

差分方程式拘束を伴う離散時間非ホロノミック系の運動計画

荒井 裕彦*

Motion Planning of Discrete-time Nonholonomic Systems with Difference-Equation Constraints

Hirohiko Arai*

The concept of discrete-time nonholonomic systems, in which the constraints cannot be represented as algebraic equations of generalized coordinates, is introduced. In particular, the constraints formulated as difference equations of generalized coordinates are considered. Such systems can be seen in the digital control of continuous-time nonholonomic systems, and in mechanical systems with repetitive and discontinuous constraints. A two-wheeled mobile robot and pivoting manipulation of a polyhedral object are described as simple examples. The k -step reachable region is defined as the set of the k -th state which the system can reach from the initial state, and the reachability of such systems is discussed. A motion planning method using the Jacobian matrix of the state with regard to the input series is proposed.

Key Words: Nonholonomic System, Discrete-Time System, Difference Equation, Nonlinear System, Step Reachability, Motion Planning

1. 緒 言

近年、ロボット工学分野で非ホロノミック系に関する研究が盛んに進められている [1] [2]。そこで対象とされるのは積分不可能な微分方程式で表される運動学的または力学的拘束を伴う力学系である。その運動計画や制御については主に連続時間非線形系の枠組みの中で議論が行われている。非ホロノミック性は本来連続的である力学上の概念だが、本論文ではこれを離散系に拡張することを考える。すなわち、連続時間系とのアナロジーに基づいて離散時間非ホロノミック系の概念を新たに導入し、その中でも特に拘束が一般化座標の差分方程式として表現される系に着目する。

この概念は車輪型移動ロボットや宇宙ロボットなどの連続時間非ホロノミック系のデジタル制御を基礎づけるものである。また、同じ枠組みで脚式移動ロボットや多指ハンドなどの拘束条件が反復的かつ不連続に変化する系を取り扱うことができる。これら二種類の系は構造上まったく異なるクラスに属するよう思われるが、離散時間非ホロノミック系の概念の導入により、統一的な手法で運動計画や制御が可能となる。

本論文の構成は以下の通りである。第 2 章では、離散時間非ホロノミック系の概念を定義し、その応用上の意義を述べる。第 3 章では、差分方程式拘束を伴う離散時間非ホロノミック系

の具体例を示し、その拘束条件と状態方程式を導く。第 4 章ではステップ可到達性という概念を導入し、その条件を示して系の可到達性について議論する。第 5 章では離散時間非ホロノミック系の運動計画の一手法を提案する。

2. 離散時間非ホロノミック系の導入

2.1 連続時間非ホロノミック系

はじめに、連続時間におけるホロノミック/非ホロノミック性の概念を示す。力学系に加わる拘束条件が系の一般化座標 q と時間 t の関数を用いて、

$$h(q, t) = 0 \quad (1)$$

という代数方程式で表せる場合、これを解析力学においてホロノミックな拘束という。非ホロノミック系とは式 (1) の形では表せないような拘束を持つ系のことである。ロボット工学でしばしば取り上げられる車輪型移動ロボットや宇宙ロボットの例では、拘束が一般化座標 q と一般化速度 \dot{q} からなる積分不可能な 1 階の微分方程式、

$$h(q, \dot{q}) = 0 \quad (2)$$

で表される[†]。また、その状態方程式は、入力を u として、

$$\dot{q} = G(q, u) \quad (3)$$

原稿受付 1998 年 11 月 27 日

*機械技術研究所

*Mechanical Engineering Laboratory, AIST, MITI

[†]力学の分野における定義では、式 (2) はあくまで非ホロノミック拘束の一例であり、一般化座標に関する不等式で表される拘束なども非ホロノミック拘束に分類される [3]。

という連続時間非線形系として書くことができる．一般に入力 u の要素の数は一般化座標 q の要素よりも少なく，系は under-actuated となっている．車輪型移動体や宇宙ロボットの場 合，式 (2) の拘束はさらに

$$h(q)\dot{q} = 0 \quad (4)$$

という Pfaffian 拘束として表される．また，状態方程式は，

$$\dot{q} = G(q)u \quad (5)$$

という対称アフィン形式となる．上の例では拘束は 1 階の微分方程式で表されているが，非駆動関節を有するマニピュレータ [4] のように拘束が一般化加速度までを含む積分不可能な 2 階の微分方程式で表される場合もある．このとき状態変数は一般化座標および一般化速度で表され，状態方程式はドリフト項を含むアフィン形式となる．

2.2 離散時間非ホロノミック系

式 (1)~(5) は状態変数が時間に沿って連続的に変化する場 合の定式化であり，非ホロノミック系はこれらを出発点として連続時間非線形制御系の観点から研究されてきた．一方，連続系とのアナロジーで離散時間系を考えることができる．離散的な入力によって一般化座標が離散的に変化する系を考える．第 k ステップにおける一般化座標および入力を，それぞれ

$$q^k = (q_1^k, \dots, q_n^k)^T \in M, \quad u^k = (u_1^k, \dots, u_m^k)^T \in \Omega$$

