楕円曲線と数論

まず近年の有名な整数論での成功は、

フェルマー予想（ワイルスの定理）： $n > 2$ なる自然数に対して

$$X^n + Y^n = Z^n$$

を満たす、どの Ｘ、Ｙ、Ｚもゼロでない整数解 (X, Y, Z) は存在しない。

が解決されたことである。

　フェルマー自身の証明が $n = 4$, ルベーグによる $n = 5$の場合等、散発的な結果を経てドイツのクンマーによって、nが正則素数（注1）ならばフェルマー予想が正しいことが示されていたが、ワイルスによって楕円曲線の幾何的な性質を示すこと（谷山-志村予想の解決）で一般に証明された。

　一方フランスの数学者オエステレとマッサーが、ＡＢＣ-予想と言われる、整数の深い性質を予想した（注2）。

ＡＢＣ予想　　どの２つも互いに素な正の整数 a, b, c に対して

$$a + b = c$$

を満たすとする。このとき $\mathrm{rad}(abc)$ を abc を割る全ての素数の積として定義する。
このとき、任意の小数 $k > 0$ に対して正の実数 D_k が存在して、

$$c < D_k \{\mathrm{rad}(abc)\}^{1+k}。$$

荒っぽくいえば、たとえば2つの素数 p, qに対して

$$c = 3^{1000} + 5^{5000} = 2 \times p_2 \times p_3 \times ....$$

と、異なる素数の積で指数が殆ど１のものに分解する、というものである（もちろん(?!)自分はいま2番目の素因数p_2が分からない)。応用として

1. $1/p + 1/q + 1/r < 1$ ならば、 $X^p + Y^q = Z^r$となる整数解は（幾つかの有限の例外の組 (p, q, r) を除いて）有限個。

2. $Y^2 = X^3 + d$で$d > 0$なら整数解(X, Y)は有限個。

3. 任意の整数Nに対して、$n! + N = k^2$となる自然数の組(n, k)は有限個。

4. ディリクレの L関数の非自明なゼロ点（Siegelゼロ点）が存在しない。

5. モーデル予想。

などまだまだある。古典的未解決の数論の難問がワンサカ解ける筋金入りの定理である。

具体的には望月新一は楕円曲線に対する、シュピロ予想を解決した。つまり、ここでも楕円曲線が決定的カギを握る。証明は現在査読中であるが、間違いなく正しいとの確信を講演者はしている。いろんな話題に触れて、最後に講演者が知る望月先生の横顔を述べてみたい。

（注1）素数pに対して、k = 2,3,..,p-3に対するベルヌーイ数B_kを考える。pがこれらB_kの分子を割り切らないとき、pを正則素数という。正則素数の例：3,5,7,11,13,17.19.23..。

（注2）ABC予想をもう少しわかり易く言うと：
「a+b=cを満たす互いに素な自然数a,b,cに対して、積abcの互いに異なる素因数の積をnとかく。このとき、任意の正の実数rに対して

$$c > n^{1+r}$$

をみたす自然数の組（a,b,c）は存在しても高々有限個であろう。」