力を与えて第2関節の位置決めを行った。

筆者らは、水平面内で3軸をもち、第3関節がアクチュエータもブレーキも持たない非駆動関節であるマニピュレータの制御について研究を行っている。文献 [6] ではこのマニピュレータの可制御性を、有限時間内に任意の初期状態から任意の目標状態に到達可能な入力および軌道を実際に構成することによって証明した。ここで注意すべきことは、このマニピュレータの動力学にはポテンシャル項が含まれないため、その一次線形近似が不可制御となることである。これは、倒立振り子 [16] や Acrobot [17]、ブラキエーションロボット [18] などの鉛直平面内において非駆動関節を有する機構を平衡点近傍で線形近似した系が、重力の作用によって可制御となるのとは対照的である。

原稿受付 1996年10月14日

<sup>\*1</sup>機械技術研究所

<sup>\*2</sup>筑波大学

<sup>\*1</sup>Mechanical Engineering Laboratory, AIST, MITI

<sup>\*2</sup>University of Tsukuba

また、フレキシブルアームの非駆動関節によるモデリング [19] においても、非駆動関節におけるバネ要素の存在によってその線形近似は可制御な系となる。

本論文では、文献 [6] と同じマニピュレータのフィードバック制御について報告する。本論文の構成は以下の通りである。第 2 章では自由リンクに対する動力学的拘束を示す。第 3 章では、自由リンクが任意の初期位置から任意の目標位置に到達するための軌道計画について述べる。目標軌道は可制御性の証明に用いた軌道と同じく、並進および回転軌道要素から構成される。第 4 章では各軌道要素の安定性について考察する。いずれの軌道要素も不安定となるため、誤差を抑制するフィードバック制御が必要である。第 5 章において自由リンクを目標軌道に漸近安定化する非線形フィードバック制御則を提案する。リンク撃心の挙動を考慮して系を分割し、各部分系を非駆動関節の並進加速度入力によって軌道要素上に安定化する。第 6 章、第 7 章では提案した制御則によって自由リンクが目標軌道に追従し、目標位置への位置決めが実現できることをシミュレーションおよび実験により示す。

## 2. 自由リンクの非ホロノミック拘束

Fig. 1 に本論文で扱う 3 軸マニピュレータを示す。マニピュレータは水平面で動作するため、重力は作用しない。第 3 関節をアクチュエータも保持ブレーキも持たない非駆動関節とする。第 3 関節は鉛直軸まわりの回転関節である。第 1, 第 2 関節は能動関節で、第 3 関節の水平面内における位置を制御できる。Fig. 2 のような自由リンクのモデルを考える。ここで、 $\Sigma_B$  は水平面内に固定された基準座標系、 $\Sigma_L$  は関節 O を原点とし、リンクに固定された座標系 ( $x$  軸は関節 O とリンクの重

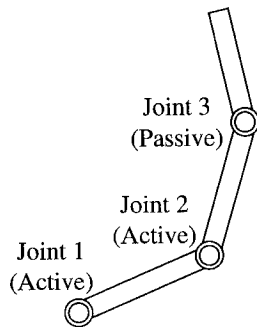


Fig. 1 3-axis manipulator with a passive joint

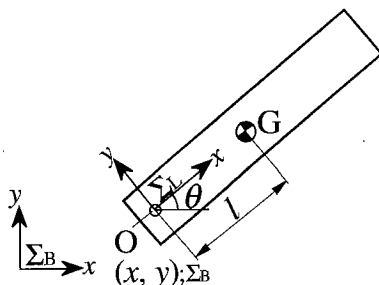


Fig. 2 Model of free link

心 G を結ぶ直線と一致する.),  $(x, y)$  は基準座標系  $\Sigma_B$  における関節 O の位置,  $\theta$  は基準座標系  $\Sigma_B$  とリンク座標系  $\Sigma_L$  がなす角度を表す。系の一般化座標は  $(x, y, \theta)$  で表される。関節 O まわりのトルク  $f_\theta$  は,

$$f_\theta = -ml\ddot{x} \sin \theta + ml\ddot{y} \cos \theta + (I + ml^2)\ddot{\theta} \quad (1)$$

ただし,  $m$  はリンクの質量,  $I$  はリンクの重心 G まわりの慣性モーメント,  $l$  は関節 O とリンクの重心 G との距離  $|OG|$  である。関節 O は非駆動関節であるから  $f_\theta = 0$  とおくことができる。  $l \neq 0$  と仮定し  $\lambda \equiv l + I/(ml)$  とすれば, 式 (1) より系に対する拘束条件は,

$$-\ddot{x} \sin \theta + \ddot{y} \cos \theta + \lambda \ddot{\theta} = 0 \quad (2)$$

という形に表せる。関節 O の並進加速度  $(\ddot{x}, \ddot{y})$  は系への入力として扱うことができる。式 (2) の拘束条件は一般化座標, 一般化速度および時間の関数である第一積分をもたない。従ってこの系の拘束は 2 階の非ホロノミック拘束である。

なお, ここで示した系は, 摩擦のない水平面上を滑る平面剛体の 1 点に, 方向と大きさを調節できる力を加えた場合と等価である。平面上の物体の pushing manipulation [20], ホバークラフト [21], 全方向移動車とボールキャスター台車を連結したトレーラーなども同じ力学系となり, 本論文で提案する手法はこれらの系にも適用可能である。

## 3. 軌道計画

非ホロノミック系のための従来の軌道計画手法としては, 最適制御問題として定式化する方法 [15] や, チェインドフォーム変換などの微分幾何学に基づく数学的手法 [12] などがある。これらのうち最適制御問題による手法は一般に繰り返し計算を必要とし, 収束解を得るのに非常に時間がかかる。またこれまでの微分幾何学的手法は, 拘束条件が  $G(q)\dot{q} = 0$  ( $q$ : 一般化座標) の形で表され, 状態方程式が  $\dot{q} = P(q)u$  ( $u$ : 入力) という対称アフィン系として定式化される系を対象としてきた。非駆動関節を有するマニピュレータにおいては, 拘束条件が加速度を含む  $M_p(q)\ddot{q} + b_p(q, \dot{q}) = 0$  という形で表され, また状態方程式も,  $\frac{d}{dt}(q, \dot{q}) = f(q, \dot{q}) + P(q)u$  という, ドリフト項  $f(q, \dot{q})$  を含むアフィン系となる。従って, 非駆動関節を有するマニピュレータの軌道計画に従来の微分幾何学的手法を直接適用することは困難である。

文献 [6] では, 第 2 章でモデル化された自由リンクの可制御性を構成的方法 [11] によって証明した。この証明においては, 任意の初期状態から出発して有限時間内に任意の目標状態に到達可能な軌道および入力の例を実際に作り出している。このような軌道が少なくとも一つ存在するということは大域的な可制御性の定義そのものにほかならないから, 軌道が構成できれば同時に可制御性が証明できたことになる。本論文ではこの証明法に用いたものと同じ軌道を, リンクの位置決めのための軌道として利用する。この計画手法は直観的な理解が容易であり, また収束に時間のかかる繰り返し計算が不必要なため非常に高速であるという特長をもつ。