と表す．ただし $m < n$ とする．

定義 1 (離散時間ホロノミック拘束) 上記の系において，任意のステップ数 k に対して系に加わる拘束条件が，

$$h(q^k, k) = 0 \quad (6)$$

という，一般化座標 q^k とステップ数 k のみを含む代数方程式で表せる場合，これを離散時間系におけるホロノミックな拘束と定義する．

連続時間系におけるホロノミック拘束 (1) は系を離散化しても式 (6) のように表すことができる．特に拘束が時間に依存しない場合は両者はまったく同じ形をとる．

定義 2 (離散時間非ホロノミック系) 一般化座標に関する拘束を式 (6) のように書き換えることができない系をすべて離散時間非ホロノミック系と呼ぶ[†]．

式 (2) (3) のような，微分方程式拘束を伴う連続時間非ホロノミック系と同様に，離散時間非ホロノミック系に属する一つのクラスとして差分方程式拘束を伴う系を考えることができる．状態方程式が

$$q^{k+1} = G(q^k, u^k) \quad (7)$$

と表される離散時間非線形系において，式 (7) から入力 u^k を消去したときに

$$h(q^{k+1}, q^k) = 0 \quad (8)$$

[†]連続時間系の場合と同様に不等式拘束を伴う系なども離散時間非ホロノミック系に属する．

という $n - m$ 個の差分方程式で表される拘束が得られ，それを式 (6) のように変換できない場合，定義 2 よりこの系は離散時間非ホロノミック系に属する．離散時間系の場合も，拘束の差分方程式が q^{k+2}, q^{k+3}, \dots を含むさらに高階の非ホロノミック系が存在しうが，本論文では主に式 (7) (8) で表される 1 階の非ホロノミック系を取りあげる．この場合，状態変数は一般化座標と同じものとなるので，これらを特に区別することなく扱う．

非ホロノミック性は本来連続的な性質を持つ力学上の概念だが，これを拡張して離散系を想定する実用上の目的は以下の二つである．

- 連続時間非ホロノミック系の離散時間制御
- 拘束条件が反復的かつ不連続に変化する系の制御

第一の応用は，連続時間非ホロノミック系を離散化し，デジタル制御を行う場合である．非ホロノミック系の制御は通常かなり複雑な計算を伴い，計算機を用いた制御を前提としている．現在，実際の制御器の設計はたいてい次のような二つのステップで行われている．まず，連続系のモデルに対してアナログ制御器を設計する．次に制御器を近似離散化して計算機に実装し，現実の系に適用する．しかし，サンプリング周期を大きくとったときの影響などを考えると，離散化された系のための制御系を直接設計する手法の研究が今後重要になると思われる．

非ホロノミック系の連続時間制御について膨大な数の研究が行われているのとは対照的に，その離散時間制御に関する研究は極めて限られている．とはいうものの，この問題に注目した研究も少数ではあるが見られる．Monaco と Normand-Cyrot の研究グループでは，非ホロノミック系のマルチレートデジタル制御について精力的に研究を進めている [5] ~ [7] ．彼らの方法は基本的にはアナログ / デジタルの二段階からなる制御である．すなわち，まず元の非ホロノミック系を連続状態フィードバックを用いて Chained 形式に変換し，次いで，この Chained 形式に対してマルチレートのサンプリング周期で区分一定入力を与える，という方法をとっている．

ここで，式 (3) の連続時間系 $\dot{q} = G_{cont}(q, u)$ をサンプリング周期 ΔT で離散化することを考える．元の連続時間系の状態 $q(t)$ と離散時間系の状態 q^k とは，

$$q^k = q(k\Delta T) \quad (k = 0, 1, \dots)$$

によって対応する．各区間 $k\Delta T \leq t < (k+1)\Delta T$ において連続時間系へ与える入力は一値

$$u(t) = u^k$$

とする．このとき次のステップにおける状態は，

$$q^{k+1} = q^k + \int_{k\Delta T}^{(k+1)\Delta T} G_{cont}(q(t), u^k) dt \quad (9)$$

となる． u^k , ΔT は積分区間内で一定値であるから，右辺第 2 項の積分は q^k と u^k の関数として表され，式 (9) は式 (7) と同じ形をとる．また連続系への入力 $u(t)$ は必ずしも区分一定ではなく， u^k をパラメータとして表現できる時間関数とし

てもよい．例えば連続系へ周期関数で表される入力を与え，その振幅や周期を離散系への入力として扱うこともできる．

上記は厳密な離散化だが，式(3)を1次差分近似しても式(7)と同じ形が得られる．例えば一般化速度 \dot{q} を $(q^{k+1} - q^k)/\Delta T$ で Euler 近似して，

$$q^{k+1} = q^k + G_{cont}(q^k, u^k)\Delta T \quad (10)$$

とおくこともできる．ただしこの方法では連続系が本来持っている性質が失われる恐れもあり，注意を要する．

差分方程式を伴う離散時間非ホロノミック系が現れるもう一つの場面は，元の連続系で拘束条件が反復的かつ不連続に変化する場合である．これは脚式移動ロボットの歩行や多指ハンドによる持ち替え動作に見られる．これらにおいては脚と床面または指と対象物の間の接触状態によって拘束条件が不連続に変化する．反復的な動作によってロボット本体の移動または対象物の操りを行うとすれば，動作の一周期分における各脚や指の操作量が離散的入力であり，各周期終了時のロボット本体や操り対象物の位置・姿勢および脚や指の姿勢が状態変数(かつ一般化座標)である．

Kelly と Murray [8] は移動ロボットにおける運動の一般的な原理をファイバー束の理論を用いて説明し，その中で不連続な拘束条件を持つ歩行ロボットを扱った．Goodwine と Burdick は歩行ロボットの拘束条件を異なる接地状態に応じて状態変数が動きうる多様体の重なり (stratified manifold) として表現し，軌道計画 [9] や可制御性の解析 [10] を試みた．これらにおいては系全体を拘束条件の変化で接続された連続系の集まりとして扱っており，かなり複雑な数学的手法を必要とする．それに対し本論文では，各拘束条件における運動を少数のパラメータで代表し，これを離散的入力として扱うことによって，問題を状態の離散的な遷移に単純化するという立場をとっている．

3. 差分方程式拘束の具体例

本章では，読者の理解を助けるために，一般化座標の差分方程式で表される拘束を伴う離散時間非ホロノミック系の具体例を示す．連続時間非ホロノミック系を離散化した場合，および拘束条件が反復的かつ不連続に変化する場合についての例を一つずつ挙げ，それぞれについての状態方程式および拘束条件を導く．

