多変数解析函数について.

VII　或る算術的概念について.

岡潔

1948 年 10 月 15 日受理

序文.　現在我々は, 来し方[1]に出逢った困難の本性を再認識し, 行く末に出逢うであろう困難の姿を考察するなどの懸命な省察の途上にある. その成果の一端をここに報告しよう.

人々は, 第 I 論文の定理 II (基本補題), 第 II 論文の定理 I および第 V 論文の条件 (β) (A. Weil の条件) において, ある種の算術的概念に気付く筈である. そしてもし分岐点を許すなら, 人々はさらなるそれに出逢うであろう. しかもそれなしには代数函数すら扱うことができないのである. この事は我々をそれらの概念の研究に駆り立てる.

幾つかの算術的概念, 例えば合同とかイデアルとかを多項式の分野から解析函数の分野に移植したとすると, この函数はもはや一般には全有限空間に延長することができないため, そこに新たなる問題が生じる. その種の現象を発見したのは H. Cartan[2]であるが, この論文でも, 結論として, その種の幾つかの定理と精選された一つの問題を見いだすであろう.(No. 7 を見よ) それらの定理は第 I 論文以来の諸問題を分岐点を含んだ領域に対してで研究するためには不可欠であるばかりでなく, それよりも単純な領域の研究に対しても有用である.

さて, 我々は F. Hartogs やその後継者達に負う一連の美しい問題群の延長上に, 新しい問題群を後続の人々に残したいと想う. 幸い多変数解析函数の分野は数学の色々な分野に拡がっているため, 我々はここに提起された新しい問題の様々な変形を夢見ることが許されるであろう.[3]

≪ この論文では有限で単葉な領域しか扱わないので, その条件の明示は一般に省かれている.≫

1. 合同と同値. H. Cartan の定理.　解析函数の分野に移植された算術的概念から生じる問題の中には, (Cousin の問題のように) 局所的に

[1] これまでの論文は次の通りである. I Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles, 1936. II Domaines d'holomorphie, 1937. III Deuxième problème de Cousin, 1939. IV Domaines d'holomrphie et domaines rationnellement convexes, 1941. V L'intégrale de Cauchy, 1941. VI Domaines pseudoconvexes, 1942.

[2] H. Cartan, Sur les matrices holomorphes de n variables complexes, 1940, p. 1-26 (Journal de Mathématiques, Vol. 19); 我々はまたこれらの定理に多くの事を負っている.)

[3] 著者は第 VI 論文の時代以来の援助に対し, 風樹会に対してここに心からの謝意を述べる.

定義したものを大域的に求めるという型の問題がある．それを拾い出そう (récolter).

複素 n 変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の空間の或る領域 D に, その変数の二つの正則函数 f, φ と有限個の正則函数の組 $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ を考える．その空間を簡単に (x) と表し, 例えば, 函数 f を $f(x)$ と表す．そして α_i $(i = 1, \ldots, p)$ を D における変数 (x) の正則函数として

$$f - \varphi = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_p F_p$$

なる形の関係があるとする．このとき函数 f, φ は D で (F) に関して合同であると言われ, その関係は

$$f \equiv \varphi \qquad \mathrm{mod}\ (F)$$

と表される．もし f, φ が D の点 P の或る近傍で合同なら, それらを P で合同であると言う．ところで, f, φ が D のすべての点で合同であるとしても, D に対して大域的に合同であるとは限らない．それでここに一つ, 次の問題がある：

問題 ($\mathbf{C_1}$)　或る閉集合 (当然有界な) E の近傍に, 有限個の正則函数の組 $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ と一つの正則函数 $\Phi(x)$ が与えられていて, E のすべての点で関係式 $\Phi(x) \equiv 0 \ \mathrm{mod}\ (F)$ を満たしているとき, E の近傍における p 個の正則函数 $A_i(x)$ を, 恒等的に $\Phi = \sum A_i F_i$ $(i = 1, \ldots, p)$ となるように求めること.

これは函数の表現に関するものである．函数自身に対しては：

問題 ($\mathbf{C_2}$)　空間 (x) における或る閉集合 E の近傍で有限個の正則函数の組 $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ を考え, さらに E の任意の点 P において, P を中心とする多円筒 (γ) と (γ) における正則函数 $\varphi(x)$ を考える．そして共通部分 (δ) を持つすべての隣接した多円筒の対 $[(\gamma), (\gamma')]$ に対し, 対応する函数の間に, (δ) のすべての点で, $\varphi(x) \equiv \varphi'(x) \ \mathrm{mod}(F)$ なる関係があるとする．このとき, E の近傍における正則函数 $\Phi(x)$ を, E のすべての点 P で $\Phi(x) \equiv \varphi(x)\ \mathrm{mod}\ (F)$ となるように求めること.

