

非駆動関節を有する 3 自由度マニピュレータの 非ホロノミック拘束下における可制御性

荒井 裕彦*

Controllability of a 3-DOF Manipulator with a Passive Joint under a Nonholonomic Constraint

Hirohiko Arai*

Controllability of a manipulator with a passive joint which has neither an actuator nor a holding brake is investigated. The manipulator has 3 degrees of freedom in a horizontal plane and the third joint is passive. It is shown that the dynamic constraint on the third link is 2nd-order nonholonomic. The controllability is proved by constructing examples of the input trajectories from arbitrary initial states to arbitrary desired states. The proof is intuitively understandable, and the construction of the input directly leads to the trajectory planning. Simulations show that the manipulator can reach the desired position and velocity by the constructed input.

Key Words: Manipulator, Passive Joint, Dynamics, Nonholonomic Constraint, Controllability

1. はじめに

1.1 非駆動関節を有するマニピュレータ

従来のマニピュレータは各関節にアクチュエータを 1 個ずつもち、自由度とアクチュエータ数とは等しい。それに対して筆者らは、アクチュエータの代わりに保持ブレーキを備えた非駆動関節を有するマニピュレータを、関節間の動力学的干渉を利用して制御する手法を提案した。非駆動関節をブレーキで固定した状態では、非駆動関節の角度を変えずに能動関節が制御できる。またブレーキを解放し非駆動関節が自由に回転できる状態では、能動関節の運動に対する干渉性を用いて間接的に非駆動関節が制御できる。これらの制御モードの組み合わせによりマニピュレータの位置・姿勢を制御する。これまでに位置決め制御 [1][2] を実現し、またブレーキを解放した状態における作業座標系内の制御 [3] や、経路追従制御 [4] にも成功した。この手法によれば、アクチュエータ数よりも多くの関節をもつマニピュレータが制御でき、軽量化、省エネルギー化、コストダウンの有効な手段と考えられる。Papadopoulos ら [5] や Mukherjee ら [6] は宇宙ロボットの制御に本手法を応用することを提案している。また Jain ら [7] は非駆動関節を含むマニピュレータの動力学的効率的な計算法を提案し、Lee ら [8] は非駆動関節を有するマニピュレータの可操作度に相当する概念として *actuability index* を定義している。

上記の手法では位置決め制御において非駆動関節のブレーキを必要とした。これはマニピュレータの動力学的のうち、慣性の

線形的な干渉を主に用いていたためである。ところが動力学的非線形性に着目し、非駆動関節によって生ずる非ホロノミック拘束を利用すれば、ブレーキを用いなくとも位置決めが可能であることが中村ら [9][10] によって指摘されている。

1.2 非ホロノミック拘束

近年、非ホロノミック拘束を受ける力学系の制御に対する関心が高まりつつある [11]。力学系の拘束条件のうち、時間 t と一般化座標 q のみを含む代数方程式 $g(q, t) = 0$ として表されるものをホロノミックと呼び、そうでない拘束を非ホロノミックと称する。非ホロノミック拘束のうち、ロボット工学において主に扱われるのは、拘束条件が一般化座標の時間微分すなわち速度や加速度を含む微分方程式で表され、それが積分不可能な場合である。こうした力学系としては、

- 運動の方向が幾何学的に限定されるような運動学的拘束を受けるもの。
- 力やトルクが加わらない自由度における動的つりあいの条件や角運動量の保存による動力学的拘束を受けるもの。

の 2 種類がある。前者には車輪型移動体 [12][13]、牽引車両 [14]、物体間の転がり接触 [15] などが含まれ、こうした拘束を意図的に作り出す機構を用いたマニピュレータ [16] も開発されている。また後者には宇宙ロボット [17][18] や宇宙構造物 [19]、自由落下中の姿勢変更 [20]、非駆動関節を有するマニピュレータなどが属する。こうした力学系に共通する点は制御入力の数一般化座標の成分の数よりも少ないことである。したがって制御の目標は限られた制御入力を巧妙に組み合わせ、すべての一般化座標を制御することになる。

上の例のうち、非駆動関節を有するマニピュレータにおける拘束条件は、他の例とは異なる特徴をもつ。運動学的拘束およ

原稿受付 1995 年 8 月 31 日

*機械技術研究所

*Mechanical Engineering Laboratory, AIST, MITI

び角運動量の保存に基づく動学的拘束は、一般化座標およびその1階微分すなわち速度を含む微分方程式として表される。一方、非駆動関節を有するマニピュレータにおける動学的拘束は、一般化座標の2階微分すなわち加速度までを含む形の拘束となる。このことが、これまでに非ホロミック系を扱うために考案された数学的手法をそのまま適用することを困難にしている。Oriolo と中村 [9] はこうしたマニピュレータに関して拘束条件が可積分でホロミックとなるための条件を導いた。また中村ら [10] は、第1関節が能動関節、第2関節が非駆動関節である平面マニピュレータにおいて、第1関節に正弦波入力を与えて第2関節の位置決めを行う手法を提案した。本論文では、非駆動関節を有する3自由度マニピュレータのブレーキを用いない位置決め制御を目指し、その可制御性を証明する。

1.3 本論文の構成

本論文では、第3関節がブレーキをもたない非駆動関節である3自由度の平面マニピュレータを扱う。第2章ではマニピュレータのモデリングを行い、非駆動関節によって生ずる動学的拘束の非ホロミック性を示す。第3章では系の大域的な可制御性について論ずる。任意の初期状態から出発して有限時間内に任意の目標状態に到達可能な入力および軌道を実際に作るという構成的方法によって、可制御性を証明する。第4章では構成された軌道によって目標状態に到達できることをシミュレーションによって示す。本論文における可制御性の証明は直観的な理解が容易であり、また同時にその結果がマニピュレータの軌道計画に直結しているという特長をもつ。

2. マニピュレータのモデリング

2.1 モデリング

本論文で扱うマニピュレータは、Fig. 1 に示すような、重力が作用しない3自由度の平面マニピュレータである[†]。そのうち第3関節をアクチュエータも保持ブレーキももたない非駆動関節とする。第3関節は鉛直軸まわりの回転関節である。能動関節である第1、第2関節は第3関節の水平面内における位置を制御できればよいので、関節の構成は SCARA 型でも、直交座標型でも、また極座標型でもよい。モデルを簡単にするために第1、第2リンクの動力学は考慮せず、単に第3関節の並進加速度が有限であるという制限のみを設ける。また第1、第2関節の構成する可動領域の制限や逆運動学解の多値性、特異点も考慮せず、第3関節の水平面内における任意の位置に対して第1、第2関節の変位が一意に決定されるとする。Fig. 2 のような第3リンクのモデルを考える。