3.1 連続時間非ホロノミック系の離散化

連続系の離散化の具体例として，代表的な連続時間非ホロノミック系である平行2車輪移動ロボット (Fig. 1) を考える．

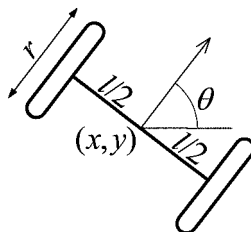


Fig. 1 Two-wheeled mobile robot

ここで (x, y) は車軸中点の位置， θ はロボットの姿勢を表す．入力 ω_L, ω_R はそれぞれ左・右車輪の回転速度である． r は車輪直径， l は車輪間の距離である．連続系の状態方程式は，

$$\begin{cases} \dot{x} &= r(\omega_R + \omega_L) \cos \theta / 2 \\ \dot{y} &= r(\omega_R + \omega_L) \sin \theta / 2 \\ \dot{\theta} &= r(\omega_R - \omega_L) / l \end{cases} \quad (11)$$

と表される．ここで ω_R, ω_L を時間間隔 ΔT の区分一定入力 ω_R^k, ω_L^k として離散化を行う．

$$v^k = r(\omega_R^k + \omega_L^k) / 2, \quad \omega^k = r(\omega_R^k - \omega_L^k) / l$$

とおけば，離散系の状態方程式は，

$$\begin{cases} x^{k+1} &= x^k + \int_0^{\Delta T} v^k \cos(\theta^k + \omega^k t) dt \\ y^{k+1} &= y^k + \int_0^{\Delta T} v^k \sin(\theta^k + \omega^k t) dt \\ \theta^{k+1} &= \theta^k + \int_0^{\Delta T} \omega^k dt \end{cases} \quad (12)$$

となる．新たな離散入力を

$$u_v^k = v^k \Delta T, \quad u_\omega^k = \omega^k \Delta T$$

とすれば，状態方程式は $u_\omega^k \neq 0$ の場合，

$$\begin{cases} x^{k+1} &= x^k + \{\sin(\theta^k + u_\omega^k) - \sin \theta^k\} u_v^k / u_\omega^k \\ y^{k+1} &= y^k - \{\cos(\theta^k + u_\omega^k) - \cos \theta^k\} u_v^k / u_\omega^k \\ \theta^{k+1} &= \theta^k + u_\omega^k \end{cases} \quad (13)$$

$u_\omega^k = 0$ の場合，

$$\begin{cases} x^{k+1} &= x^k + \cos \theta^k u_v^k \\ y^{k+1} &= y^k + \sin \theta^k u_v^k \\ \theta^{k+1} &= \theta^k \end{cases} \quad (14)$$

式(13)から u_v^k, u_ω^k を消去すると，

$$\begin{aligned} (x^{k+1} - x^k)(\cos \theta^{k+1} - \cos \theta^k) + \\ (y^{k+1} - y^k)(\sin \theta^{k+1} - \sin \theta^k) &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

という差分方程式が得られる．式(14)も式(15)を満たすから，拘束条件はともにこの式で表される．元の連続系において拘束条件，状態方程式はそれぞれ式(4)の Pfaffian 拘束，式(5)の対称アフィン系で表せるが，こうした形式は離散化によって失われている．

式(13)を原点近傍の微小入力について線形近似してみる．式(7)において $q^k = (x^k, y^k, \theta^k)^T$ ， $u^k = (u_v^k, u_\omega^k)^T$ とすると，

$$\left. \frac{\partial G(q^k, u^k)}{\partial q^k} \right|_{\substack{q^k \rightarrow 0 \\ u^k \rightarrow 0}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \frac{\partial G(q^k, u^k)}{\partial u^k} \right|_{\substack{q^k \rightarrow 0 \\ u^k \rightarrow 0}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり，式(14)からも同じ関係が得られるから，線形近似系は，

$$q^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} q^k + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u^k$$

とおける．この系は明らかに離散時間線形系の可制御性条件を満たさず，不可制御である．

一方，式(13)(14)において， $q^0 = (0, 0, 0)^T$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} u^0 &= (\delta, 0)^T && \rightarrow q^1 = (\delta, 0, 0)^T \\ u^0 &= (\delta, \pi)^T, u^1 = (\delta, -\pi)^T && \rightarrow q^2 = (0, 4\delta/\pi, 0)^T \\ u^0 &= (0, \delta)^T && \rightarrow q^1 = (0, 0, \delta)^T \end{aligned}$$

となる．すなわち，連続時間非ホロノミック系と同じように，二つの入力 u_v^k, u_ω^k を用いて状態を x, y, θ のあらゆる方向へ動かすことが可能である．また，このことから拘束が式(6)のような代数方程式で表せないことは明らかである．

3.2 不連続な拘束条件の反復的变化

平面上に置かれた多面体対象物の操りにおいてピボット操作[11]と呼ばれる手法が提案されている．これは Fig. 2 のように対象物を傾けて一頂点で支え，この点を中心に回転させる操作である．文献[11]ではピボット操作の静力学的解析を行っているが，ここでは操作の幾何学的関係のみを考える．

対象物の一辺の両端を交互に支点としてピボット操作を繰り返すことにより，対象物の平面上における位置・姿勢を制御する．Fig. 3 に対象物底辺のみに着目した操作の運動学モデルを示す．はじめに点 B を中心として辺 AB を角度 u_B^k だけ回転し，次いで点 A を中心として角度 u_A^k の回転を行う．これらを合わせて 1 ステップの操作とする．点 A の平面上における位置 x^k, y^k と辺 AB の姿勢 θ^k を系の一般化座標とする．入力は辺