$\ll$ 多円筒 $\gg$ という言葉に関係する幾つかの言葉を説明しよう．E_i を x_i 平面上の集合とするとき, $x_i \in E_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ なる形の集合はすべて筒状集合 (ensemble cylindrique) と呼ばれ, E_i はその成分と呼ばれる. E が閉筒状集合のとき, もし各 x_i 平面上での E_i の余集合が, Riemann 球面上で考えれば連結になるというとき, E を単連結と言う．そのすべての成分 E_i が円であるような筒状集合 E を多円筒と呼ぶ.

次に, 空間 (x) における或る領域 D において有限個の正則函数の二つの組を考え, それらを $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$, $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q)$ と表す. そしてそれらは D に対して大域的に二つの関係式

$$\varphi_i \equiv 0 \mod (f), \quad f_j \equiv 0 \mod (\varphi) \quad (i = 1, \ldots, q;\ j = 1, \ldots, p)$$

を満たすとする. このとき函数の組 $(f), (\varphi)$ は $\underline{D\text{ で同等}}$であると言い, その関係を

$$(f) \sim (\varphi)$$

と表す. 上記の関係式の一つだけ, 例えば一つ目だけを満たすときは

$$(f) \subset (\varphi)$$

と表す.

函数の組 $(f), (\varphi)$ は, もしそれらが D の点 P の或る近傍で同等なら, $\underline{\text{点 } P \text{ で}}$同等であると言い, $(\varphi) \subset (f)$ に対しても同様である.

同等について, 次の問題がある：

問題 (E) 問題 (C_2) と同じ幾何学的状勢のもとで, 各 (γ) に対して正則函数の組 (f) が与えられており, 各 (δ) に対して $(\gamma), (\gamma')$ に対応する函数の組 $(f), (f')$ の間には, (δ) のすべての点で $(f) \sim (f')$ なる関係があるとする. このとき, 閉集合 E の近傍における有限個の正則函数の組 (F) を, E のすべての点で $(F) \sim (f)$ となるように求めること.

これらが拾い出された (récoltés) 問題である.

問題 (E) に対して, H. Cartan は前掲の論文で次の定理を示した.

H. Cartan の定理. (x) 空間において二つの閉筒状集合 Δ', Δ'' を考え, それらは, 一つのを除いて, すべての変数平面上で同じ成分を持っているとし, 共通部分 $\Delta' \cap \Delta'' = \Delta_0$ は存在して, 単連結とする. そして Δ' の近傍には有限個の正則函数の組 (f') が, Δ'' の近傍には同じような組 (f'') が与えられていて, Δ_0 の近傍では大域的に $(f') \sim (f'')$ なる関係があるとする. このような状勢の下で, 和集合 $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$ の近傍における正則函数の有限個の組 (f) を, 各 $\Delta^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ の近傍で $(f) \sim (f^{(i)})$ となるように求めることができる.

その論文で H. Cartan は行列の概念を導入してこの定理を証明した. 彼の方法では p, q, r をそれぞれ組 $(f'), (f''), (f)$ の函数の個数とするとき

$$p < r, \qquad q < r$$

となる. この現象に彼は慎重 (élaboré) な注意を払っている.

この Cartan の定理を問題 (E) に応用しよう. x_i $(i=1,2,\dots,n-1)$ 平面上に円 (α_i) を考え, x_n 平面上には二つづつが互いに交わる三つの円 (β_j) $(j=1,2,3)$ を考えて, 閉成分 $(\bar{\alpha})$, $(\bar{\beta}_j)$ によって定義される閉多円筒 Δ_j $(j=1,2,3)$ を考える. そして, 各 Δ_j の近傍における有限個の正則函数の組 (f_j) を考え, それらの組のどの二つも, 対応する共通部分の近傍で大域的に同等であるとする.

この状況の下で Cartan の定理の応用を試みると, $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$ に対しては, その応用は可能であり, Δ の近傍における有限個の正則函数の組 (f) を, Δ_1 の近傍では大域的に $(f)\sim(f_1)$ となり, Δ_2 に対してもそうなるように求められる. しかし, $\Delta\cup\Delta_3$ に対しては 幾何学的状勢から $(f),(f_3)$ が共通部分の近傍で大域的に同等であるかどうかが分からないため, Cartan の定理の応用は一般には不可能である. このとき, もしすべての問題 (C_1) がすべての閉多円筒 (すなわちその近傍) で解けるなら, 第二の応用も当然可能である. このことから次の結果が得られる.

もし, すべての問題 (C_1) がすべての閉多円筒に対して解けるなら, 問題 (E) に対しても同様である.