Σ_B : 水平面内に固定された基準座標系。

Σ_L : 関節 O を原点とし、リンクに固定された座標系 (x 軸は関節 O とリンクの重心 G を結ぶ直線と一致する)。

$[x, y]$: 基準座標系 Σ_B における関節 O の位置。

θ : 基準座標系 Σ_B とリンク座標系 Σ_L がなす角度。

[†]厳密には動学的拘束条件の数も考慮して、このようなマニピュレータを2自由度とする考え方もあるが [11]、本論文では通常のマニピュレータにおける慣用にしたがって、(自由度) = (全関節数) とした。

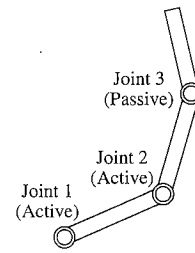


Fig. 1 3-DOF manipulator with a passive joint

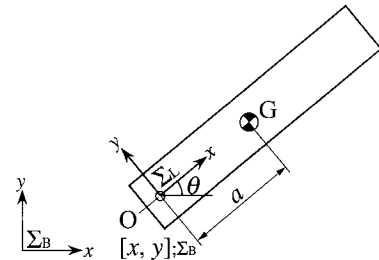


Fig. 2 Model of the third link

$[x, y, \theta]$ と関節変位 $[q_1, q_2, q_3]$ とは1対1に対応するため、系の一般化座標は $[x, y, \theta]$ で表され、第3リンクのみに関して動力学モデルをたてればよい。リンクに関する運動方程式は、

$$\begin{cases} f_x = m\ddot{x} - ma\ddot{\theta} \sin \theta - ma\dot{\theta}^2 \cos \theta \\ f_y = m\ddot{y} + ma\ddot{\theta} \cos \theta - ma\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ \tau = -ma\ddot{x} \sin \theta + ma\dot{y} \cos \theta + (I + ma^2)\ddot{\theta} \end{cases} \quad (1)$$

ただし、

m : リンクの質量。

I : リンクの重心 G まわりの慣性モーメント。

a : 関節 O とリンクの重心 G との距離 $|OG|$ 。

$[f_x, f_y]$: 関節 O における並進力。

τ : 関節 O まわりのトルク。

ここで関節 O は非駆動関節であるから $\tau = 0$ とおくことができる。 $a \neq 0$ と仮定し、

$$\lambda \equiv a + \frac{I}{ma} \quad (2)$$

とおけば、式 (1) より系に対する拘束条件は、

$$-\ddot{x} \sin \theta + \ddot{y} \cos \theta + \lambda \ddot{\theta} = 0 \quad (3)$$

という形に表すことができる。ここで関節 O の並進加速度 $[\ddot{x}, \ddot{y}]$ を入力と考えると、系の状態方程式は、

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\sin \theta}{\lambda} & -\frac{\cos \theta}{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} \quad (4)$$

と表される。

2.2 不可積分性

Oriolo と中村は、非駆動関節を有するマニピュレータにおいて、動力学的拘束条件が可積分で系がホロノミックとなるための条件を導いた [9]。ここではそれに従って前節で導いた3自由度マニピュレータの拘束が非ホロノミックであることを示す。マニピュレータの運動方程式が、

$$M_a(q)\ddot{q} + b_a(q, \dot{q}) = \tau \quad (5)$$

$$M_p(q)\dot{q} + b_p(q, \dot{q}) = 0 \quad (6)$$

$$q = \begin{bmatrix} q_a \\ q_p \end{bmatrix}, \quad M(q) = \begin{bmatrix} M_a(q) \\ M_p(q) \end{bmatrix}, \quad b(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} b_a(q, \dot{q}) \\ b_p(q, \dot{q}) \end{bmatrix}$$

と表されるとする。ただし、 $q_a \in \mathbb{R}^m$ は能動関節の角度、 $q_p \in \mathbb{R}^{n-m}$ は非駆動関節の角度、 $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は慣性行列、 $b(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^n$ はコリオリ・遠心力を表し、重力は作用しないとする。ここで (5) は能動関節のトルク $\tau \in \mathbb{R}^m$ に関する式、(6) は非駆動関節のトルクがゼロとなることを表す式である。式 (6) が系に対する拘束条件となる。

式 (6) は一般化座標 q のみでなく速度 \dot{q} ・加速度 \ddot{q} を含んでいる。これがまず一般化座標、速度、時間の関数である第一積分をもつ、すなわち拘束条件が $g_1(q, \dot{q}, t) = 0$ という形に帰着するための必要十分条件は、

条件 1: 慣性行列 $M(q)$ が非駆動関節の角度 q_p を陽に含まない。

次に、式 (6) が一般化座標と時間のみ関数である第二積分をもち、 $g_2(q, t) = 0$ と表される (すなわちホロノミック拘束となる) ための必要十分条件は、

条件 2: 式 (6) が第一積分をもち、かつ $M_p(q_a)$ の零空間 $\Delta(q_a)$ が involutive である。

さて、ここで本論文におけるマニピュレータの運動方程式 (1) を考えると、慣性行列 $M(q)$ は、

$$M(q) = \begin{bmatrix} m & 0 & -m \sin \theta \\ 0 & m & m \cos \theta \\ -m \sin \theta & m \cos \theta & I + m a^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$a \neq 0$ より、 $M(q)$ は非駆動関節の角度 θ を含んでいるから、明らかに条件 1 を満たさない。したがって式 (3) の条件は第一積分をもたない 2 次の非ホロノミック拘束といえる。

3. 可制御性

非ホロノミック系の可制御性や可到達性に関する解析においては、一般に微分幾何学に基づく手法が用いられる[†]。運動学的拘束または角運動量の保存による動力学的拘束を受ける非ホ