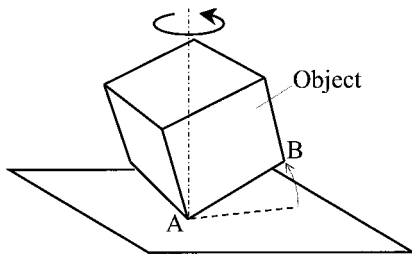


Fig. 2 Pivoting of an object

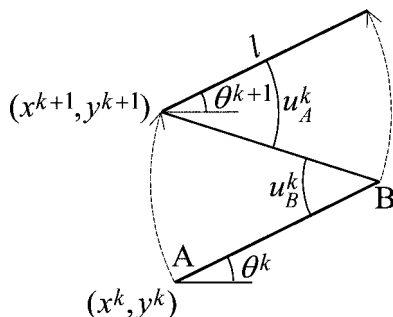


Fig. 3 Model of planar pivoting

AB の回転角 u_A^k, u_B^k である．辺 AB の長さを l とする．このとき，状態方程式は，

$$\begin{cases} x^{k+1} = x^k + l \cos \theta^k - l \cos(u_B^k - \theta^k) \\ y^{k+1} = y^k + l \sin \theta^k + l \sin(u_B^k - \theta^k) \\ \theta^{k+1} = \theta^k + u_A^k - u_B^k \end{cases} \quad (16)$$

という式(7)と同じ形で表される．このモデルは脚間隔一定の二足歩行ロボット[12]の運動学モデル(Fig. 4)と等価である．また，前節の平行 2 車輪移動ロボットにおいて車輪を交互に回転させた場合にも適用できる．

式(16)から入力 u_A^k, u_B^k を消去すると，系に対する拘束は，

$$(x^{k+1} - x^k - l \cos \theta^k)^2 + (y^{k+1} - y^k - l \sin \theta^k)^2 = l^2 \quad (17)$$

となり，式(8)の形をとる．点 A または B を中心とした回転中の拘束はホロノミックなものだが，不連続な拘束条件の遷移によりこうした離散的な非ホロノミック拘束が生ずる．

式(16)についても，状態を $q^k = (x^k, y^k, \theta^k)^T$ ，入力を $u^k = (u_A^k, u_B^k)^T$ として原点近傍で線形近似すると，

$$q^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} q^k + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & l \\ 1 & -1 \end{pmatrix} u^k$$

となり，やはり不可制御な線形近似系が得られる．

また，初期状態を $q^0 = (0, 0, 0)^T$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} u^0 &= (\delta, \delta)^T, u^1 = (-\delta, -\delta)^T \\ &\rightarrow q^2 = (2l(1 - \cos \delta), 0, 0)^T \\ u^0 &= (2\delta, \delta)^T, u^1 = (0, \delta)^T \\ &\rightarrow q^2 = (0, 2l \sin \delta, 0)^T \\ u^0 &= (\delta, 0) \\ &\rightarrow q^1 = (0, 0, \delta)^T \end{aligned}$$

となる(Fig. 5)．前節の例と同様に，状態をすべての方向へ動かすことが可能である．

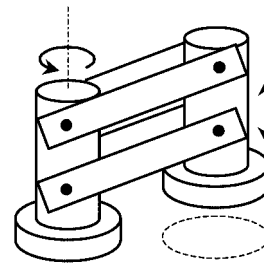


Fig. 4 Biped robot equivalent to pivoting

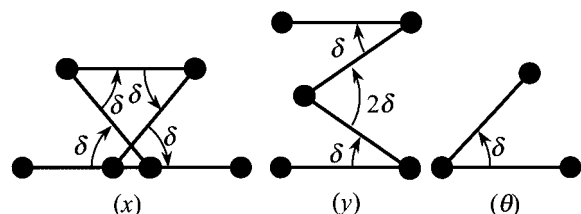


Fig. 5 Motion in each coordinate

4. 可到達領域と可到達性

系をある状態からどのような状態へ移すことが可能かということは、離散系の場合にもやはり重要な問題である。特に非ホロノミック系においては、前章で示したように線形近似系が不可制御であるにもかかわらず状態をあらゆる方向に動かせる場合があり、非線形系としての取り扱いが不可欠である。

連続時間系においては、どんなに短い時間経過をとっても、その間に加えられる入力は無次元の入力列と考えることができる。一方、離散時間系においては、ある時間内に加えられる入力の個数は有限である。このことが連続系と離散系とで到達可能な状態の性質に基本的な違いをもたらす。本章では経由したステップ数に依存する到達可能な領域としてステップ可到達領域を定義し、離散時間非ホロノミック系の可到達性について考察する。

4.1 ステップ可到達領域

式(7)の離散系においては、入力列とそれによって到達する状態との間に

$$\begin{aligned} q^1 &= G(q^0, u^0) &= G_1(q^0, u^0) \\ q^2 &= G(q^1, u^1) &= G_2(q^0, u^0, u^1) \\ \vdots & & \vdots \\ q^k &= G(q^{k-1}, u^{k-1}) &= G_k(q^0, u^0, \dots, u^{k-1}) \end{aligned} \tag{18}$$

という関係がある。 u^i と u^j ($i \neq j$) を別個の入力と考えれば、何ステップ先の状態の変化を考慮するかによって、それに影響する入力の個数が変わることになる。したがって、状態が到達できる領域の性質も、経由するステップ数によって変化すると予想される。そこで、各ステップ数に対応する可到達領域を以下のように定義する。

定義 3(ステップ可到達領域) 式(7)の系において、状態 q^0 から出発して許容入力により k ステップで到達可能な状態 q^k の集合を、 q^0 からの k -ステップ可到達領域 $\Lambda(q^0, k)$ と呼ぶ。すなわち、

$$\begin{aligned} \Lambda(q^0, k) & \\ &= \{q^k; q^{j+1} = G(q^j, u^j), u^j \in \Omega, 0 \leq j \leq k-1\} \end{aligned} \tag{19}$$