### 3.1 軌道要素

位置決め軌道は次のように構成する。まず、座標成分間の分離が可能な軌道要素を作る。次にこうした単純な軌道要素を組み合わせ、初期位置と目標位置を結ぶ軌道を構成する。非駆動関節を有するマニピュレータでは、運動している状態から能動関節を停止させ加速度入力をゼロとしても、状態方程式に含まれるドリフト項のため、一般に非駆動関節は運動し続ける。従って軌道要素としては、能動関節と非駆動関節が同時に停止するような軌道を選ぶ必要がある。

Fig. 2 のモデルにおいて、関節 O にリンク座標系  $\Sigma_L$  の  $x$  軸方向の加速度  $(a_{xL}, 0)$  を与える。このとき基準座標系  $\Sigma_B$  における関節 O の加速度  $(\ddot{x}, \ddot{y})$  は、

$$\ddot{x} = a_{xL} \cos \theta, \quad \ddot{y} = a_{xL} \sin \theta \quad (3)$$

これを式 (2) に代入すると、 $\lambda \ddot{\theta} = 0$  より  $\ddot{\theta} = 0$  となる。すなわち関節 O とリンク重心 G を結ぶ方向に関節 O を加減速してもリンクの角加速度は発生しない。このことを利用すればリンクの回転を伴わない並進運動が可能である。

次に、リンクの回転運動を考える。関節 O に基準座標系  $\Sigma_B$  のある 1 点  $(x_C, y_C)$  を中心とした半径  $r$  の円運動を行わせる (Fig. 3)。このとき  $\Sigma_B$  における関節 O の位置  $(x, y)$  は、

$$x = x_C + r \cos \phi(t), \quad y = y_C + r \sin \phi(t) \quad (4)$$

ただし  $\phi(t)$  は円周上での関節 O の位置を表す角度である。これを式 (2) に代入すると、

$$r \cos(\theta - \phi) \ddot{\phi} + r \sin(\theta - \phi) \dot{\phi}^2 + \lambda \ddot{\theta} = 0 \quad (5)$$

ここで  $\phi = \theta + \pi$ ,  $r = \lambda$  とおくと、上式は恒等的に成立し、拘束条件 (2) は  $\phi$  の速度、加速度と無関係に満たされる。すなわち円周上での加減速にかかわらずリンクは円運動に追従し、その中心は基準座標系で静止したままとなる。これを用いれば、リンクの並進を伴わない回転運動が可能である。この場合  $\Sigma_B$  における回転中心  $(x_C, y_C)$  は、 $\Sigma_L$  においては  $(\lambda, 0)$  と表され、関節 O に対するリンクの撃心と一致する。

以上の結果を軌道要素としてまとめる。

#### (i) 並進軌道

$$\begin{cases} x = x_0 + s(t) \cos \theta_0, & y = y_0 + s(t) \sin \theta_0 \\ \theta = \theta_0 \text{ (const.)} \end{cases} \quad (6)$$

$s(t)$  は 2 階微分可能なスカラ関数で、

$$s(0) = 0, \quad s(T) = s_d, \quad \dot{s}(0) = \dot{s}(T) = 0$$

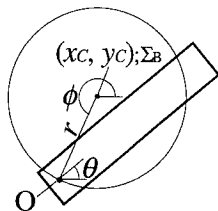


Fig. 3 Circular motion of joint

#### (ii) 回転軌道

$$\begin{cases} x = x_C + \lambda \cos \phi(t), & y = y_C + \lambda \sin \phi(t) \\ \theta = \phi(t) - \pi \end{cases} \quad (7)$$

$\phi(t)$  は 2 階微分可能なスカラ関数で、

$$\phi(0) = \theta_0 + \pi, \quad \phi(T) = \theta_d + \pi, \quad \dot{\phi}(0) = \dot{\phi}(T) = 0$$

(i) においてはリンクの姿勢  $\theta$  は一定値をとる。また (ii) においては  $\theta$  は  $\phi(t)$  と完全に連動しており、 $\dot{\phi}(t) = 0$  となればリンクの回転は停止する。

### 3.2 組み合わせ軌道の構成

前節の軌道要素を組み合わせ、任意の初期位置から有限時間内に任意の目標位置に到達可能な軌道が構成できる。Fig. 4 で初期位置 A から目標位置 B への位置決めを考える。自由リンクは速度ゼロの状態から出発し、軌道終端において完全に停止する。まず初期位置 A、目標位置 B においてそれぞれ撃心  $P_0, P_d$  を中心に半径  $\lambda$  の円  $R_A, R_B$  を描く。次にこれらの中心間を結ぶ直線と二つの円との交点のうち、各円の中心に関して同じ側にある 2 点をそれぞれ C, D とする。これらの円周軌道上ではどのように関節 O の位置を加減速しても撃心の位置は変化しない。従って前節 (ii) の回転軌道によって初期位置 A から点 C まで関節 O の位置を回転させることができる。その結果関節 O と重心 G はともに直線 CD 上にあるから、(i) の並進軌道によって、リンクを回転させることなく関節 O を点 D まで移動できる。最後に回転軌道によって、関節 O の位置を点 D から目標位置 B まで回転させる。以上の操作によって初期位置 A から目標位置 B への位置決めが完了する。

初期位置と目標位置におけるリンクの姿勢が平行でない場合には別の方法で位置決め軌道を構成することもできる。初期位置 A から目標位置 B への位置決めを考える (Fig. 5)。ただし  $\theta_0 \neq \theta_d$  とする。初期位置 A と目標位置 B において関節と撃心を結ぶ直線をそれぞれ描く。これら二つの直線の交点を C とする。まず、初期位置から並進軌道によって撃心が点 C と一致するまでリンクを並進させる。次に、点 C を中心とする回転軌道によって関節が直線 CB 上に達するまでリンクを回転させる。撃心の位置は点 C に静止したまま変化しない。最後に、並進軌道によってリンクを並進させ、関節を点 B と一致させる。こうして、リンクは初期位置 A から目標位置 B に到達する。

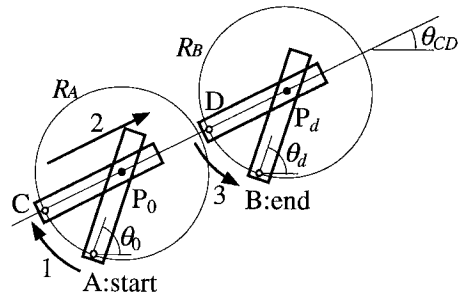


Fig. 4 Positioning of link (I)

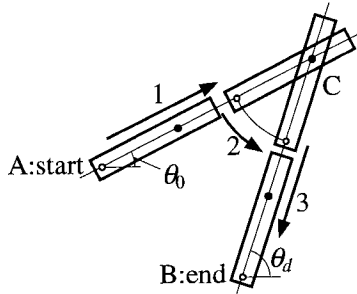


Fig. 5 Positioning of link (II)

#### 4. 軌道の安定性

非駆動関節の並進加速度  $(\ddot{x}, \ddot{y})$  は自由リンクへの入力として扱うことができる。前章の計画軌道に基づいてフィードフォワード制御を行う場合、非駆動関節の位置が目標軌道に従って正確に制御されれば、自由リンクの姿勢  $\theta$  は軌道に追従し、位置決めが達成されるはずである。しかし、 $\theta$  には初期誤差が含まれる可能性もあり、その場合にも軌道終端において  $\theta$  が目標点の近傍に到達できるかという問題が生ずる。