ロノミック系については、すでに Lie 括弧積などを用いた可制御性の判別法が提案されている。しかしこれらは拘束条件が、 $G(q)\dot{q} = 0$ (q : 一般化座標) の形で表され、また系の状態方程式が、 $\dot{q} = P(q)u$ (u : 入力) という対称アフィン系となる場合にのみ適用可能である。非駆動関節を有するマニピュレータにおいては、拘束条件が加速度を含む $M_p(q)\ddot{q} + b_p(q, \dot{q}) = 0$ という形で表され、また状態方程式も、 $\dot{q} = f(q) + P(q)u$ という、ドリフト項 $f(q)$ を含むアフィン系となる。式 (4) のように、本論文で扱うマニピュレータの状態方程式もこの形式で表される。このような系についての可制御性の一般的な判別法は未だ確立していない^{††}。

そこで本論文では第 2 章のマニピュレータについて、構成的方法による可制御性の証明 [13] を試みる。これは任意の初期状態から出発して有限時間内に任意の目標状態に到達可能な入力および軌道の例を実際に見いだす、という方法である。こうした軌道が少なくとも一つ存在するということは可制御性の定義そのものにほかならない。したがって、ここで証明されるのは局所的到達性ではなく、大域的な可制御性になる。この方法は直観的にも理解しやすく、また構成された軌道はそのまま制御における目標軌道として使えるという特長をもつ。

3.1 軌道要素

軌道の構成法の基本的な手順は次のようなものである。まず、座標成分間の分離が可能な軌道要素を作る。次にこうした単純な軌道要素をある手順に従って組み合わせ、初期状態と目標状態を結ぶ軌道を構成する。非駆動関節を有するマニピュレータでは、運動している状態から能動関節を停止させても、非駆動関節は一般には運動し続ける。これが状態方程式に含まれるドリフト項の物理的意味である。したがって軌道要素としては、能動関節と非駆動関節の停止が同期する特殊な軌道を選ぶ必要がある。そのために、ある座標成分の変化が他の座標成分に影響を及ぼさない、動力学的な特異性をもつ運動を利用する。

Fig. 2 のモデルにおいて、リンクが静止した状態から関節 O をリンク座標系 Σ_L の x 軸方向に加速しても、リンクにまったく角加速度が発生しないことは明らかである。またリンクが Σ_L の x 軸方向に並進している状態から関節 O を減速停止させても同様である。これはこの方向の並進加速度とリンクの角加速度との間の干渉が失われる動力学的特異性に起因する。このことを利用すればリンクの回転を伴わない並進運動が可能である。

次に、リンクの回転運動を考える。リンクが静止した状態から関節 O にリンク座標系 Σ_L の y 軸方向の並進加速度を与え

[†]任意の初期状態 $x(t_1)$ から別の任意の状態 $x(t_2)$ へ有限時間で状態を移せる入力 u が存在することを、大域的に可制御という。一方、任意の状態 $x(t_1)$ に対して、そこから到達できる状態 x の集合 (可到達集合という) が、 x の定義域内で零でない容積をもつ開集合となることを、局所的に可到達という (詳細は文献 [11][21][22] を参照のこと)。

^{††}アフィン系の局所的到達性は Lie 括弧積を用いて判定できる。局所的に可到達である系が、常に可到達集合の内部にその初期状態 $x(t_1)$ をもつ場合には、可到達集合を連続的にたどって任意の状態 $x(t_2)$ へ到達でき、大域的にも可制御となる。対称アフィン系の局所的到達性は大域的に可制御性と一致する。ドリフト項を含むアフィン系において、 x の存在領域が限定され $x(t_1)$ が可到達集合の境界上に存在することがある場合には、大域的に可制御性の判定にはさらに別の評価が必要となる。

る。ここで Σ_L の x 軸上の点における y 軸方向の並進加速度を考える。リンク重心 G は関節よりも x 軸上の正の側にあるため、リンクの先端に近づくにしたがって加速度の絶対値は次第に小さくなり、ついにはゼロとなってそれより先では加速度の向きが逆転する。ここから、関節 O に y 軸方向加速度がゼロとなる点を中心にした円運動を行わせれば、円周上での加減速にかかわらずリンクは円運動に追従し、その中心は基準座標系で静止したままとなることが推測される。これを用いれば、実質上リンクの並進を伴わない回転運動が可能である。

上記のような観察をより明確に定式化する。リンクに対する動力学的な拘束条件は式 (3)、

$$-\ddot{x} \sin \theta + \ddot{y} \cos \theta + \lambda \ddot{\theta} = 0$$

で表される。まず関節 O に、リンク座標系 Σ_L の x 軸方向の加速度 $[\alpha, 0]$ を与える。このとき基準座標系 Σ_B における加速度 $[\ddot{x}, \ddot{y}]$ は、

$$\begin{cases} \ddot{x} = \alpha \cos \theta \\ \ddot{y} = \alpha \sin \theta \end{cases} \quad (8)$$

これを式 (3) に代入すると、 $\lambda \ddot{\theta} = 0$ より $\ddot{\theta} = 0$ となる。すなわち関節 O とリンク重心 G を結ぶ方向に関節 O を加減速してもリンクの角加速度は発生しない。

次に関節 O に、基準座標系 Σ_B のある 1 点 $[x_0, y_0]$ を中心とした半径 r の円運動を行わせる (Fig. 3)。このとき Σ_B における関節 O の位置 $[x, y]$ は、

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos \phi(t) \\ y = y_0 + r \sin \phi(t) \end{cases} \quad (9)$$

ただし $\phi(t)$ は円周上での関節 O の位置を表す角度である。関節 O の並進加速度 $[\ddot{x}, \ddot{y}]$ は、

$$\begin{cases} \ddot{x} = -r\ddot{\phi} \sin \phi - r\dot{\phi}^2 \cos \phi \\ \ddot{y} = r\ddot{\phi} \cos \phi - r\dot{\phi}^2 \sin \phi \end{cases} \quad (10)$$

これを式 (3) に代入すると、

$$r \cos(\theta - \phi) \ddot{\phi} + r \sin(\theta - \phi) \dot{\phi}^2 + \lambda \ddot{\theta} = 0 \quad (11)$$

ここで $\phi = \theta + \pi$, $r = \lambda$ とおくと、上式は恒等的に成立する。すなわち式 (3) の拘束条件は、 ϕ の速度、加速度と無関係に満たされる。この場合 Σ_B における回転中心 $[x_0, y_0]$ は、リンク