3.2 節のピボット操作における原点 $(0, 0, 0)^T$ からの 1-ステップおよび 2-ステップ可到達領域を Fig. 6 に示す。1-ステップ可到達領域は、式(17)より原点を通る半径 l の円筒面 (a) に限定される。したがって、1 ステップで三つの一般化座標を同時に目標の位置に移すことはできない。一方、2-ステップ可到達領域は、(a) の円筒面上の任意の点を起点として描いた同じ円筒面上の点の集合である。これは円柱 (b) の表面および内側となり、この範囲ではあらゆる位置・姿勢に到達できる。このように、離散時間非ホロノミック系では、ステップ数によってある状態から到達可能な範囲の次元が変化する場合がある。

4.2 ステップ局所可到達性

次に、連続時間系における局所可到達性の定義 [13] にならって、ステップ局所可到達性を定義する。

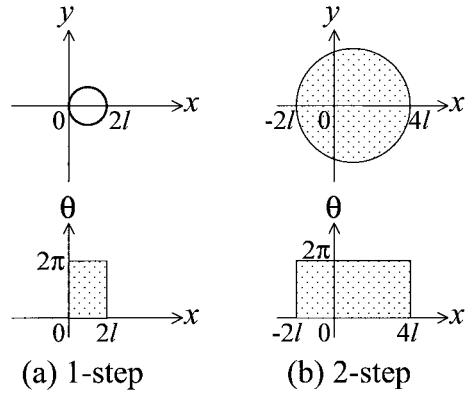


Fig. 6 Step reachable region

定義 4(ステップ局所可到達性) 式(7)の系において、 q^k の定義域を M とする。ある初期状態 $q^0 \in M$ からの k -ステップ可到達領域 $\Lambda(q^0, k)$ が M で内点を持つならば、この系は q^0 から k -ステップ局所可到達である。

これは連続時間系における局所強可到達性の定義を離散系にそのままあてはめたものであるから、次の性質が成り立つ。
補題 1 連続時間系を厳密に離散化した系が、ある自然数 k に対して k -ステップ局所可到達ならば、元の連続系は局所強可到達である。

また、定義の内容から、直ちに次の性質が成り立つことは明らかである。

補題 2 任意の $q^0 \in M$ に対して $q^0 \in \Lambda(q^0, 1)$ である系が k -ステップ局所可到達ならば、この系は任意の $j \geq k$ に対して j -ステップ局所可到達である。

さて、式(18)の関数

$$q^k = G_k(q^0, u^0, u^1, \dots, u^{k-1})$$

に再び注目する。この式は、 k ステップ先の状態が、経由するステップにおける $m \times k$ 個の要素からなる入力列 $U_k = (u^{0T}, \dots, u^{k-1T})^T$ および初期状態 q^0 の関数として決定されることを意味する。

G_k の U_k に関するヤコビ行列

$$J_k = \frac{\partial G_k}{\partial U_k} = \left(\frac{\partial G_k}{\partial u^0}, \dots, \frac{\partial G_k}{\partial u^{k-1}} \right) \tag{20}$$

を考える。入力列に微小変動を与え $U_k = U_{k0} + \delta U_k$ としたとき、状態が $G_k(q^0, U_{k0}) + \delta q^k$ に到達するとすれば、

$$\delta q^k = J_k \delta U_k + O(|\delta U_k|^2)$$

となる。 J_k の階数が状態 q^k の定義域 M の次元と等しければ、到達する状態が入力列 U_k の微小変動によって M のすべての方向へ移動できることは明らかである。したがって以下の定理が成り立つ。

定理 1(ステップ局所可到達性の必要十分条件) 式(7)の系に対して式(20)のヤコビ行列 J_k を考えたとき、

$$\text{rank } J_k = \dim M (= n) \tag{21}$$

となる入力列 U_k が存在するならば、この入力列により到達する点の近傍において k -ステップ可到達領域 $\Lambda(q^0, k)$ は M の位相に関して内点をもち、系は k -ステップ局所可到達である。

なお、ヤコビ行列 J_k を求める計算は合成関数 $G_k(q^0, U_k)$ およびその偏微分の複雑な記号計算を要すると思われる。しかし、1 ステップの状態遷移を表す関数 $G(q, u)$ に対して

$$G_q^j = \left. \frac{\partial G(q, u)}{\partial q} \right|_{\substack{q = q^j \\ u = u^j}} \quad G_u^j = \left. \frac{\partial G(q, u)}{\partial u} \right|_{\substack{q = q^j \\ u = u^j}}$$

とおけば、 J_k に含まれる部分行列は、式 (18) より次のように簡単な計算によって求めることができる。

$$\frac{\partial G_k}{\partial u^i} = G_q^{k-1} \dots G_q^{i+1} G_u^i \quad (22)$$

したがって、複雑な記号計算は不要である。

Jakubczyk と Sontag [14] は離散時間非線形系の前進/後退可到達性および可遷移性を定義し、その条件を示した。文献 [14] では式 (21) と等価な条件を離散時間状態方程式から生成したベクトル場を用いてより一般的に表している。式 (21) は単純な条件だが、ヤコビ行列 J_k は入力列の変動を到達する状態の変化に関連づけている点で、運動計画や制御への応用においてより有用であると考えられる。

ちなみに、離散時間定係数線形系

$$q^{k+1} = Aq^k + Bu^k$$

に関して J_k を求めると、式 (20) (22) より、

$$J_k = (A^{k-1}B, \dots, AB, B) \quad (23)$$

となる。これは可制御性行列の計算過程と等価である。したがって可制御性行列の階数が n (系が可制御) ならば、系は n -ステップ局所可到達である。また線形系の可制御性指数 ν は

$$\nu = \min\{k : \text{rank}(A^{k-1}B, \dots, AB, B) = n\}$$

と定義されるから、定理 1 を成り立たせる最小のステップ数 k と等しくなる。すなわち、定理 1 の条件は離散時間定係数線形系における可制御性の条件を自然に拡張したものとなっている。