このとき、状態空間における軌道自体の安定性が重要な要素となる。すなわち、軌道回りのベクトル場が軌道から発散する方向に向かっているときには、軌道は不安定となり、軌道からの微小な偏差も状態点が軌道に沿って進むにつれて拡大されていく。逆に軌道回りのベクトル場が軌道に向かって収束する方向にある場合には、軌道は安定であって、偏差は状態点が進むに従って減少する。

具体的には非駆動関節の位置  $(x, y)$  および速度  $(\dot{x}, \dot{y})$  が目標軌道の通りに制御されたと仮定して、自由リンクの角度  $\theta$  および角速度  $\dot{\theta}$  がどのような挙動を示すかを調べればよい。

##### 4.1 並進軌道

はじめに、並進軌道の安定性を調べる。目標軌道は基準座標系  $\Sigma_B$  の  $x$  軸と一致している ( $y = 0, \dot{y} = 0, \ddot{y} = 0$ ) として自由リンクの角度偏差  $\Delta\theta$  を考える。軌道上のある瞬間において、 $\dot{x} = v_{xB}, \ddot{x} = a_{xB}$  とする。拘束条件 (2) より、

$$-a_{xB} \sin \Delta\theta + \lambda \Delta\ddot{\theta} = 0 \quad (8)$$

$\Delta\theta$  は微小な角度であるとする、一次近似より、

$$\Delta\ddot{\theta} - \frac{a_{xB}}{\lambda} \Delta\theta = 0 \quad (9)$$

$a_{xB} > 0$  の場合には、この系の極の一つは正の実数であり、 $\Delta\theta$  は不安定である。 $(\Delta\theta, \Delta\dot{\theta}) = (0, 0)$  は不安定平衡点となる。また、 $a_{xB} < 0$  の場合には、式 (8) の系は重力下の振子と等価で周期解をもち、漸近安定ではない。 $a_{xB} = 0$  のときには極は原点であり、この場合  $\Delta\theta$  は安定ではあるが漸近安定ではない。並進軌道においては必ず  $a_{xB} > 0$  となる部分が含まれるため、並進軌道全体としては  $\theta$  の初期誤差が拡大される傾向にあると言える。

##### 4.2 回転軌道

次に、回転軌道の安定性を考える。非駆動関節の位置が回転運動をしているときの拘束条件は式 (5) で表される。非駆動関節の位置が目標軌道に従って制御される場合、 $r = \lambda$  であるから、

$$\cos(\theta - \phi)\ddot{\phi} + \sin(\theta - \phi)\dot{\phi}^2 + \ddot{\theta} = 0 \quad (10)$$

ここで  $\theta$  の目標角度からの偏差  $\Delta\theta = \theta - \phi + \pi$  を考えると、

$$\cos(\Delta\theta - \pi)\ddot{\phi} + \sin(\Delta\theta - \pi)\dot{\phi}^2 + \Delta\ddot{\theta} + \ddot{\phi} = 0 \quad (11)$$

また、軌道上のある瞬間において、 $\dot{\phi} = \omega, \ddot{\phi} = \alpha$  とする。 $\Delta\theta$  は微小であるとする、一次近似により、

$$\Delta\ddot{\theta} - \omega^2 \Delta\theta = 0 \quad (12)$$

この系の固有値は  $\pm\omega$  であり、 $\omega$  の符号にかかわらず  $\Delta\theta$  は不安定である。この場合も  $(\Delta\theta, \Delta\dot{\theta}) = (0, 0)$  は不安定平衡点である。従って、回転軌道においても  $\theta$  の初期誤差は拡大される傾向にある。

以上の結果により、並進軌道要素、回転軌道要素ともに漸近安定ではなく不安定な部分を含むため、自由リンクの姿勢  $\theta$  の初期誤差を拡大する傾向にある。従って、これらを組み合わせた位置決め軌道に基づくフィードフォワード制御においては、計画された目標軌道の通りに非駆動関節の位置を制御したとしても  $\theta$  の初期誤差が拡大され、軌道終端において自由リンクが目標位置の近傍に到達できることは保証されない。

#### 5. フィードバック制御

前章で示したように、各軌道要素は自由リンク姿勢  $\theta$  の誤差を拡大する傾向にあるため、目標軌道に従ったフィードフォワード制御のみでは目標位置への到達の保証が得られない。さらに現実のロボットにおいては、非駆動関節の摩擦や自由リンクのモデル誤差、非駆動関節位置の追従誤差などによっても  $\theta$  に誤差が生ずる恐れがある。従って、このような誤差を抑制するためのフィードバック制御を構成する必要がある。

ところが Oriolo と中村 [7] [8] は、よく知られた Brockett の定理 [22] に基づき、水平面内で運動する非駆動関節を有するマニピュレータにおいては、平衡点を漸近安定化する滑らかな状態フィードバック則が存在しないことを示している。すなわち目標位置にリンクの位置・姿勢を同時に漸近安定化できる滑らかな状態フィードバック則は存在しない。

そこで本章では、平衡点ではなく軌道を漸近安定化するフィードバック制御を考える。本論文のマニピュレータにおいては非駆動関節の並進加速度を入力としており、系への入力の数は 2 である。まず一般化座標および入力を変換し、成分間の非干渉化を行う。次に一方の入力を用い、座標成分のうちの一つに関して目標軌道に従った運動を生じさせる。その座標成分の速度や加速度は、残り二つの座標成分の挙動を表す部分系におけるパラメータとなる。これらのパラメータがゼロの場合には、部分系は滑らかな状態フィードバックでは安定化が不可能である。しかしパラメータの値を適切に選べば (すなわち最初の座標成

分に適切な運動を与えれば), この部分系は安定化が可能となり得る. 最後にもう一方の入力を用いてフィードバックを構成し, 部分系を目標軌道へ漸近安定化する.

具体的には, この手法は次のような着想に基づいている. 並進軌道の場合, 一方の入力を用いて非駆動関節を目標軌道と平行な方向に加速または減速すると, リンクには加速度と逆の方向に慣性力が作用する. そのときリンクは仮想的な重力場における振りまたは倒立振子と等価な挙動を示す. 前章の並進軌道でリンク角度が不安定となったのは, 倒立振子と等価な場合である. 振り/倒立振子は重力と垂直な方向の加速度入力を用いてその方向の変位と振子の角度を同時に安定化可能である. そこで目標軌道と垂直な方向の加速度を入力としてフィードバックを構成し, リンク角度と非駆動関節の位置を目標軌道上へ漸近安定化することができるはずである. また回転軌道の場合は, リンクには軌道の外側に向けて遠心力が作用するために倒立振子と類似の状態となり, それを仮想的な重力として利用すれば漸近安定化のためのフィードバックが構成可能である.