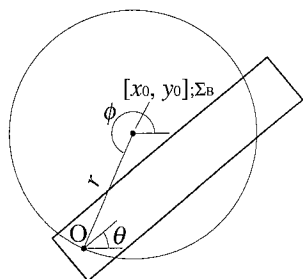


Fig. 3 Circular motion of joint

上の Σ_L における点 $P[\lambda, 0]$ と一致する。実はこの点 P は関節 O に対するリンクの撃心と一致する。

ここで撃心 P が運動する場合も考え、その絶対座標 $[x_P, y_P]$ を用いて式 (3) の拘束条件を表す。

$$\begin{cases} x_P = x + \lambda \cos \theta \\ y_P = y + \lambda \sin \theta \end{cases} \quad (12)$$

より、

$$\begin{cases} \ddot{x} = \ddot{x}_P + \lambda \ddot{\theta} \sin \theta + \lambda \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ \ddot{y} = \ddot{y}_P - \lambda \ddot{\theta} \cos \theta + \lambda \dot{\theta}^2 \sin \theta \end{cases} \quad (13)$$

これを式 (3) に代入すると、拘束条件は、

$$\ddot{x}_P \sin \theta - \ddot{y}_P \cos \theta = 0 \quad (14)$$

という非常に簡単な形になる。リンクの角速度・角加速度に関する項が消去されていることに注意されたい。上式が満たされるのは、

$$\begin{cases} \ddot{x}_P = \alpha \cos \theta \\ \ddot{y}_P = \alpha \sin \theta \end{cases} \quad (\alpha \text{ は任意}) \quad (15)$$

の場合である。これは撃心 P の並進加速度が関節 O とリンク重心 G を結ぶ方向に限定されるということの意味する。さらに $\alpha = 0$ とおくと、

$$\begin{cases} \ddot{x}_P = 0 \\ \ddot{y}_P = 0 \end{cases} \quad (16)$$

となり、撃心 P が等速度で並進するような拘束を関節 O の位置に加えている限り、リンクに任意の角加速度を与えることができる。これは撃心 P が静止している場合を含み、撃心 P を中心とする円周上に関節の位置 O を拘束すれば、円周上でどのような加減速を行っても撃心 P は基準座標系の 1 点にとどまる。

以上の結果を軌道要素としてまとめる。

i. 並進軌道 リンクの初期位置を $[x_0, y_0, \theta_0]$, 初期速度を $[v_0 \cos \theta_0, v_0 \sin \theta_0, 0]$ とする。入力軌道は、

$$\begin{cases} x = x_0 + s(t) \cos \theta_0 \\ y = y_0 + s(t) \sin \theta_0 \end{cases} \quad (17)$$

このときリンクの角度は、

$$\theta = \theta_0 \quad (\text{const.})$$

ただし、 $s(t)$ の境界条件として、

$$s(0) = 0, \quad s(T) = s_d, \quad \dot{s}(0) = v_0, \quad \dot{s}(T) = v_d$$

この軌道によってリンクは $[x_0 + s_d \cos \theta_0, y_0 + s_d \sin \theta_0, \theta_0]$ に到達し、そのときの速度は $[v_d \cos \theta_0, v_d \sin \theta_0, 0]$ となる。

ii. 回転軌道 リンクの初期位置を $[x_{P0} - \lambda \cos \theta_0, y_{P0} - \lambda \sin \theta_0, \theta_0]$, 初期速度を $[\lambda \omega_0 \sin \theta_0, \lambda \omega_0 \cos \theta_0, \omega_0]$ とする。

$$\begin{cases} x = x_{P0} + \lambda \cos \phi(t) \\ y = y_{P0} + \lambda \sin \phi(t) \end{cases} \quad (18)$$

このとき、

$$\theta = \phi(t) - \pi$$

ただし, $\phi(t)$ の境界条件として,

$$\begin{aligned}\phi(0) &= \theta_0 + \pi, & \phi(T) &= \theta_d + \pi, \\ \dot{\phi}(0) &= \omega_0, & \dot{\phi}(T) &= \omega_d\end{aligned}$$

リンクは $[x_{P0} - \lambda \cos \theta_d, y_{P0} - \lambda \sin \theta_d, \theta_d]$ に到達し, そのときの速度は $[\lambda \omega_d \sin \theta_d, \lambda \omega_d \cos \theta_d, \omega_d]$ となる.

iii. 並進 + 回転軌道 リンクの初期位置を $[x_{P0} - \lambda \cos \theta_0, y_{P0} - \lambda \sin \theta_0, \theta_0]$, 初期速度を $[v_{xP0} + \lambda \omega_0 \sin \theta_0, v_{yP0} + \lambda \omega_0 \cos \theta_0, \omega_0]$ とする.

$$\begin{cases} x = x_{P0} + v_{xP0}t + \lambda \cos \phi(t) \\ y = y_{P0} + v_{yP0}t + \lambda \sin \phi(t) \end{cases} \quad (19)$$

このとき,

$$\theta = \phi(t) - \pi$$

ただし, $\phi(t)$ の境界条件として,

$$\begin{aligned}\phi(0) &= \theta_0 + \pi, & \phi(T) &= \theta_d + \pi, \\ \dot{\phi}(0) &= \omega_0, & \dot{\phi}(T) &= \omega_d\end{aligned}$$

リンクは $[x_{P0} + v_{xP0}T - \lambda \cos \theta_d, y_{P0} + v_{yP0}T - \lambda \sin \theta_d, \theta_d]$ に到達し, 速度は $[v_{xP0} + \lambda \omega_d \sin \theta_d, v_{yP0} + \lambda \omega_d \cos \theta_d, \omega_d]$ となる.

i.~iii. の $s(t)$ または $\phi(t)$ は, 境界条件を満たし時間 t に関して2階微分可能なスカラー関数であればどんなものでもよい. **i.** においてはリンクの角度 θ は一定値をとる. また **ii.**, **iii.** においては θ は $\phi(t)$ と完全に連動しており, 例えば $\dot{\phi}(t) = 0$ となればリンクの回転は停止する.