例として 3.2 節のピボット操作を考える。原点 $(0, 0, 0)^T$ を初期状態とする 2 ステップの操作について J_2 のグラム行列式を計算すると、

$$\begin{aligned} \det J_2 J_2^T &= l^4 \{3 - \cos u_A^0 - \cos(2u_A^0) \\ &\quad + \cos(u_A^0 - 2u_B^1) - \cos(2(u_A^0 - u_B^1)) \\ &\quad + \cos(2u_A^0 - u_B^1) - \cos u_B^1 - \cos(2u_B^1)\} \end{aligned}$$

となる。上式がゼロとなる入力列、例えば $u_A^0 = 0, u_B^1 = 0$ を含むものに対しては J_2 の階数は 3 とならない。しかし、それ以外の入力列に対しては J_2 の階数は 3 であるから、定理 1 より系は 2-ステップ局所可到達である。

4.3 ホロノミック拘束の条件

ここまで導入した概念を利用して、式 (7) の離散系がどのような場合にホロノミック系となるかについて考える。本節での議論は状態変数が一般化座標と一致することを前提とする。簡単のため以下では G_u^j は常にフルランクと仮定する。式 (8) の差分方程式拘束が、状態 q^k のみに依存する、

$$h(q^k) = 0 \quad (24)$$

という形の $n - m$ 個の離散時間ホロノミック拘束に完全に交換できるとする。このとき、入力列 U_k をどのように与えても、状態 q^k は状態空間内で式 (24) によって表される m 次元の多様体上に拘束される。一方 G_u^{k-1} の階数は m であるから、少なくとも入力 u^{k-1} の微小変動によって状態 q^k はこの多様体上のあらゆる方向へと動くことができる。したがって次の定理が成り立つ。

定理 2 (ホロノミック拘束の必要条件) 式 (7) の系に対する拘束条件がすべて式 (24) のようなホロノミック拘束で表されるならば、任意のステップ数 k に関するいかなる入力列 U_k に対しても、式 (20) のヤコビ行列 J_k は、

$$\text{rank } J_k = \dim \Omega (= m) \quad (25)$$

となる。

この場合どんなステップ数に対しても定理 1 の条件は満たされず、系がステップ局所可到達とならないことは明らかである。

式 (25) は、ある状態に何ステップで到達しても、入力列の微小変動によって状態が動ける方向の組み合わせは変わらない、ということの意味する。そこで、系がある状態に 2 ステップで到達する場合に、第 1 ステップの入力の変動によって状態が動ける方向が第 2 ステップの入力の変動によるものと一致する、という条件を検討してみる。すなわち、いかなる j に対しても常に $G_q^{j+1} G_u^j$ を構成する列ベクトルがすべて G_u^{j+1} を構成する列ベクトルの線形結合で表されると仮定する。このとき、

$$G_q^{j+1} G_u^j = G_u^{j+1} Q_j$$

となる m 次正方形行列 Q_j が存在する。すると式 (22) は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_k}{\partial u^i} &= G_q^{k-1} \dots G_q^{i+2} G_q^{i+1} G_u^i \\ &= G_q^{k-1} \dots G_q^{i+2} G_u^{i+1} Q_i \\ &= G_q^{k-1} \dots G_u^{i+2} Q_{i+1} Q_i r \\ &\dots \\ &= G_u^{k-1} Q_{k-2} \dots Q_{i+1} Q_i \end{aligned}$$

となるため、式 (20) よりヤコビ行列 J_k を構成するすべての列ベクトルは G_u^{k-1} を構成する列ベクトルの線形結合で表される。したがって、次の補題が成り立つ。

補題 3 式 (7) の系において任意の j に対して $G_q^{j+1} G_u^j$ を構成する列ベクトルがすべて G_u^{j+1} を構成する列ベクトルの線形結合で表されるならば、式 (25) が成立する。

この補題により、1 ステップの状態遷移を表す関数の性質に基づいて拘束がホロノミックかどうか判定できる。

5. 運動計画

本章では、差分方程式拘束を伴う離散時間非ホロノミック系のための運動計画手法を提案する。問題設定は、式(7)の系を初期状態 q^0 から k ステップで目標状態 q_d^k へ移す入力列 $U_k = (u^0, \dots, u^{k-1})$ を求める、というものである。もちろん目標状態 q_d^k は初期状態 q^0 からの k -ステップ可到達領域の中になければならない。また、ステップ数 k は式(21)を満たし、 k -ステップ局所可到達性が成立するように選ぶ必要がある。式(18)より、計画すべき入力列 U_k は非線形代数方程式

$$q_d^k = G_k(q^0, U_k) \quad (26)$$

の解である。

式(26)は、冗長マニピュレータの運動学方程式と同じ形になっている。すなわち、入力列 U_k はマニピュレータの関節角に対応し、目標状態 q_d^k は手先作業座標に対応する。したがって式(7)で表される離散時間非ホロノミック系の運動計画問題は、マニピュレータの逆運動学問題と同じ構造を持つ。そこで、ヤコビ行列 $J_k = \partial G_k / \partial U_k$ を用い、冗長マニピュレータの速度分解制御[15]と類似の方法によって、運動計画問題を解くことを試みる[†]。なお、数値計算としての観点から見れば、この方法はニュートン・ラプソン法の一変形として解釈することもできる。