### 5.1 座標変換

はじめに座標成分と入力を変換し, それらの分離を行う. 撃心の位置  $(x_P, y_P)$  と非駆動関節の位置  $(x, y)$  との関係は,

$$x_P = x + \lambda \cos \theta, \quad y_P = y + \lambda \sin \theta \quad (13)$$

撃心の速度  $(\dot{x}_P, \dot{y}_P)$ , 加速度  $(\ddot{x}_P, \ddot{y}_P)$  は

$$\dot{x}_P = \dot{x} - \lambda \dot{\theta} \sin \theta, \quad \dot{y}_P = \dot{y} + \lambda \dot{\theta} \cos \theta \quad (14)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_P = \ddot{x} - \lambda \ddot{\theta} \sin \theta - \lambda \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ \ddot{y}_P = \ddot{y} + \lambda \ddot{\theta} \cos \theta - \lambda \dot{\theta}^2 \sin \theta \end{cases} \quad (15)$$

ここで, 入力である非駆動関節の並進加速度  $(\ddot{x}, \ddot{y})$  を, リンク座標系  $\Sigma_L$  の  $x$  軸 (関節  $O$  とリンクの重心  $G$  を結ぶ直線) 方向の成分  $a_{xL}$  と  $y$  軸方向の成分  $a_{yL}$  で表す.

$$\begin{cases} \ddot{x} = a_{xL} \cos \theta + a_{yL} \sin \theta \\ \ddot{y} = a_{xL} \sin \theta - a_{yL} \cos \theta \end{cases} \quad (16)$$

上式を拘束条件 (2) に代入すると,

$$-a_{yL} + \lambda \ddot{\theta} = 0 \quad (17)$$

撃心の加速度  $(\ddot{x}_P, \ddot{y}_P)$  は, 式 (15)~(17) より,

$$\begin{cases} \ddot{x}_P = (a_{xL} - \lambda \dot{\theta}^2) \cos \theta \\ \ddot{y}_P = (a_{xL} - \lambda \dot{\theta}^2) \sin \theta \end{cases} \quad (18)$$

ここで,

$$a_{xL} = u_t + \lambda \dot{\theta}^2, \quad a_{yL} = u_n \quad (19)$$

として,  $(u_t, u_n)$  を系への新たな入力とする. すなわち非駆動関節の並進加速度  $(\ddot{x}, \ddot{y})$  を,

$$\begin{cases} \ddot{x} = (u_t + \lambda \dot{\theta}^2) \cos \theta + u_n \sin \theta \\ \ddot{y} = (u_t + \lambda \dot{\theta}^2) \sin \theta - u_n \cos \theta \end{cases} \quad (20)$$

という形で与える. すると, リンクの角加速度  $\ddot{\theta}$  および撃心の並進加速度  $(\ddot{x}_P, \ddot{y}_P)$  の応答は,

$$\ddot{\theta} = u_n / \lambda, \quad \ddot{x}_P = u_t \cos \theta, \quad \ddot{y}_P = u_t \sin \theta \quad (21)$$

という非常に簡単な形で表される. 入力  $u_t$  は  $\theta$  から分離され,  $\theta$  に影響を及ぼさない.

### 5.2 並進軌道

並進軌道の漸近安定化を考える. 並進軌道においては, 軌道の進行方向の加速度を目標軌道に従って与えながら, リンクの姿勢が軌道と平行になり, また撃心の位置が目標軌道上に来るように漸近安定化すればよい. 目標の並進軌道は基準座標系  $\Sigma_B$  の  $x$  軸と一致すると仮定する. 撃心の  $x$  軸方向の加速度  $\ddot{x}_P$  を,

$$\ddot{x}_P = a_{xB} \quad (\text{const.}) \quad (22)$$

と与える.  $a_{xB}$  の値は撃心の  $x$  座標の初期値  $x_{P0}$  と目標値  $x_{Pd}$  から決定できる (目標位置で停止させるためには軌道の途中で少なくとも1回符号を変える必要がある). 例えば,

$$\begin{cases} a_{xB} = 4(x_{Pd} - x_{P0})/T^2 & (0 \leq t < T/2) \\ a_{xB} = -4(x_{Pd} - x_{P0})/T^2 & (T/2 \leq t \leq T) \end{cases} \quad (23)$$

とする. 実際には上の加速度を積分して撃心の  $x$  軸方向変位の加減速軌道を計画し,  $x_P$  がそれに追従するようにフィードバック制御する. 軌道上のある瞬間における  $x_P$  の目標値を  $x_{Pref}$  とすると,

$$a_{xB} = \ddot{x}_{Pref} + K_{vxB}(\dot{x}_{Pref} - \dot{x}_P) + K_{pXB}(x_{Pref} - x_P) \quad (24)$$

などとすればよい. 入力  $u_t$  は,

$$u_t = a_{xB} / \cos \theta \quad (25)$$

と与える.

もう一つの入力  $u_n$  を用いて,  $y_P$  と  $\theta$  の挙動を表す残りの部分系を原点に漸近安定化する. 部分系は式 (21)(22) より,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_P \\ \dot{y}_P \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}_P \\ a_{xB} \tan \theta \\ \dot{\theta} \\ u_n / \lambda \end{pmatrix} \quad (26)$$

と表される.

上記の部分系を漸近安定化するために, 厳密線形化手法 [13][23] を用いる. これは非線形系を非線形状態フィードバックと座標変換を用いて可制御な線形系に変換する手法である. 付録では文献 [13] の手順に従って, 部分系 (26) が厳密線形化の必要十分条件を満たすことを示し, 厳密線形化のためのフィードバックと座標変換を求めている. 結果の座標変換は付録の式 (50) より,

$$\xi = \begin{pmatrix} y_P & \dot{y}_P & a_{xB} \tan \theta & \frac{a_{xB} \dot{\theta}}{\cos^2 \theta} \end{pmatrix}^T \quad (27)$$

また非線形状態フィードバックは付録の式 (44)(51) より,

$$u_n = -2\lambda \dot{\theta}^2 \tan \theta + \frac{\lambda \cos^2 \theta}{a_{xB}} v \quad (28)$$

ただし,  $v$  は新たな入力である. これらのフィードバックおよび座標変換の有効範囲は,  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$  である. この範囲

では  $\xi \rightarrow \mathbf{0}$  ならば  $y_P, \dot{y}_P, \theta, \dot{\theta} \rightarrow 0$  となる。変換された結果の線形状態方程式は、

$$\frac{d\xi}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v \quad (29)$$

となる。この線形系は可制御であり、これを原点に漸近安定化する最適レギュレータ等の線形コントローラは、

$$v = \mathbf{K}_\xi \xi \quad (30)$$

という形で容易に設計可能である。線形コントローラによって得られた入力  $v$  を式 (28) によって入力  $u_n$  に変換すれば、 $y_P$  と  $\theta$  をそれぞれ 0 に漸近安定化することができる。

なお、上記のフィードバック則は  $a_{xB}$  が一定の範囲で有効である。この範囲では部分系の偏差が減少していくが、 $a_{xB}$  の符号切換えの影響も含めた軌道全体の安定性はここでは議論していない。また、軌道要素は有限時間長の区間であるから、その範囲で偏差が完全にゼロになるということは保証できない。