証明は簡単であるし, いつもの通りであるから省く. ≪ 多円筒 ≫ について説明しておく. この論文では専ら閉多円筒を扱う. 何故なら, そうしておくと問題の内在的な性質自身がもっと一般な閉領域への拡張を許すし, 何よりもその概念は単純だからである. [訳注. 1]

問題 (C_1), (C_2) の関係に対しては,

共通部分 Δ_0 が単連結であるという制限以外は Cartan の定理と同じ幾何学的状勢を考える. そして, Δ の近傍に有限個の正則函数の組 $(F_1,F_2,\dots,F_p)$ が与えられており, (F) に関する全ての問題 (C_1) は Δ_0 の近傍で解けると仮定する. この状況の下で, もし Δ' の近傍における正則函数 f' と Δ'' の近傍における正則函数 f'' があって, Δ_0 の近傍のすべての点で $f'\equiv f'' \mod (F)$ となるなら, Δ における正則函数 f を, Δ' のすべての点で $f\equiv f' \mod (F)$ となり, Δ'' に対してもそうなるように求めることができる.

実際, 函数

$$\varphi(x)=f'(x)-f''(x)$$

は, Δ_0 の近傍で正則であり, Δ_0 のすべての点で

$$\varphi(x)\equiv 0 \mod (F)$$

なのだから, 問題 (C_1) を解いて

$$\varphi=\alpha_1F_1+\alpha_2F_2+\cdots+\alpha_pF_p$$

と表される. α_i $(i = 1, \ldots, p)$ は Δ_0 の近傍の正則函数である.

Δ_0 は筒状なので, Cousin 積分を使って Δ' の近傍における正則函数 $a_i(x)$ と Δ'' に対する同様の正則函数 $b_i(x)$ を恒等的に

$$a_i(x) - b_i(x) = \alpha_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

となるように求められる. それで函数

$$\psi' = f' - (a_1 F_1 + \cdots + a_p F_p), \quad \psi'' = f'' - (b_1 F_1 + \cdots + b_p F_p)$$

を作る. ψ' は Δ' の近傍で正則であり, ψ'' は Δ'' の近傍でそうである. ところで Δ_0 に対しては, 恒等的に

$$\psi' - \psi'' = \varphi - (\alpha_1 F_1 + \cdots + \alpha_p F_p) = 0$$

である. したがって ψ' と ψ'' は Δ の近傍におけるただ一つの函数 $f(x)$ の部分である. そして Δ' の近傍では $f = \psi' \equiv f' \mod (F)$ であり, Δ'' においても同様である. C.Q.F.D.

この補題から直ちに次の結果が得られる.

もしすべての問題 (C_1) が閉多円筒で解けるなら, 問題 (C_2) もそうである.

したがって問題 (C_1), (C_2), (E) は問題 (C_1) に帰着する.

最後に, 人々は第 I 論文の定理 II, 第 II 論文の定理 I および第 V 論文の条件 (β) において, それぞれ問題 (C_2), (E) および (C_1) に気付くであろう. [訳注. 2]

2. 不定域イデアル. H. Cartan の考えにしたがって ≪ イデアル ≫ を移植しよう.

(x) 空間に領域 D と D における正則函数の集合 (I) を考え, それは次の二つの性質を持つとする.

1^o もし $f(x) \in (I)$ であり, $\alpha(x)$ が D における正則函数なら $\alpha f \in (I)$ である.

2^o もし $f'(x) \in (I)$, $f''(x) \in (I)$ なら $f' + f'' \in (I)$ である.

このとき (I) を定域 D の正則イデアルと呼ぶ. しかし我々はここには立ち止まらない.

(x) 空間において, 領域 δ (連結または非連結), δ における正則な函数 $f(x)$ および (f, δ) の集合 (I) を考える. 以下, $(f, \delta) \in (I)$ と言う代わり

に δ に対して $f \in (I)$ であると言うことがある. (I) は次の二つの性質を持つとする.

1^o　もし $(f, \delta) \in (I)$ であり, $\alpha(x)$ がある領域 δ' (連結または非連結) における正則函数なら, $\delta \cap \delta'$ に対して $\alpha f \in (I)$ である.
2^o　もし $(f, \delta) \in (I)$, $(f', \delta') \in (I)$ なら, $\delta \cap \delta'$ に対して $f + f' \in (I)$ である.

このとき (I) を不定域正則イデアルと呼ぶ. (I) は単に不定域イデアル, またはもっと単純に, イデアルと呼ばれることもある.

この定義から次のことが言える.
イデアル (I) に対し, もし $(f, \delta) \in (I)$, $\delta' \subset \delta$ なら $(f, \delta') \in (I)$ でなければならない.

それで, 函数 f が点 P の或る近傍に対して (I) に含まれているなら, f は点 P で (I) に含まれていると言うことにする.

不定域イデアル (I) に対して, 次の, ある意味で同類 (pareilles) の二つの性質を考える (concevons).