3.2 組み合わせ軌道の構成

前節の軌道要素を組み合わせ, 任意の初期状態から出発し, 有限時間内に任意の目標状態に到達可能な軌道が構成できることを示す. はじめに初期位置 A: $[x_0, y_0, \theta_0]$ から目標位置 B: $[x_d, y_d, \theta_d]$ への位置決めを考える (Fig. 4). マニピュレータは時刻 $t = 0$ において速度ゼロの状態から出発し, $t = T$ において完全に停止する. まず初期位置 A において撃心 P_0 を中心に半径 $\lambda = a + I/ma$ の円 R_A を描く. また目標位置 B においても同様に撃心 P_d を中心に半径 λ の円 R_B を描く. 次にこの二つの円の中心間を直線で結ぶ. 直線と二つの円の交点のうち, 各円の中心に関して同じ側にある2点の組の一方をそれ

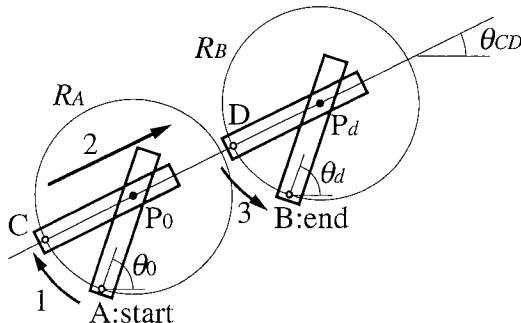


Fig. 4 Positioning of link

ぞれ C, D とする. これらの円周軌道上ではどのように関節 O の位置を加減速しても撃心 P の位置は変化しない. したがって前節 **ii.** の回転軌道によって初期位置 A から点 C まで関節 O の位置を回転させることができる. その結果関節 O と重心 G はともに直線 CD 上にあるから, **i.** の並進軌道によって, リンクを回転させることなく関節 O を点 D まで移動できる. 最後に **ii.** の回転軌道によって, 関節 O の位置を点 D から目標位置 B まで回転させる. 以上の操作によって初期位置 A から目標位置 B への位置決めが完了する.

以下に軌道を式の形にまとめる. まず初期位置 A, 目標位置 B における撃心の位置はそれぞれ,

$$\begin{cases} x_{P0} = x_0 + \lambda \cos \theta_0 \\ y_{P0} = y_0 + \lambda \sin \theta_0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{Pd} = x_d + \lambda \cos \theta_d \\ y_{Pd} = y_d + \lambda \sin \theta_d \end{cases}$$

軌道の並進部分 CD の傾き θ_{CD} は,

$$\theta_{CD} = \text{atan2}(y_{Pd} - y_{P0}, x_{Pd} - x_{P0})$$

ただし,

$$\text{atan2}(y, x) \equiv \begin{cases} \tan^{-1}(y/x) & (x > 0) \\ \pi + \tan^{-1}(y/x) & (x < 0, y \geq 0) \\ -\pi + \tan^{-1}(y/x) & (x < 0, y < 0) \\ \pi/2 & (x = 0, y > 0) \\ -\pi/2 & (x = 0, y < 0) \end{cases}$$

(θ_{CD} の値として, $\text{atan2}(\cdot) + \pi$ をとることもできるが, その場合も以後の手順は同じである.) 並進部分の両端 C, D の座標はそれぞれ,

$$\begin{cases} x_C = x_{P0} - \lambda \cos \theta_{CD} \\ y_C = y_{P0} - \lambda \sin \theta_{CD} \end{cases} \quad \begin{cases} x_D = x_{Pd} - \lambda \cos \theta_{CD} \\ y_D = y_{Pd} - \lambda \sin \theta_{CD} \end{cases}$$

$0 \leq t \leq T_1$ における軌道は,

$$\begin{cases} x = x_{P0} + \lambda \cos \phi_{AC}(t) \\ y = y_{P0} + \lambda \sin \phi_{AC}(t) \end{cases} \quad (20)$$

$\phi_{AC}(t)$ の境界条件は,

$$\begin{aligned}\phi_{AC}(0) &= \theta_0 + \pi, & \phi_{AC}(T_1) &= \theta_{CD} + \pi, \\ \dot{\phi}_{AC}(0) &= 0, & \dot{\phi}_{AC}(T_1) &= 0\end{aligned}$$

$T_1 \leq t \leq T_2$ における軌道は,

$$\begin{cases} x = x_C + (x_D - x_C)s(t) \\ y = y_C + (y_D - y_C)s(t) \end{cases} \quad (21)$$

$s(t)$ の境界条件は,

$$s(T_1) = 0, \quad s(T_2) = 1, \quad \dot{s}(T_1) = 0, \quad \dot{s}(T_2) = 0$$

$T_2 \leq t \leq T$ における軌道は,

$$\begin{cases} x = x_{Pd} + \lambda \cos \phi_{DB}(t) \\ y = y_{Pd} + \lambda \sin \phi_{DB}(t) \end{cases} \quad (22)$$

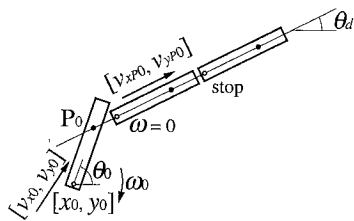


Fig. 5 Decelerating trajectory

$\phi_{DB}(t)$ の境界条件は,

$$\phi_{DB}(T_2) = \theta_{CD} + \pi, \quad \phi_{DB}(T) = \theta_d + \pi,$$

$$\dot{\phi}_{DB}(T_2) = 0, \quad \dot{\phi}_{DB}(T) = 0$$

さて、リンクの状態変数としては、一般化座標のみでなく一般化速度も含まれる。そこで次に、リンクの初期速度、目標速度がゼロでない場合を考える。この場合、静止した2点間の位置決めには前記の操作を適用することができるから、運動しているリンクを一旦停止し、またリンクが静止した状態から目標の速度を与えることができればよい。リンクを停止させる操作を考え (Fig. 5), リンクの初期位置を $[x_0, y_0, \theta_0]$, 初期速度を $[v_{x0}, v_{y0}, \omega_0]$ とする。また撃心 P の初期位置を $[x_{P0}, y_{P0}]$, 初期並進速度を $[v_{xP0}, v_{yP0}]$ とおく。ここで、撃心 P を通り $[v_{xP0}, v_{yP0}]$ の方向の直線を描く。撃心 P が一定速度でこの直線上を運動している限り、リンクの回転に任意の加減速を行うことができる。そこで関節 O の位置がこの直線上に来るまで回転したとき、ちょうど角速度がゼロとなるように iii. の並進 + 回転の軌道を計画する。回転が止まった後は i. の並進軌道を用いて直線上の適当な位置にリンクを停止させればよい。