### 5.3 回転軌道

次に回転軌道の漸近安定化を考える。回転軌道においては、リンクの角度・角速度・角加速度を目標軌道に従って与えながら、撃心の位置が目標軌道の中心と一致するように漸近安定化する。式 (21) より  $\dot{\theta} = u_n/\lambda$  であるから、リンクの姿勢  $\theta$  の制御については、入力  $u_n$  を用いて、

$$u_n = \lambda \{ \ddot{\theta}_{ref} + K_{v\theta}(\dot{\theta}_{ref} - \dot{\theta}) + K_{p\theta}(\theta_{ref} - \theta) \} \quad (31)$$

というフィードバックを構成すればよい。ただし、 $\theta_{ref}$  は軌道上のある瞬間における  $\theta$  の目標値である。

残りの部分系は撃心の位置の挙動を表し、これをもう一方の入力  $u_t$  を用いて目標軌道の中心に漸近安定化する。目標軌道の中心を  $(x_C, y_C)$  とすると、そこからの撃心の位置偏差  $(e_x, e_y)$  は、

$$e_x = x_C - x_P, \quad e_y = y_C - y_P \quad (32)$$

撃心の位置偏差を、リンク座標系  $\Sigma_L$  の  $x$  軸方向の成分  $e_t$  と  $y$  軸方向の成分  $e_n$  で表す。

$$\begin{cases} e_t = e_x \cos \theta + e_y \sin \theta \\ e_n = e_x \sin \theta - e_y \cos \theta \end{cases} \quad (33)$$

この式を時間で微分すると、

$$\begin{cases} \dot{e}_t = \dot{e}_x \cos \theta + \dot{e}_y \sin \theta - e_n \dot{\theta} \\ \dot{e}_n = \dot{e}_x \sin \theta - \dot{e}_y \cos \theta + e_t \dot{\theta} \end{cases} \quad (34)$$

$$\begin{cases} \ddot{e}_t = \ddot{e}_x \cos \theta + \ddot{e}_y \sin \theta - \dot{\theta}(\dot{e}_x \sin \theta - \dot{e}_y \cos \theta) \\ \quad - \dot{e}_n \dot{\theta} - e_n \ddot{\theta} \\ \ddot{e}_n = \ddot{e}_x \sin \theta - \ddot{e}_y \cos \theta + \dot{\theta}(\dot{e}_x \cos \theta + \dot{e}_y \sin \theta) \\ \quad + \dot{e}_t \dot{\theta} + e_t \ddot{\theta} \end{cases} \quad (35)$$

上式を整理すると、

$$\begin{cases} \ddot{e}_t = \ddot{e}_x \cos \theta + \ddot{e}_y \sin \theta - 2\dot{e}_n \dot{\theta} + e_t \dot{\theta}^2 - e_n \ddot{\theta} \\ \ddot{e}_n = \ddot{e}_x \sin \theta - \ddot{e}_y \cos \theta + 2\dot{e}_t \dot{\theta} + e_n \dot{\theta}^2 + e_t \ddot{\theta} \end{cases} \quad (36)$$

ところで、式 (21)(32) より、

$$\ddot{e}_x = -u_t \cos \theta, \quad \ddot{e}_y = -u_t \sin \theta \quad (37)$$

上式を式 (36) に代入すると、

$$\begin{cases} \ddot{e}_t = -u_t - 2\dot{e}_n \dot{\theta} + e_t \dot{\theta}^2 - e_n \ddot{\theta} \\ \ddot{e}_n = 2\dot{e}_t \dot{\theta} + e_n \dot{\theta}^2 + e_t \ddot{\theta} \end{cases} \quad (38)$$

軌道上のある瞬間において、 $\dot{\theta} = \omega$ 、 $\ddot{\theta} = \alpha$  とすると、撃心の位置偏差の挙動を表す部分系を、次のような係数時変の線形状態方程式で表現することができる。

$$\frac{de}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \omega^2 & -\alpha & 0 & -2\omega \\ \alpha & \omega^2 & 2\omega & 0 \end{pmatrix} e + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} u_t$$

$$e = (e_t \quad e_n \quad \dot{e}_t \quad \dot{e}_n)^T \quad (39)$$

リンクの角速度  $\omega$  の時間変化が小さく、角加速度  $\alpha$  が無視できる場合について式 (39) を定係数の線形状態方程式で近似する ( $\omega$  が一定ならば、近似を用いることなく定係数線形系となる)。  $\omega > 0$  のときに、時間  $t$  を  $\tau = \omega t$ 、また入力  $u_t$  を  $u_t = \omega^2 v$  と置き換えて変数変換すると、

$$\frac{de_\omega}{d\tau} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} e_\omega + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} v$$

$$e_\omega = \left( e_t \quad e_n \quad \frac{de_t}{d\tau} \quad \frac{de_n}{d\tau} \right)^T \quad (40)$$

上の線形系は可制御であり、これを原点に漸近安定化する線形コントローラが構成できる。

$$v = \mathbf{K}_\omega e_\omega \quad (41)$$

こうして得られた入力  $v$  を  $u_t$  に変換すれば、 $e_t$  と  $e_n$  をそれぞれ 0 に漸近安定化することが可能である。すなわち撃心を目標軌道の中心と一致させることができる。  $\omega < 0$  のときには、時間軸を単調増加とするために時間  $t$  を  $\tau = -\omega t$  として変数変換を行い、同様に線形コントローラを設計すればよい。

一方、リンクの角速度が無視できる程度に小さく、 $\omega = 0$  で近似可能な範囲を考える。  $\alpha > 0$  のときには、時間  $t$  を  $\tau = \sqrt{\alpha} t$ 、入力  $u_t$  を  $u_t = \alpha v$  として、式 (39) を変数変換すれば、

$$\frac{de_\alpha}{d\tau} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e_\alpha + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} v$$

$$e_\alpha = \left( e_t \quad e_n \quad \frac{de_t}{d\tau} \quad \frac{de_n}{d\tau} \right)^T \quad (42)$$

上の近似系も可制御であり、 $e_t$ ,  $e_n$  を原点に漸近安定化するための線形コントローラが、

$$v = K_{\alpha} e_{\alpha} \quad (43)$$

という形で構成できる。  $\alpha < 0$  のときには、新たな時間軸  $\tau$  を  $\tau = \sqrt{-\alpha}t$  とおいて変数変換を行う。

回転軌道において撃心位置の漸近安定化を行うためには、これら2種類の線形コントローラを切換えて用いる。すなわちリンク回転の開始直後または停止直前においてリンク角速度が小さい範囲ではコントローラ(43)を用い、軌道中間のリンク角速度が大きい範囲ではコントローラ(41)を用いる。(ただしこの場合も直線軌道要素と同様に切換えの影響を厳密には議論していない。また有限時間長の区間で偏差がまったくゼロとなることも保証できない。)

$\omega$  と  $\alpha$  の変化は十分緩慢であると考え、式(39)そのものを定係数の線形系で近似してコントローラを設計する方法もある。ただしその場合には変化していく  $\omega$  と  $\alpha$  の値に基づいて実時間でコントローラの係数を計算する必要がある。上に示した方法ではフィードバック係数は一定であり、得られた入力  $v$  あるいは  $\alpha$  の値に応じて変換するだけでよい。