性質 (T_1)　もし $(f, \delta) \in (I)$, $(f, \delta') \in (I)$ なら $\delta \cup \delta'$ に対して $f \in (I)$ となる.
性質 (T_2)　もし $\delta_1 \subset \delta_2 \subset \cdots$ であり $(f, \delta_1) \in (I)$, $(f, \delta_2) \in (I)$ $\cdots$ なら, 列 $\delta_1, \delta_2 \cdots$ の極限 δ_0 に対して $f \in (I)$ となる.

この概念 (conception) を検討しよう.

例 1.　複素 1 変数 x の平面で, 原点を中心とする半径 1 の円 (C) と, (C) 内で直径 d (すなわち δ の 2 点間の距離の上限が d) の任意の領域 δ (連結または非連結) を考え, $d \leq 1/2$ であるような (f, δ) の集合 (I) を考える. (I) はイデアルであり, 性質 (T_2) を満たすが, 性質 (T_1) は満たさない.

例 2.　円 (C) 内に原点を中心とする半径 r_i の円 (C_i) の列を考え, r_i は増大しながら 1 に収束するとする. そして δ はこの列の少なくとも一つの (C_i) に含まれるような (f, δ) の集合 (I) を考える. (I) はイデアルであり, 性質 (T_1) を満たすが性質 (T_2) は満たさない.

今度は, 概念 $\ll$ イデアルの有限基底 $\gg$ を定域から不定域に移植し, 性質 (T_1), (T_2) および問題 (C_1) に関することは考えないで, それを調べよう (filtrer).
空間 (x) において, 不定域イデアル (I), 領域 D および D における有限個の正則函数 $F_1, F_2, \ldots, F_p$ を考える. そしてそれは次の性質を持つとする.

1^o　函数 F_i $(i=1,\ldots,p)$ のどれも, 領域 D のすべての点で (I) に属する.

2^o　D の任意の点 P に対し, もし f が P で (I) に属しているなら, P に対して $(f)\subset(F_1,F_2,\ldots,F_p)$ である.

このとき (F) を (I) の D における有限擬底(pseudobase fini) と言う.

次の問題を提起しよう.

問題 (I)　空間 (x) に不定域イデアル (I) と閉集合 E が与えられたとき, E の近傍における (I) の有限擬底系を求めること.

次に空間 (x) に不定域イデアル (I), 二つの領域 D, D' $(D'\subset D)$ および D における有限個の正則函数の組 (F) を考え, (F) は D における (I) の有限擬底系であるとする. そうするとそれは D' に対してもそうである.

それで, 不定域イデアル (I) に対し, 有限個の正則函数の組 (F) が点の或る近傍における有限擬底であるとき, それを (I) の点における有限擬底と言うことにする. そのような (F) は局所擬底と呼ばれることもある. さらに次の問題を提起する.

問題 (J)　空間 (x) に不定域イデアル (I) と点 P が与えられたとき, (I) の P における有限擬底系を求めること.

問題 (J) は問題 (I) の特別な場合である. しかし, その間には次の関係がある.

空間 (x) において, イデアル (I) と, 閉集合 E に関する問題 (I) を考え, E は閉多円筒とする. そして E のすべての点 P においてイデアル (I) に対する問題 (J) は解けるとし, さらに問題 (C_1) は閉多円筒で解けるとする. そうすると上の問題 (I) も解ける.

実際, E の任意の点 P を考えると, (I) に関する問題 (J) は P で解けるから, P を中心とする多円筒 (γ) と, (γ) における有限個の正則函数系 (f) を, (f) が (γ) に対する (I) の擬底を与えるように見つけることができる. 隣接した多円筒の対 $[(\gamma),(\gamma')]$ を調べると, その各々に対応する函数系 (f), (f') は, そこにおける擬底なのであるから, 共通部分 $(\gamma)\cap(\gamma')$ のすべての点で同等である. それで E の近傍における有限個の正則函数系 (F) を, E のすべての点で $(F)\sim(f)$ となるように求めよう. ところでこれは閉多円筒 E に関する問題 (E) であるから, 問題 (C_1) が解けるという仮定により, すでに見たように (F) は存在する. そうすると, $(F)\sim(f)$ であるから, (F) は E のすべての点 P における擬底を与え, したがって E に対してそうである.　C.Q.F.D.