軌道は以下ようになる。撃心の初期位置および速度は、

$$\begin{cases} x_{P0} = x_0 + \lambda \cos \theta_0 \\ y_{P0} = y_0 + \lambda \sin \theta_0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_{xP0} = v_{x0} - \lambda \omega_0 \sin \theta_0 \\ v_{yP0} = v_{y0} - \lambda \omega_0 \cos \theta_0 \end{cases}$$

撃心の初期並進速度の傾きおよび大きさは、

$$\theta_d = \text{atan2}(v_{yP0}, v_{xP0}) \quad v_{P0} = \sqrt{v_{xP0}^2 + v_{yP0}^2}$$

$0 \leq t \leq T_1$ における軌道は、

$$\begin{cases} x = x_{P0} + v_{xP0}t + \lambda \cos \phi(t) \\ y = y_{P0} + v_{yP0}t + \lambda \sin \phi(t) \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \phi(0) &= \theta_0 + \pi, & \phi(T_1) &= \theta_d + \pi, \\ \dot{\phi}(0) &= \omega_0, & \dot{\phi}(T_1) &= 0 \end{aligned}$$

$T_1 \leq t \leq T$ における軌道は、

$$\begin{cases} x = x_{P0} + v_{xP0}T_1 + (s(t) - \lambda) \cos \theta_d \\ y = y_{P0} + v_{yP0}T_1 + (s(t) - \lambda) \sin \theta_d \end{cases} \quad (24)$$

$$s(T_1) = 0, \quad s(T) = s_d, \quad \dot{s}(T_1) = v_{P0}, \quad \dot{s}(T) = 0$$

逆に、リンクが静止した状態から目標位置 $[x_d, y_d, \theta_d]$ において目標速度 $[v_{xd}, v_{yd}, \omega_d]$ を与える操作を考える (Fig. 6)。この

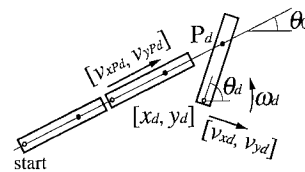


Fig. 6 Accelerating trajectory

場合撃心 P には位置 $[x_{Pd}, y_{Pd}]$ において速度 $[v_{xPd}, v_{yPd}]$ を与えればよいとする。目標位置における撃心 P を通り、 $[v_{xPd}, v_{yPd}]$ の方向の直線を描く。リンクの関節および撃心がともにこの直線上にあって、目標位置における撃心 P の位置から目標並進速度と逆向きに適当な距離だけ戻った位置を初期位置とする。初めに i. の並進軌道によって撃心 P を目標並進速度 $[v_{xPd}, v_{yPd}]$ まで加速する。次に撃心 P の並進速度を $[v_{xPd}, v_{yPd}]$ に保ちながら、撃心 P が目標位置に到達した瞬間にリンクの回転角、角速度が目標値に一致するように、iii. の並進 + 回転軌道を計画する。この軌道は次のように表される。

撃心の目標位置および速度は、

$$\begin{cases} x_{Pd} = x_d + \lambda \cos \theta_d \\ y_{Pd} = y_d + \lambda \sin \theta_d \end{cases} \quad \begin{cases} v_{xPd} = v_{xd} - \lambda \omega_d \sin \theta_d \\ v_{yPd} = v_{yd} - \lambda \omega_d \cos \theta_d \end{cases}$$

撃心の目標並進速度の傾きおよび大きさは、

$$\theta_0 = \text{atan2}(v_{yPd}, v_{xPd}) \quad v_{Pd} = \sqrt{v_{xPd}^2 + v_{yPd}^2}$$

$T_1 \leq t \leq T$ における軌道は、

$$\begin{cases} x = x_{Pd} + v_{xPd}(t - T) + \lambda \cos \phi(t) \\ y = y_{Pd} + v_{yPd}(t - T) + \lambda \sin \phi(t) \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \phi(T_1) &= \theta_0 + \pi, & \phi(T) &= \theta_d + \pi, \\ \dot{\phi}(T_1) &= 0, & \dot{\phi}(T) &= \omega_d \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq T_1$ における軌道は、

$$\begin{cases} x = x_{Pd} + v_{xPd}(T_1 - T) + (s(t) - \lambda) \cos \theta_0 \\ y = y_{Pd} + v_{yPd}(T_1 - T) + (s(t) - \lambda) \sin \theta_0 \end{cases} \quad (26)$$

$$s(0) = -s_d, \quad s(T_1) = 0, \quad \dot{s}(0) = 0, \quad \dot{s}(T_1) = v_{Pd}$$

リンクが運動している状態から停止させる場合も、静止している状態から目標の速度を与える場合も、停止/出発できる位置は初期/目標位置・速度に依存する。しかしききに述べたような操作で静止した任意の2点間の位置決めが可能である。したがって初期運動からの停止点と、目標位置・目標速度への出発点を位置決め操作によって結べば、(速度を含む) 任意の初期状態から任意の目標状態へ到達する軌道が構成できる。すなわち、このマニピュレータの可制御性が証明されたことになる。

4. シミュレーション

本章では第3章の軌道に対する第3リンクの挙動をシミュレーションによって示し、それぞれの軌道についての制御目標が達成可能なことを確認する。リンクは長さ 0.2[m] の質量分

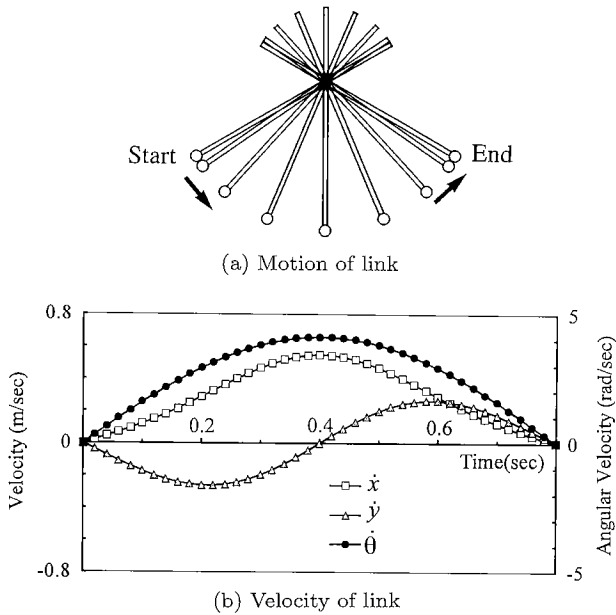


Fig. 7 Simulation result (rotation)