## 6. シミュレーション

提案したフィードバック制御則の有効性を確認するためにシミュレーションを行った。式(30)(41)(43)の線形コントローラのフィードバック係数は、それぞれLQ最適制御則に基づいて決定した。関節と撃心との距離  $\lambda$  は0.2[m]である。並進軌道のフィードバックによる追従の様子をFig. 6に示す。黒い円は撃心、白い円は非駆動関節を表す。軌道の長さは1[m]とし、軌道と垂直方向に0.1[m]の初期誤差を与えた。このときの軌道に対する位置偏差、角度偏差の変化をFig. 7に示す。初期誤差にもかかわらずリンクは目標軌道に収束している。

また、フィードバック制御による回転軌道への追従をFig. 8, Fig. 9に示す。リンクの回転角は  $2\pi$ [rad]とし、初期誤差として0.07[m]を与えた。誤差はフィードバックにより抑制され、撃心は目標軌道の中心へ収束していく。

## 7. 実験

3軸の平面マニピュレータ(Fig. 10)を用いてフィードバック制御による位置決めの実験を行った。リンク長はすべて0.3[m]である。第1, 第2関節はそれぞれ35[W], 20[W]の減速機付DCサーボモータで駆動される。第3関節は非駆動関節であり、アクチュエータもブレーキも持たない。各関節の角度はロータリーエンコーダで検出される。制御にはパーソナルコンピュータ(80486CPU, 50[MHz])を用いた。

自由リンクの撃心と非駆動関節との間の距離  $\lambda$  は提案した軌道計画および制御手法において最も重要なパラメータである。 $\lambda$  は関節を支点としてリンクを剛体振り子としたときの実効振り子長と等しい。 $\lambda$  と振り周期  $T$  との間には次の関係が成り立つ。

$$\lambda = g \left( \frac{T}{2\pi} \right)^2 \quad (g \text{ は重力加速度})$$

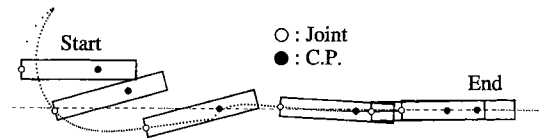


Fig. 6 Simulation result (Translation)

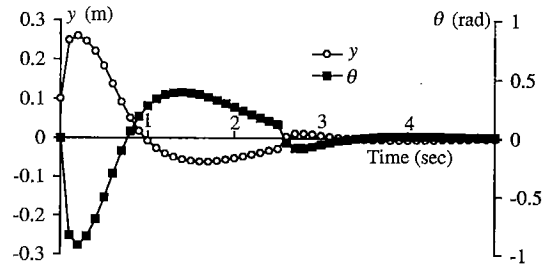


Fig. 7 Tracking error (Translation)

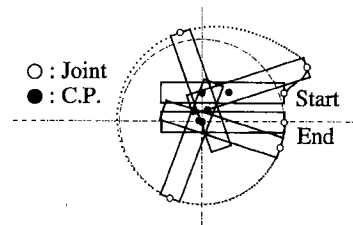


Fig. 8 Simulation result (Rotation)

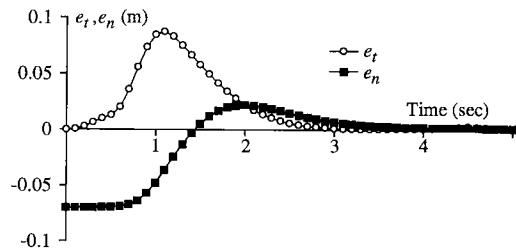


Fig. 9 Tracking error (Rotation)

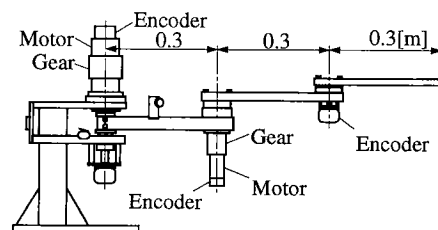


Fig. 10 Experimental manipulator

実験用マニピュレータにおいて  $T$  を実測し、 $\lambda$  を求めた。 $T = 0.910$ [sec],  $\lambda = 0.205$ [m] である。

制御則の実装においては仮想内部モデル追従制御[24]を参考にした制御系を用いた。まず、非駆動関節の並進位置に関して能動関節による作業座標サーボを構成する。第5章のフィード

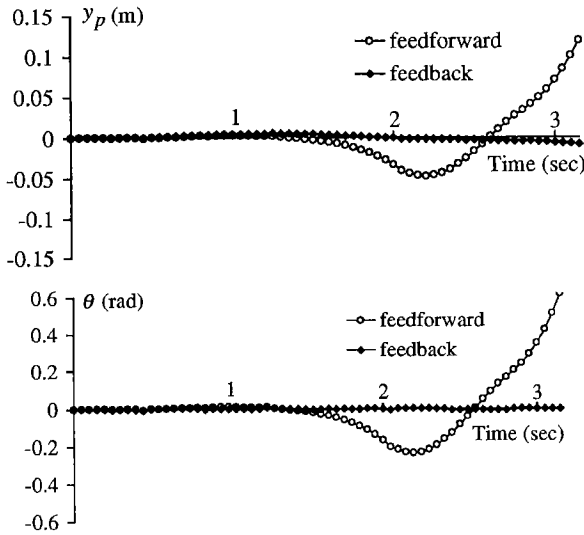


Fig. 11 Tracking error (Translation)

バック制御則から得られた非駆動関節の加速度  $(\ddot{x}, \ddot{y})$  を積分して非駆動関節の速度・位置の仮想目標値を求め、それらを作業座標サーボへの指令値とする。加速度  $(\ddot{x}, \ddot{y})$  はフィードフォワード項としても用いる。非駆動関節の加速度から計算トルク法により能動関節トルクを直接求めるだけの方法と比較すると、この手法では能動関節側における摩擦等の未知外乱の影響を作業座標サーボにより抑制することができる。また、各線形コントローラはシミュレーションと同じく LQ 最適制御則に基づいて設計した。

はじめに並進および回転軌道要素において、フィードフォワード制御とフィードバック制御を比較した。ここでフィードフォワード制御とは非駆動関節の並進位置をリンク姿勢に関係なく目標軌道に従って制御することを意味する。長さ 0.5[m] の並進軌道を 2 回往復させた際の撃心の目標軌道からの位置偏差  $y_p$  および自由リンクの角度偏差  $\theta$  を Fig. 11 に示す。フィードフォワード制御では、初期誤差がゼロとなるように軌道の位置・方向を選び、目標通りの加速度入力を与えているにもかかわらず、軌道からの偏差が増大していく。一方、フィードバック制御では偏差はほぼゼロに抑えられている。Fig. 12 は、回転軌道によって  $\theta = 0$  と  $\theta = \pi/2$  の間を 2 往復させた場合の関節および撃心の軌跡を表す。フィードバック制御では撃心は軌道中心付近にとどまっているが、フィードフォワード制御では撃心は軌道中心から大きく外れてしまう。