このように 問題 (J) は問題 (I) の固有部分 (partie propre) である．
さて問題 (J) に対して次の例がある．

例 3. 複素 2 変数 x, y の空間に原点を中心とする二つの超球 (C), (γ) を $(\gamma) \subset (C)$ となるように描き，さらに解析平面 $x = y$ を描く．超球面 C と γ の間の部分および γ 上の部分を Σ_0 と表す．そして (f, δ) の集合 (I) として，$\delta \subset (C)$ であり，$f(x, y)/(x - y)$ は共通部分 $\Sigma_0 \cap \delta$ のすべての点で正則函数であるようなものを考える．(I) はイデア ルである．(性質 $(T_1), (T_2)$ を満たす.) しかし (I) に属する (f, δ) の零は Σ_0 であるから，このイデアルは $\gamma \cap \Sigma_0$ 上のどの点でも有限局所擬底を持つことはできない. [訳注. 3]

このように問題 (J) は無条件では解けない．他にも色々の種類の反例がある (apercevera).

我々は閉多円筒に対して問題 (J) が解けるような二種類の不定域イデアルに出合うだろう．その一つはこの論文で扱う．

もう一種類のそれは幾何学的不定域イデアル (これは多項式の分野の幾何学的イデアルに対応する) であり，これは分岐点を許すような領域を研究するとき，不可欠になる．この種のイデアルに対する (問題 (J) を閉多円筒に対して解くための) 証明には，この論文の結果以外に，内分岐域についての或る概念が必要になる．だからそれは次の論文で扱う．

3. 同次線型函数方程式とその形式解. いま用意したばかりの概念を使って問題 (C_1) の周辺を探ろう (scruter).

1^o 同次線型函数方程式. 空間 (x) の或る領域 D における恒等的零ではない p 個の正則函数 F_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ を考え，方程式

$$A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_pF_p = 0 \tag{1}$$

を考える (concevons)．ここで A_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ は未知函数を意味する．D に含まれる領域 δ (連結または非連結) において，この方程式を恒等的に満たす正則函数の系 $[A_1(x), A_2(x), \ldots, A_p(x)]$ をこの方程式の δ に対する解 (正則)と言う．そしてこの種の方程式を同次線型函数方程式と呼ぶ．

方程式 (1) に関し，$(A_1, A_2, \ldots, A_p)$ が δ に対する解であるような (A_1, δ) の集合 (I_1) を考える．このとき，次の事が言える．

(I_1) はイデアルである.

なぜなら，もし $(A_1, \delta) \in (I_1)$ であり，さらに $\alpha(x)$ が領域 δ' (連結または非連結) における正則函数なら $\delta \cap \delta'$ に対して $\alpha A_1 \in (I_1)$ である．また，もし $(A_1, \delta) \in (I_1)$, $(A_1', \delta') \in (I_1)$ なら，$\delta \cap \delta'$ に対して $A_1 + A_1' \in (I_1)$ である．

(I_1) が性質 $(T_1), (T_2)$ を満たすかどうかはすぐには分からない.

前節の終わりに述べたのはこの種のイデアルのことである. そして問題 (J) は次のようになる.

問題 (**K**) 空間 (x) の領域 D に同次線型函数方程式と D の点 P が与えられているとき, 対応するイデアル (I_1) の P における有限擬底系を求めること.

2^o 形式解. ここで方程式 (1) の解を表現することを考えよう (se proposer). すでに方程式 (1) に対するイデアル (I_1) を考えた. それで次に方程式

$$A_2F_2 + A_3F_3 + \cdots + A_pF_p = 0 \tag{2}$$

を考え, (I_1) と同様に (A_2, δ) の集合 (I_2) を考える. (I_2) は前の説明からイデアルである. 以下同様にして, 最後に方程式 $A_pF_p = 0$ を考える. このときは, F_p は恒等的零ではないので, $(I_p) = (0)$ (すなわち要素が 0 のみよりなるイデアル) である. 次の複合問題を考える (concevons).

問題 (λ) 領域 D に含まれる任意の閉集合 E に対し, イデアル (I_1), $(I_2), \ldots, (I_p)$ の有限擬底を, 各擬底が E の近傍で対応するイデアルに大域的に属するように求めること.

問題 (λ) が解けると仮定すると, $(I_1), (I_2), \ldots, (I_p)$ に対して, それぞれ上記の性質を持つ擬底

$$(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p),\ (\Phi'_1, \Phi'_2, \ldots, \Phi'_p)\ , \ldots,\ (0)$$

が得られる. E の近傍の任意の点 P と, P における (すなわち P の近傍における) 方程式 (1) の解 $[A_1(x), A_2(x), \ldots, A_p(x)]$ を考える. (Φ) は E の近傍における (I_1) の擬底であるから, 函数 $A_1(x)$ は P で

$$A_1 = C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2 + \cdots + C_q\Phi_q$$

と表される. C_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$ は或る正則函数である.