布が均一な棒とし、一端に非駆動関節をもつ。非駆動関節の x , y 座標を動かした際の関節角の変化を式 (3) の動力学の拘束にしたがって求めた。

はじめに、3.1 節 ii. の回転軌道に対する挙動を調べた (Fig. 7)。リンクが静止した状態から関節に対するリンク撃心を中心とした円周上で関節を加減速した。図中の白丸は関節、黒丸は撃心を表す。リンク回転角の初期値は $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$ ($t = 0$ [sec])、目標値は $\theta_d = \frac{5\pi}{6}$ ($t = 0.8$) である。Fig. 7(a) のように加減速にもかかわらず撃心の位置は 1 点にとどまっている。また Fig. 7(b) は第 3 リンクの手速度・角速度である。関節の並進が停止すると同時に第 3 リンクの回転も停止する。

次に、3.2 節の操作によって静止した 2 点間の位置決めを行った結果を示す (Fig. 8)。初期位置は $[0, 0, \frac{\pi}{2}]$ 、目標位置は $[0.2, 0, \frac{\pi}{2}]$ である。リンクは $0 \leq t \leq 0.4$ の間に ii. の軌道で $\theta = \frac{\pi}{2}$ から $\theta = \pi$ へと回転し、次に $0.4 \leq t \leq 0.8$ の間に i. の軌道で $[0.133, 0.133]$ から $[0.333, 0.133]$ へ並進し、最後に $0.8 \leq t \leq 1.2$ の間に再び ii. の軌道で $\theta = \pi$ から $\theta = \frac{\pi}{2}$ へと回転する。リンクの並進位置、回転角ともに目標位置に到達している。

Fig. 9 は、リンクが初期位置 $[0.2, 0, \frac{\pi}{2}]$ において初期速度 $[0.1, 0, 4]$ をもった状態からの停止を示す。リンクは $0 \leq t \leq 0.6$ において iii. の軌道によって回転を止め、 $0.6 \leq t \leq 0.8$ において i. の軌道によって並進を止める。 $t = 0.8$ において速度ゼロを達成している。

Fig. 10 では、静止した状態から目標位置 $[0.2, 0, \frac{\pi}{2}]$ において目標速度 $[0.8, 0, 2]$ への加速を行っている。リンクは $0 \leq t \leq 0.2$ において i. の軌道によって並進加速され、 $0.2 \leq t \leq 0.8$ において iii. の軌道によって回転を与えられる。目標位置において目標速度が得られている。

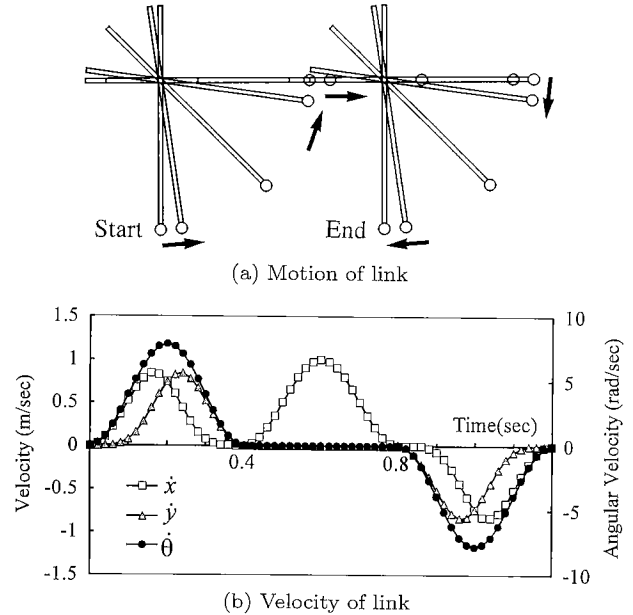


Fig. 8 Simulation result (positioning)

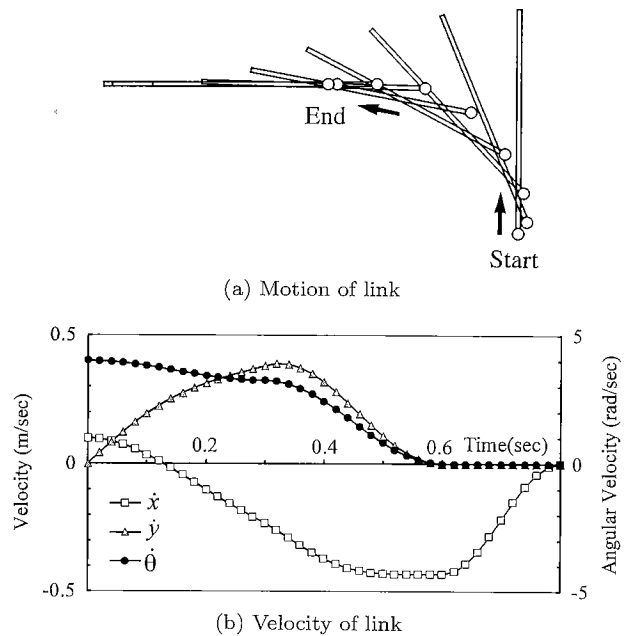


Fig. 9 Simulation result (decelerating)

5. ま と め

本論文では、第 3 関節がブレーキをもたない非駆動関節である 3 自由度の平面マニピュレータの可制御性について論じた。第 3 リンクに関する動力学にしたがってマニピュレータをモデルリングし、非駆動関節によって生ずる拘束の非ホロノミック性を示した。任意の初期状態から出発して任意の目標状態に到達可能な軌道および入力を実際を作る構成的方法を用いて、系の可制御性を証明した。これによって証明されるのは局所的可

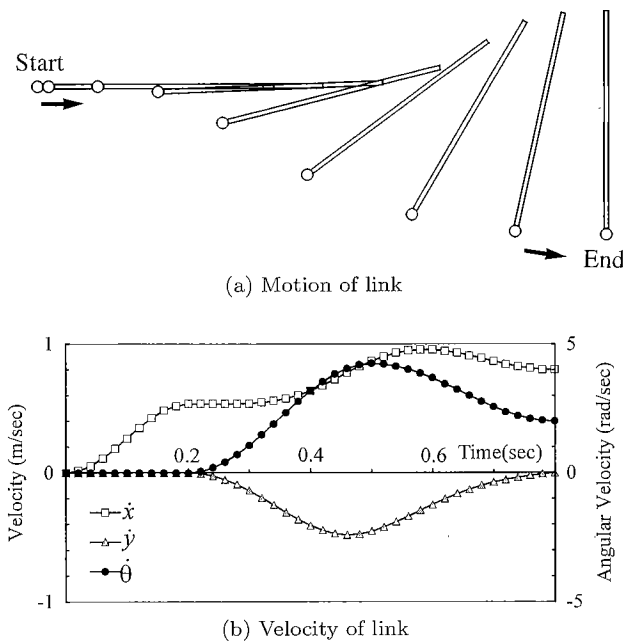


Fig. 10 Simulation result (accelerating)