次に、組み合わせ軌道とフィードバック制御による位置決めの実験を行った。Fig. 13 は  $(0, 0.26, 1.571)$  から  $(-0.35, 0.26, 1.571)$  への自由リンクの位置決めの結果を示す。位置決め開始から終了までの時間は 2.2 [sec] である。リンクは目標位置・姿勢の近くで停止する。最終姿勢は  $(-0.358, 0.255, 1.583)$  である。Fig. 14 は、別の組み合わせ軌道によって  $(0, 0.5, 1.571)$  から  $(-0.1, 0.48, 3.142)$  へ 2.1 [sec] で位置決めを行った結果である。最終位置は  $(-0.099, 0.485, 3.138)$  である。リンクは目標位置の近傍に到

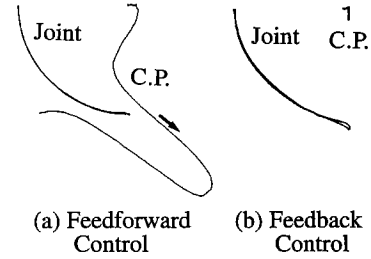


Fig. 12 Motion of C.P. (Rotation)

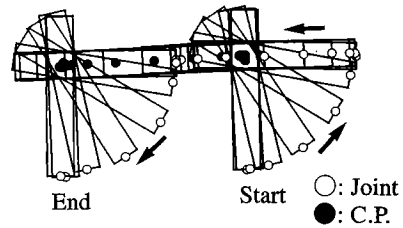


Fig. 13 Experimental result: Position control (I)

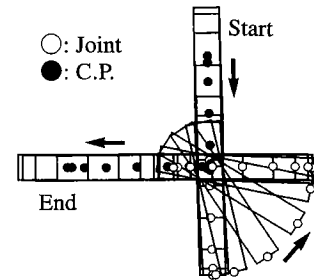


Fig. 14 Experimental result: Position control (II)

達している。

### 8. ま と め

本論文では、2 階の非ホロノミック拘束下にある、非駆動関節を有する水平 3 軸マニピュレータのフィードバック制御について報告した。自由リンクに対する動学的拘束を示し、任意の 2 点間の位置決めのための軌道計画について述べた。自由リンクの撃心の挙動に着目し、単純な並進および回転軌道要素から位置決め軌道を構成する。各軌道要素自体は不安定なため、軌道実行の際には誤差を抑制するためのフィードバック制御が必要である。並進/回転軌道のそれぞれについて、自由リンクを目標軌道に漸近安定化する非線形フィードバック制御則を提案した。最後に、シミュレーションおよび実験により、フィードバック制御則の有効性を確認した<sup>†</sup>。

<sup>†</sup>最近、井村ら [25] は本研究と独立に、同じ構造のマニピュレータにおいて、座標変換および入力変換により  $\xi_1 = u_1, \xi_2 = u_2, \xi_3 = \xi_2 u_1$  という 2 階の chained form が導出できることを示した。この変換と式 (27)(28) の変換とはほぼ等価である。また [25] では任意の初期状態から目標点への安定化を行う区分解的な時変フィードバック則を提案している。



## 参 考 文 献

- [1] "Minimalism in Robot Manipulation," Lecture Notes, Workshop in 1996 IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, (A. Bicchi and K. Goldberg, eds.), 1996.
- [2] 荒井, 館: "非駆動関節を有するマニピュレータの動力学的干渉による位置制御", 計測自動制御学会論文集, vol.25, no.9, pp.1012-1017, 1989.
- [3] 荒井, 館: "非駆動関節を有するマニピュレータの動的制御 (2 自由度マニピュレータの位置制御系)", 日本機械学会論文集 C 編, vol.57, no.534, pp.619-624, 1991.
- [4] 荒井, 館: "非駆動関節を有するマニピュレータの作業座標系における動的制御, 日本機械学会論文集 C 編, vol.57, no.537, pp.1621-1624, 1991.
- [5] 荒井, 館: "非駆動関節を有するマニピュレータの経路追従制御", 計測自動制御学会論文集, vol.27, no.7, pp.800-805, 1991.
- [6] 荒井: "非駆動関節を有する3自由度マニピュレータの非ホロミック拘束下における可制御性", 日本ロボット学会誌, vol.14, no.5, pp.751-758, 1996.
- [7] G. Oriolo and Y. Nakamura: "Free-Joint Manipulators: Motion Control under Second-Order Nonholonomic Constraints," Proc. IEEE/RSJ Int. Workshop on Intelligent Robots and Systems (IROS'91), pp.1248-1253, 1991.
- [8] G. Oriolo and Y. Nakamura: "Control of Mechanical Systems with Second-order Nonholonomic Constraints: Underactuated Manipulators," Proc. 30th IEEE Int. Conf. on Decision and Control, pp.2398-2403, 1991.
- [9] 中村, 岩本: "ドリフト項をもつ非ホロミック機械の制御", 日本ロボット学会誌, vol.13, no.6, pp.830-837, 1995.
- [10] 中村, 濃沼, 鈴木: "自由関節を持つ平面アームのカオスの挙動と非線形制御", 日本ロボット学会誌, vol.14, no.4, pp.602-611, 1996.
- [11] J.P. Laumond: "Feasible Trajectories for Mobile Robots with Kinematic and Environment Constraints," in Intelligent Autonomous Systems (O.L. Hertzberger and F.C.A. Greon, eds.), North Holland, 1987.
- [12] O.J. Sjørdalen: "Conversion of the kinematics of a car with n trailers into a chained form," Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, pp.382-387, 1993.
- [13] 三平: "厳密な線形化とそのけん引車両の軌道制御への応用", 計測と制御, vol.31, no.8, pp.851-858, 1992.
- [14] Y. Nakamura and R. Mukherjee: "Nonholonomic Path Planning of Space Robots via a Bidirectional Approach," IEEE Trans. Robotics and Automation, vol.7, no.4, pp.500-514, 1991.
- [15] C. Fernandes, L. Gurvits and X.Z. Li: "Optimal Nonholonomic Motion Planning for a Falling Cat," in Nonholonomic Motion Planning (Z.X. Li and J.F. Canny, eds.), pp. 379-421, 1993.
- [16] K. Furuta, M. Yamakita and S. Kobayashi: "Swing Up Control of Inverted Pendulum", Proc. IECON'91, pp.2193-2198, 1991.
- [17] M.W. Spong: "The Swing Up Control Problem for the Acrobot," IEEE Control Systems, vol.15, no.1, pp.49-55, 1995.
- [18] F. Saito, T. Fukuda and F. Arai: "Swing and Locomotion Control for a Two-Link Brachiation Robot," IEEE Control Systems, vol.14, no.1, pp.5-12, 1994.
- [19] 吉川, 細田: "仮想的な剛体リンクと受動関節を用いたフレキシブルアームのモデリング", 計測自動制御学会論文集, vol.27, no.12, pp.1389-1395, 1991.
- [20] K.M. Lynch: "Nonprehensile Robotic Manipulation: Controllability and Planning," Tech. Rep. CMU-RI-TR-96-05, Carnegie Mellon University, 1996.
- [21] V. Manikonda and P.S. Krishnaprasad: "Dynamics and Controllability of a Planar Rigid Body with a Thruster," Proc. 30th Annual Conference on Information Sciences and Systems, 1996.
- [22] R. W. Brockett: "Asymptotic Stability and Feedback Stabilization," in Differential Geometric Control Theory (R.W. Brockett, R.S. Millman, and S.J. Sussmann, eds.), pp.181-191, Birkhäuser, Boston, 1983.
- [23] R. Su: "On the Linear Equivalents of Nonlinear Systems," Systems and Control Letters, vol.2, no.1, pp.48-52, 1982.
- [24] 小菅, 古田, 横山: "ロボットの仮想内部モデル追従制御系—メカニカル・インビダンス制御への応用—", 計測自動制御学会論文集, vol.24, no.1, pp.55-62, 1988.
- [25] J. Imurà, K. Kobayashi and T. Yoshikawa: "Nonholonomic Control of 3 Link Planar Manipulator with a Free Joint," Proc. 35th IEEE Int. Conf. on Decision and Control, pp.1435-1436, 1996.