まず、入力列 U_k として適当な初期値を与え、初期状態 q^0 からこの入力列によって到達する状態 q^k を式(18)より計算する。ヤコビ行列 J_k を式(20)(22)に従って求め、 J_k の疑似逆行列 $J_k^+ = J_k^T (J_k J_k^T)^{-1}$ を計算する。次に、入力列の変動分を以下のように計算する。

$$\Delta U_k = J_k^+ K_p (q_d^k - q^k) + (I - J_k^+ J_k) f(U_k) \quad (27)$$

上式の右辺第1項は到達状態 q^k と目標状態 q_d^k との誤差を小さくする効果を持つ。行列 K_p は誤差フィードバックゲインである。第2項の $f(U_k)$ は入力列の冗長性を生じた第2サブタスクを表すベクトルである。この項を用いて、第1サブタスクである到達誤差の低減よりは優先順位の低い、制御入力列の最小化や障害物回避などのサブタスクを実現できる。例えば、評価関数 $V(U_k)$ を最大とするには、 $f(U_k) = \partial V / \partial U_k$ とすればよい。零空間行列 $I - J_k^+ J_k$ により、この項は到達状態 q^k には影響を及ぼさない。

式(27)を入力列に加え、 $U_k \leftarrow U_k + \Delta U_k$ と入力列を更新する。また、新たな入力列に対して、到達状態 q^k を計算する。以上の計算を到達位置誤差 $q_d^k - q^k$ が十分小さくなるまで繰り返すことにより、入力列 U_k を求めることができる。Fig. 7にこのアルゴリズムのフローチャートを示す。

上記の方法を用いて、3.1節の平行2車輪移動ロボットの位置決め軌道を計画した。ステップ数は $k = 8$ である。冗長入力による第2サブタスクとして、 $f(U_k) =$

[†]最近、Heimann [16] はこれと非常に近い方法による非駆動関節マニピュレータの開ループおよび閉ループ離散時間制御手法を提案している。

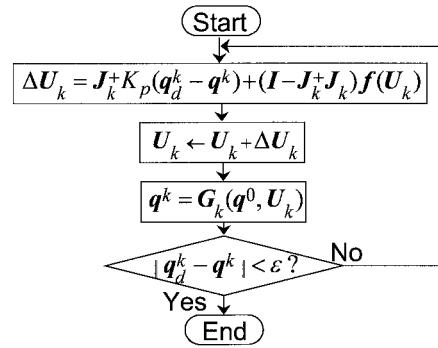


Fig. 7 Motion planning algorithm

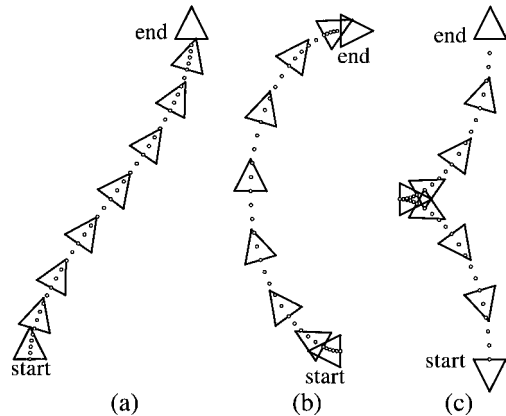


Fig. 8 Planned motion of mobile robot

$-(K_v u_v^0, K_\omega u_\omega^0, \dots, K_v u_v^{k-1}, K_\omega u_\omega^{k-1})$ とおくことにより制御入力列の重み付き二乗和 $\sum_{i=0}^{k-1} \{K_v (u_v^i)^2 + K_\omega (u_\omega^i)^2\}$ をコスト関数として最小化した。Fig. 8に計画された運動を示す。各初期状態、目標状態はそれぞれ、(a) : $(0, 0, \pi/2) \rightarrow (5, 10, \pi/2)$, (b) : $(0, 0, 0) \rightarrow (0, 10, \pi)$, (c) : $(0, 0, -\pi/2) \rightarrow (0, 10, \pi/2)$ である。初期入力列としてはいずれも $u_v^i = 1, u_\omega^i = 0$ ($i = 0, \dots, k-1$) を与えた。(c)の場合、途中で切り返しを含む運動が自動的に生成されている。切り返しの有無は最初に与える入力列の初期値に依存するが、切り返しがない場合、または同じ場所に切り返しが生ずる場合には初期入力列に関係なく同じ入力列が結果として得られる。一方、第2サブタスクを与えない場合には計画される入力列は初期入力列に依存する。軌道(a)の繰り返し計算過程における到達状態と目標状態との誤差二乗(a)および第2サブタスクに用いた入力コスト関数(b)の変化をFig. 9に示す。誤差はゼロに収束し、同時にコスト関数も低く抑制されている。運動計画のための計算時間は、100回の繰り返し計算を行った場合、パーソナルコンピュータ(ペンティアム CPU, 150 [MHz])で約0.17 [sec]である。ほぼ実時間で計画が可能であり、軌道実行中に実際の位置データをもとに再計画・軌道修正を行うこともできると考えられる。

次に3.2節のピボット操作(8ステップ)による対象物の位置決めを計画した。この場合も第2サブタスクとして、 $f(U_k) = -K_u (u_A^0, u_B^0, \dots, u_A^{k-1}, u_B^{k-1})$ とおき、制御入力列の