到達性ではなく、大域的可制御性である。本論文における証明は直観的な理解が容易であり、また結果がマニピュレータの軌道計画の指針となるという利点をもつ。さらに、構成した軌道が実際に目標を達成できることをシミュレーションによって示した。

本論文の結果により、この形式のマニピュレータにおいてブレーキをまったく用いない位置決めが可能であることが証明できた。また、本論文における軌道の構成法を拡張すれば、無重力空間における物体の、3方向の並進力のみによる（回転を含む）6自由度のマニピュレーションが可能と考えられる。

本論文において構成される軌道は開ループ制御のフィードフォワード入力となるが、現実のマニピュレータを制御するためには、モデル誤差や外乱を補償するためのフィードバック制御が必要である。現在、フィードバックの構成法の研究を進めるとともに実際のマニピュレータを用いた制御実験を計画している。

参考文献

- [1] 荒井, 館: “非駆動関節を有するマニピュレータの力学的干渉による位置制御”, 計測自動制御学会論文集, vol.25, no.9, pp.1012-1017, 1989.
- [2] 荒井, 館: “非駆動関節を有するマニピュレータの動的制御 (2自由度マニピュレータの位置制御系)”, 日本機械学会論文集 C編, vol.57, no.534, pp.619-624, 1991.
- [3] 荒井, 館: “非駆動関節を有するマニピュレータの作業座標系における動的制御”, 日本機械学会論文集 C編, vol.57, no.537, pp.1621-1624, 1991.
- [4] 荒井, 館: “非駆動関節を有するマニピュレータの経路追従制御”, 計測自動制御学会論文集, vol.27, no.7, pp.800-805, 1991.

- [5] E. Papadopoulos and S. Dubowsky: “Failure Recovery Control for Space Robotic Systems,” Proc. American Control Conf., pp.1485-1490, 1991.
- [6] R. Mukherjee and D. Chen: “Control of Free-Flying Underactuated Space Manipulators to Equilibrium Manifolds,” IEEE Trans. Robotics and Automation, vol.9, no.5, pp.561-570, 1993.
- [7] A. Jain and G. Rodriguez: “An Analysis of the Kinematics and Dynamics of Underactuated Manipulators,” IEEE Trans. Robotics and Automation, vol.9, no.4, pp.411-422, 1993.
- [8] C. Lee and Y. Xu: “Actuability of Underactuated Manipulators,” CMU Robotics Institute Technical Report, CMU-RI-TR-94-13, Carnegie Mellon University, 1994.
- [9] G. Oriolo and Y. Nakamura: “Free-Joint Manipulators: Motion Control under Second-Order Nonholonomic Constraints,” Proc. IEEE/RJS Int. Workshop on Intelligent Robots and Systems (IROS '91), pp.1248-1253, 1991.
- [10] 中村, 鈴木, 濃沼: “ドリフト項をもつ非ホロノミックロボットの非線形制御”, ロボティクス・メカトロニクス講演会 '95 講演論文集, pp.929-932, 1995.
- [11] 中村: “非ホロノミックロボットシステム第1回~第5回”, 日本ロボット学会誌, vol.11, no.4-7, 1993, vol.12, no.2, 1994.
- [12] Y. Kanayama, Y. Kimura, F. Miyazaki and T. Noguchi: “A Stable Tracking Control Method for a Nonholonomic Mobile Robot,” Proc. IEEE/RJS Int. Workshop on Intelligent Robots and Systems (IROS '91), pp.1236-1241, 1991.
- [13] J.P. Laumond: “Feasible Trajectories for Mobile Robots with Kinematic and Environment Constraints,” in Intelligent Autonomous Systems (O.L. Hertzberger and F.C.A. Greon, eds.), North Holland, 1987.
- [14] 三平, 小林: “非線形制御理論を用いた多重トレーラーの直線経路追従制御”, 日本ロボット学会誌, vol.11, no.4, pp.587-592, 1993.
- [15] Z. Li and J. Canny: “Motion of Two Rigid Bodies with Rollong Constraint,” IEEE Trans. Robotics and Automation, vol.6, no.1, pp.62-72, 1990.
- [16] O.J. Sordalen, Y. Nakamura and W.J. Chung: “Design of a Nonholonomic Manipulator,” Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, pp.8-13, 1994.
- [17] Y. Nakamura and R. Mukherjee: “Nonholonomic Path Planning of Space Robots via a Bidirectional Approach,” IEEE Trans. Robotics and Automation, vol.7, no.4, pp.500-514, 1991.
- [18] K. Yamada: “Arm Path Planning for a Space Robot,” Proc. IEEE/RJS Int. Workshop on Intelligent Robots and Systems (IROS '93), pp.2049-2055, 1993.
- [19] 中村, 岩本: “自由関節で連結された宇宙構造物の形状制御”, 日本ロボット学会誌, vol.11, no.6, pp.883-891, 1993.
- [20] 中野, 土屋: “空中姿勢制御の研究”, 日本ロボット学会誌, vol.11, no.1, pp.91-99, 1993.
- [21] 石島: “微分幾何とシステム論 [II]—多様体上でのシステムの可制御性—”, 計測と制御, vol.25, no.12, pp.1103-1110, 1986.
- [22] 計測自動制御学会編: 自動制御ハンドブック基礎編, pp.798-802, オーム社, 1983.



荒井裕彦 (Hirohiko Arai)

1959年7月9日生。1982年東京大学工学部計数工学科卒業。同年本田技研工業(株)勤務。1984年通商産業省工業技術院機械技術研究所入所。現在ロボット工学部バイオロボティクス研究室主任研究員。1993年3月より1年間スタンフォード大学客員研究員。ロボットの遠隔操作, マニピュレータの動的制御, パワーアシストなどの研究に従事。工学博士。計測自動制御学会, 日本機械学会, IEEEの会員。(日本ロボット学会正会員)