## 付録: 部分系 (26) の厳密線形化

ここでは文献[13]の手順に従い, 撃心の並進軌道からの距離  $y_P$  と自由リンク姿勢  $\theta$  の挙動を表す部分系 (26),

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_P \\ \dot{y}_P \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}_P \\ a_{xB} \tan \theta \\ \dot{\theta} \\ u_n / \lambda \end{pmatrix}$$

が入力  $u_n$  を用いて厳密線形化可能であることを示し, そのための非線形状態フィードバックと座標変換を求める.  $x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T = (y_P \ \dot{y}_P \ \theta \ \dot{\theta})^T$  とおき, 部分系の式 (26) を,

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + gu \quad (44)$$

$$f(x) = (x_2 \ a_{xB} \tan x_3 \ x_4 \ 0)^T, \\ g = (0 \ 0 \ 0 \ 1)^T, \quad u = u_n / \lambda$$

と表す.

非線形状態方程式 (44) が座標変換と状態フィードバックにより厳密に線形化できるための必要十分条件は,

$$\{ad_f^0 g(0), ad_f^1 g(0), ad_f^2 g(0), ad_f^3 g(0)\} \text{ が線形独立} \quad (45)$$

$$\{ad_f^0 g(x), ad_f^1 g(x), ad_f^2 g(x)\} \text{ が involutive} \quad (46)$$

が成り立つことである. ただし  $ad_f^i g(x)$  は,

$$ad_f^0 g(x) = g(x), \quad ad_f^1 g(x) = [f, ad_f^{i-1} g(x)]$$

と定義される.  $[f, g]$  はベクトル場  $f(x)$  と  $g(x)$  との Lie 括弧積  $\frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g$  を表す.

$$ad_f^0 g(x) = (0 \ 0 \ 0 \ 1)^T, \quad ad_f^1 g(x) = (0 \ 0 \ -1 \ 0)^T,$$

$$ad_f^2 g(x) = \left( 0 \ \frac{a_{xB}}{\cos^2 x_3} \ 0 \ 0 \right)^T,$$

$$ad_f^3 g(x) = \left( -\frac{a_{xB}}{\cos^2 x_3} \ \frac{2a_{xB}x_4 \sin x_3}{\cos^3 x_3} \ 0 \ 0 \right)^T$$

より,  $\{ad_f^0 g(0), ad_f^1 g(0), ad_f^2 g(0), ad_f^3 g(0)\}$  は線形独立である. また,

$$[ad_f^0 g, ad_f^1 g] = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T, \quad [ad_f^0 g, ad_f^2 g] = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T,$$

$$[ad_f^1 g, ad_f^2 g] = \left( 0 \ -\frac{2a_{xB} \sin x_3}{\cos^3 x_3} \ 0 \ 0 \right)^T$$

より,  $\{ad_f^0 g(x), ad_f^1 g(x), ad_f^2 g(x)\}$  は involutive である. 従って式 (44) は厳密に線形化できる.

条件 (46) が成り立つとき, Frobenius の定理によれば,

$$L_{ad_f^i g} \phi(x) = 0, \quad (i = 0, 1, 2) \quad (47)$$

を満たす定数ではないスカラー関数  $\phi(x)$  が必ず存在する. ここで,  $L_f \phi(x)$  はスカラー関数  $\phi(x)$  のベクトル場  $f(x)$  による Lie 微分,

$$L_f \phi(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x)$$

を表す. また, 微分操作の繰り返しは,

$$L_f^i \phi(x) = L_f \{L_f^{i-1} \phi(x)\} \quad (L_f^1 \phi(x) = L_f \phi(x))$$

と表さる.

$$L_{ad_f^0 g} \phi(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x} ad_f^0 g = \frac{\partial \phi}{\partial x_4} = 0$$

$$L_{ad_f^1 g} \phi(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x} ad_f^1 g = -\frac{\partial \phi}{\partial x_3} = 0$$

$$L_{ad_f^2 g} \phi(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x} ad_f^2 g = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \left( \frac{a_{xB}}{\cos^2 x_3} \right) = 0$$

より,  $\phi(x) = x_1$  とおけば条件を満たす. この  $\phi(x)$  を用いて,

$$\xi = (\phi(x) \quad L_f \phi(x) \quad L_f^2 \phi(x) \quad L_f^3 \phi(x))^T \quad (48)$$

という座標変換を行い, 状態フィードバックを,

$$u = -\frac{L_f^4 \phi(x)}{L_g L_f^3 \phi(x)} + \frac{1}{L_g L_f^3 \phi(x)} v \quad (49)$$

とすれば, 状態方程式 (44) は  $\xi$  を状態変数とし  $v$  を入力とする線形状態方程式に変換される. 上式を適用すると座標変換は,

$$\xi = \left( x_1 \quad x_2 \quad a_{xB} \tan x_3 \quad \frac{a_{xB} x_4}{\cos^2 x_3} \right)^T \quad (50)$$

状態フィードバックは,

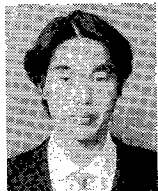
$$u = -2x_4^2 \tan x_3 + \frac{\cos^2 x_3}{a_{xB}} v \quad (51)$$

となる.



荒井裕彦 (Hirohiko Arai)

1959年7月9日生. 1982年東京大学工学部計数工学科卒業. 同年本田技研工業(株)勤務. 1984年通商産業省工業技術院機械技術研究所入所. 現在ロボット工学部バイオロボティクス研究室主任研究官. マニピュレータの動的制御, パワーアシストなどの研究に従事. 工学博士. 日本機械学会, 計測自動制御学会, IEEEの会員. (日本ロボット学会正会員)



城間直司 (Naoji Shiroma)

1971年5月21日生. 1994年琉球大学工学部電子・情報工学科卒業. 同年筑波大学大学院工学研究科博士課程入学, 現在に至る. 倒立振り子, 非ホロノミック系制御の研究に従事. (日本ロボット学会学生会員)



谷江和雄 (Kazuo Tanie)

1946年11月6日生. 1971年早稲田大学大学院理工学研究科修士課程修了. 同年通商産業省工業技術院機械技術研究所入所. 現在ロボット工学部バイオロボティクス研究室長, 筑波大学大学院工学研究科教授, 早稲田大学理工学総合研究センター特別研究員. ロボットの機構と制御, センサなどの研究に従事. 工学博士. 日本機械学会, 計測自動制御学会, IEEEなどの会員. (日本ロボット学会正会員)