次に $A_2(x)$ に注目しよう. 各 Φ_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$ は E の近傍で大域的に (I_1) に属しているから, 方程式は $(\Phi_i, \Psi_{i2}, \ldots, \Psi_{ip})$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$ なる形の q 個の解を持っている. ここで

$$B_j = C_1\Psi_{1j} + C_2\Psi_{2j} + \cdots + C_q\Psi_{qj} \qquad (j = 2, 3, \ldots, p)$$

と置くと, 方程式 (1) の P における $(A_1, B_2, \ldots, B_p)$ なる形の解が得られる. さらに $A'_j = A_j - B_j$ と置くと, $(A'_2, A'_3, \ldots, A'_p)$ は P における方程式 (2) の解である. したがって A_2 は P で

$$A_2 = B_2 + C'_1\Phi'_1 + C'_2\Phi'_2 + \cdots + C'_r\Phi'_r$$

と表される. C'_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ は或る正則函数であり, B_2 は上記のように表される函数である. 以下同様に続ける.

そのように続けていくと, 方程式 (1) の解 $[A_1(x), A_2(x), \ldots, A_p(x)]$ は P で $\underline{C_{ij} = C_{kl}\ (k = 1, \ldots, p;\ l = 1, \ldots, N)\ \text{なる形の等式を伴って}}$

$$(3) \qquad A_i = C_{i1}\pi_{i1} + C_{i2}\pi_{i2} + \cdots + C_{iN}\pi_{iN} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

のように表されることが分かる. ここで π_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, p; j = 1, \ldots, N)$ は E の近傍での定まった正則函数であり C_{ij} は解によって定まる P で正則な函数である. 例えば, A_1 に対しては

$$\pi_{1i} = \Phi_i, \quad \pi_{1j} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, q; j = q + 1, q + 2, \ldots, N)$$

であり, A_2 に対しては

$$\pi_{2i} = \Psi_{i2}, \quad \pi_{2j} = \Phi'_{j-q}, \quad \pi_{2k} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, q;\ j = q + 1, q + 2 \ldots, q + r;\ k = q + r + 1, \ldots, N),$$
$$C_{1i} = C_{2i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q)$$

である. [訳注. 4]

逆に, E の近傍の任意の点 P と, P における正則函数の任意の組 (C) (勿論指定された等式を満たす (respectant)) を考えると, (3) によって, その組 (C) に, P における正則函数の組 (A) が対応し, (3) をうまく選んでいる限り, (A) は明らかに函数方程式 (1) を満たす.

一般に, π_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, p; j = 1, \ldots, N)$ を D の或る領域 D' (連結または非連結) における定められた正則函数とし, 函数方程式 (1) に対して (3) の形の表現が対応して, 次の性質を満たすとする.

1° D' 内の点 P に対する方程式 (1) の解 $[A_1(x), A_2(x), \ldots, A_p(x)]$ はすべてこの形で表される. ここで C_{ij} は P における適当な (勿論指定された等式を満たす) 正則函数である.

2° D' 内の点 P における任意の正則函数 C_{ij} (勿論指定された等式を満たす) に対し, (3) 式によって, P における方程式 (1) の解 (A) が得られる.

この表現を函数方程式 (1) の D' に対する形式解と言い, (π) を形式解の核と言う. 今調べたことを問題として纏めると,

問題 (**L**)　ある領域に同次線型函数方程式と, その領域内の閉集合 E が与えられたとき, E の近傍におけるその方程式の形式解を求めること.

そして, 得られた結果は次の通りである.

補題 1.　もし問題 (λ) が解けるなら, 対応する問題 (L) も解ける.

3°　問題 (C_1) への応用.　問題 (C_1) と同次線型函数方程式の形式解の関係は次の命題で与えられる.

補題 2.　空間 (x) に一つ以外は同じ成分を持つ隣接した二つの閉筒状集合 Δ', Δ'' を描き, $\Delta' \cup \Delta'' = \Delta$, $\Delta' \cap \Delta'' = \Delta_0$ と置く. そして Δ の近傍に正則函数 $\Phi(x)$ と 正則函数の有限個の組 $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ を考え, A'_1 $(i = 1, 2, \ldots, p)$ を Δ' の近傍における正則函数として, 関係式

$$\Phi = A'_1 F_1 + A'_2 F_2 + \cdots + A'_p F_p$$

が成り立つとし, Δ'' に対しても同様の関係式

$$\Phi = A''_1 F_1 + A''_2 F_2 + \cdots + A''_p F_p$$

が成り立つとする. さらに Δ_0 の近傍において函数方程式

$$A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_p F_p = 0 \tag{4}$$

の形式解で次の性質を満たすものが存在すると仮定する.

1°　核は Δ の近傍で正則な函数よりなる.

2°　方程式の Δ_0 の近傍におけるすべての解は (Δ_0 の近傍でその形式解によって) 大域的に表される.

そうすると, B_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ を Δ の近傍における正則函数函数として, Φ は

$$\Phi = B_1 F_1 + B_2 F_2 + \cdots + B_p F_p$$

と表される.