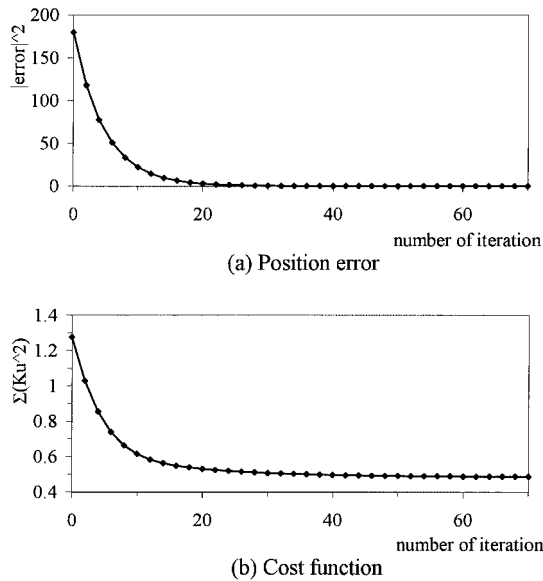


Fig. 9 Error and cost function

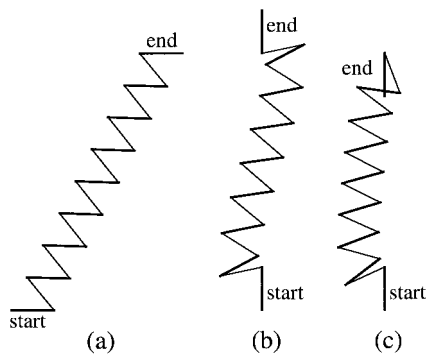


Fig. 10 Planned motion of pivoting

二乗和 $\sum_{i=0}^{k-1} \{(u_A^i)^2 + (u_B^i)^2\}$ を最小化した。Fig. 10 に計画された運動を示す。各初期状態，目標状態はそれぞれ，(a) : $(0, 0, 0) \rightarrow (3, 6, 0)$ ，(b) : $(0, 0, \pi/2) \rightarrow (0, 6, \pi/2)$ ，(c) : $(0, 0, \pi/2) \rightarrow (0, 6, -\pi/2)$ ，ただし $l = 1$ である。初期入力列としてどの場合についても $u_A^i = u_B^i = 0.5$ ($i = 0, \dots, k-1$) を与えた。運動計画に用いた計算機プログラムは，状態遷移を表す関数およびその偏微分の計算部分を除いて車輪型移動ロボットのものと同じであり，統一的な方法で運動計画が実現されている。

6. 結 言

離散時間非ホロノミック系の概念を提案し，その中で特に一般化座標の差分方程式として表される拘束を受ける系に注目した。こうした系は連続時間非ホロノミック系のデジタル制御や不連続な拘束条件の反復的变化によって生じる。例として平行 2 車輪移動ロボットおよび多面体のピボット操作を示した。

また，経由するステップ数に依存するステップ可到達領域を定義し，局所可到達性の必要十分条件を示した。さらに，冗長マニピュレータの逆運動学問題と類似の手法を用いた運動計画手法を提案した。本論文で示したのは開ループの制御手法だが，今後はフィードバック制御について考察を進める予定である。

参 考 文 献

- [1] 中村：“非ホロノミックロボットシステム第 1 回～第 5 回”，日本ロボット学会誌，vol.11, no.4～7, 1993, vol.12, no.2, 1994.
- [2] 中村ほか：ミニ特集「非ホロノミック系の制御」，計測と制御，vol.36, no.6, pp.384–416, 1997.
- [3] 大貫，吉田：岩波講座 現代の物理学 1 力学。岩波書店，1994.
- [4] G. Oriolo and Y. Nakamura: “Free-Joint Manipulators: Motion Control under Second-Order Nonholonomic Constraints,” Proc. IEEE/RSJ Int. Workshop on Intelligent Robots and Systems (IROS '91), pp.1248–1253, 1991.
- [5] S. Monaco and D. Normand-Cyrot: “An Introduction to Motion Planning Under Multirate Digital Control,” Proc. 31st IEEE Conf. Decision and Control, pp.1780–1785, 1992.
- [6] A. Chelouah et al.: “Digital Control of Nonholonomic Systems: Two Case Studies,” Proc. 32nd IEEE Conf. Decision and Control, pp.2664–2669, 1993.
- [7] P. Di Giamberardino et al.: “Piecewise Continuous Control for a Car-Like Robot: Implementation and Experimental Results,” Proc. 35th IEEE Conf. Decision and Control, pp.3564–3569, 1996.
- [8] S. Kelly and R. Murray: “Geometric Phases and Robotic Locomotion,” J. Robotic Systems, vol.12, no.6, pp.417–431, 1995.
- [9] B. Goodwine and J. Burdick: “Trajectory Generation for Kinematic Legged Robots,” Proc. 1997 IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, pp.2689–2696, 1997.
- [10] B. Goodwine and J. Burdick: “Gait Controllability for Legged Robots,” Proc. 1998 IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, pp.484–489, 1998.
- [11] 相山，稲葉，井上：“ガラスプレス・マニピュレーションの研究：操作形態の分類とピボット操作の実現”，日本ロボット学会誌，vol.14, no.1, pp.114–121, 1996.
- [12] T. Yano, S. Numao and Y. Kitamura: “Development of a Self-Contained Wall Climbing Robot with Scanning Type Suction Cups,” Proc. IEEE/RSJ Int. Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS '98), pp.249–254, 1998.
- [13] 石島 他：非線形システム論。計測自動制御学会，1993.
- [14] B. Jakubczyk and E. Sontag: “Controllability of Nonlinear Discrete-time Systems: A Lie-Algebraic Approach,” SIAM J. Control and Optimization, vol.28, no.1, pp.1–33, 1990.
- [15] Y. Nakamura, H. Hanafusa and T. Yoshikawa: “Task-Priority Based Redundancy Control of Robot Manipulators,” Int. J. Robotics Research, vol.6, no.2, pp.3–15, 1987.
- [16] B. Heimann: “Feedback Linearization of Underactuated Manipulation Systems,” Proc. 3rd Int. Conf. Advanced Mechatronics (ICAM '98), pp.163–166, 1998.



荒井裕彦 (Hirohiko Arai)

1959年7月9日生。1982年東京大学工学部計数工学科卒業。同年本田技研工業(株)勤務。1984年通商産業省工業技術院機械技術研究所入所。現在ロボット工学部バイオロボティクス研究室長。マニピュレータの動的制御，パワーアシストなどの研究に従事。工学博士。日本機械学会，計測自動制御学会，IEEEの会員。(日本ロボット学会正会員)