実際,

$$A_i = \sum C_{ij} \pi_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1, 2, \ldots, N) \tag{5}$$

(C) の間の或る等式を伴う.

を上記の性質を持つ形式解とし, 函数

$$\gamma_i = A'_i - A''_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

を考える. これらは Δ_0 の近傍で正則であり, そこで方程式 (4) を満たす. したがって, γ_i は Δ_0 の近傍で大域的に (5) の形で表される. それを

$$\gamma_i = \sum d_{ij} \pi_{ij}$$

とする. d_{ij} は或る正則函数である.

Δ_0 は筒状であるから, Cousin 積分によって Δ' における正則函数 a_{ij} と Δ'' における正則函数 b_{ij} を, 恒等的に

$$a_{ij} - b_{ij} = d_{ij}$$

となるように求めることができる. さらに函数 (d_{ij}) は形式解 (5) に要請されている等式を満たすから (a) も (b) もそうであるように (a, b) を求めることができる. それで

$$\alpha_i = \sum a_{ij} \pi_{ij}, \qquad \beta_i = \sum b_{ij} \pi_{ij}$$

と置くと

$$\alpha_i - \beta_i = \gamma_i$$

が得られる. さらに (5) は Δ_0 の近傍における方程式 (4) の形式解であるから, 恒等的に

$$\sum \alpha_i F_i = 0, \qquad \sum \beta_i F_i = 0$$

であり, さらに核 (π) は Δ の近傍での正則函数よりなるから, 函数 (α) は Δ' の近傍で正則であって, そこで方程式 (1) を満たす. (β) についても同様である.

ここで

$$B'_i = A'_i - \alpha_i, \quad B''_i = A''_i - \beta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

と置く. 函数 (B') は Δ' の近傍で正則であり, (B'') は Δ'' に対してそうである. そして Δ' の近傍で

$$\Phi = B'_1 F_1 + B'_2 F_2 + \cdots + B'_p F_p$$

であり, Δ'' の近傍で

$$\Phi = B''_1 F_1 + B''_2 F_2 + \cdots + B''_p F_p$$

である．ところで

$$B_i' - B_i'' = (A_i' - A_i'') - (\alpha_i - \beta_i) = \gamma_i - \gamma_i = 0$$

であるから, すべての i に対して函数 B_i', B_i'' は Δ におけるただ一つの函数 B_i の部分にすぎない． C.Q.F.D.

4° H. Cartan の定理の応用.

補題 3. 補題 2 の幾何学的状勢の下で, 共通部分 Δ_0 は単連結であり, すべての問題 (C_1) はその近傍で解けるとする (concevons). そして Δ の近傍で p 個の恒等的零ではない正則函数 F_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ とそれに対応する問題 (λ) を考え, 問題 (λ) は Δ' および Δ'' の近傍で解けると仮定する．このとき, 問題 (λ) は Δ の近傍で解ける.

この補題の結論の下で, 補題 1 により, 方程式 (1) の形式解を, 補題 2 で指定された性質を持つように求めることができる.

この命題 [訳注. 補題 3] を p に関する数学的帰納法で証明しよう．$p = 1$ に対しては, 問題 (λ) でただ一つのイデアル $(I_1) = (0)$ しかない．したがってそれは初めから解けており, 命題は正しい．それで $1, 2, \ldots, p-1$ に対して命題は正しいと仮定して p の場合を考える (envisageons).

$(\Phi_1', \Phi_2', \ldots, \Phi_q')$ を Δ' の近傍における (I_1) の擬底で, 各 Φ_i' はそこで大域的に (I_1) に属する様なものとし, $(\Phi_1'', \Phi_2'', \ldots, \Phi_r'')$ を Δ'' に対するそれとする．函数系 (Φ'), (Φ'') は Δ_0 の近傍のすべての点で同等であり, すべての問題 (C_1) は Δ_0 に対して解ける．さらに Δ_0 は単連結である．それで, Cartan の定理により, Δ の 近傍における正則函数の系 $(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_s)$ を, Δ' においては大域的に $(\Phi) \sim (\Phi')$ であり Δ'' においては大域的に $(\Phi) \sim (\Phi'')$ となるように求める.

Φ_i' $(i = 1, 2, \ldots, q)$ は Δ' の近傍で大域的に (I_1) に属するから, そこで大域的に

$$\Phi_i' F_1 \equiv 0 \mod (F_2, F_3, \ldots, F_p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, q)$$

となり, したがって $\Phi_i F_1$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ に対しても同様である．Δ'' に対してもそうである．さて函数方程式

$$A_2 F_2 + A_3 F_3 + \cdots + A_p F_p = 0$$

は $p - 1$ の場合であるから, Δ_0 の近傍で補題 2 で指定された性質を持つ形式解を持つ．したがってこの補題から Δ の近傍で大域的に

$$\Phi_i F_1 \equiv 0 \mod (F_2, F_3, \ldots, F_p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

となり, すなわち Φ_i はそこで大域的に (I_1) に属する.

上の性質を持つ函数系 (Φ) は Δ' の近傍で $(\Phi) \sim (\Phi')$ であるから, そこにおける (I_1) の擬底を与える. Δ'' に対しても同様である. したがって (Φ) は Δ の近傍における (I_1) の擬底である. Δ に対する問題 (λ) で (I_1) に関する部分はこのようにして解ける. 残りは仮定により解けている. それでこの命題は正しい.

4. 諸問題の局所問題 (K) への帰着. x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ 平面上に閉円 $(\overline{C}_i)$ を描き, $(\overline{C}_i)$ を成分とする閉多円筒 $(\overline{C})$ を考える.

E_0 によって閉多円筒 $(\overline{C})$ に含まれる任意の点を表す.

次に変数 x_n を実部と虚部に分けて $x_n = X + iY$ (i は虚数単位) とし,

$$x_i = x_i^0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \quad Y = Y^0$$

なる形の直線を描く. x_i^0 は複素数値であり, Y^0 は実数値である. そしてこの直線の閉多円筒 $(\overline{C})$ 上の部分を E_1 と表す. E_1 は一般には線分であるが, 点になることもある.

同様に順次実次元を大きくしていって $E_2, E_3, \ldots$ を考え (concevons), E_{2n} に至る. 例えば, E_2 は, x_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ 平面上の成分は $(\overline{C_i})$ の点であり, x_n 平面上の成分は $(\overline{C}_n)$ であるような閉筒状集合であり, E_{2n} は閉多円筒 $(\overline{C})$ を意味する.

この幾何学的状況に3節の補題を適用し, 問題 (K) が常に解けるという条件の下で, 問題 (C_1), (λ) を $E_0, E_1, E_2, \ldots, E_{2n}$ に対して順次解こう.

E_0 の場合. 点の近傍では, 問題 (C_1) は初めから解けている. 問題 (λ) は仮定により解けている.

E_1 の場合. 集合 E_1 の任意の一つを考え, その集合を同じ記号 E_1 で表す. これは実際に線分であると仮定しておいてもよい.

1° 集合 E_1 の近傍における, 恒等的には零でない正則函数 $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_p(x)$ を考えると, それに関する問題 (λ) は E_1 の各点では解けている.

集合 E_1 は筒状集合であり, それの空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ 上の成分は点である. それを Q と表す. また x_n 平面上の成分は線分であり, それを l と表す. l は水平である. その左端を m_0 と表し 右端を m_q と表す. そしてその線分上に, 左から右へ $q-1$ 個の点 $m_1, m_2, \ldots, m_{q-1}$ を挿入して, 閉線分 (m_{i-1}, m_i) を l_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$ と表し, 空間 (x) における筒状集合 (Q, m_i) を M_i と表し, さらに線分 (Q, l_i) を L_i と表す. そして

$$L_1 \cup L_3 \cup L_5 \cup \cdots = \Delta_1,$$
$$L_2 \cup L_4 \cup L_6 \cup \cdots = \Delta_2$$

と置く．そうすると

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 = E_1,$$
$$\Delta_0 = \Delta_1 \cap \Delta_2 = M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_{q-1}$$

となる．

さて (F) に関する問題 (λ) は E_1 のすべての点で解けるから, 全ての線分 L_i が十分小さくなると, この問題はそれらの各々の近傍で解けるようになる．(これは Borel-Lebesgue の補題により明らかである) したがって Δ_1 および Δ_2 に対して解ける．他方問題 (C_1) は Δ_0 に対して解けるから, 補題 3 により, 問題 (λ) は E_1 に対して解ける．(F) と E_1 は任意だからすべての問題 (λ) はすべての E_1 の近傍で解ける.

2°　次に問題 (C_1) を見よう (envisageons)．一つのきまった集合 E_1 を考え, E_1 の近傍における正則函数 $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ および $f(x)$ を考えて, $(F), (f)$ および E_1 に対応する問題 (C_1) を考える． この問題 (C_1) は問題 (λ) のときと同様に E_1 の任意の点の近傍で解けているから $\Delta_1, \Delta_2, \Delta$ および Δ_0 を, 問題 (C_1) が Δ_1 と Δ_2 の近傍で解けるように描くことができる． さて, 函数 (F) に関する問題 (λ) はすでに見たように集合 E_1 に対して解ける． またすべての問題 C_1 は 共通部分 Δ_0 に対して解ける． したがって補題 1 により, 補題 2 で指定された性質を持つ, (F) に対応する形式解が得られる． そしてその補題により問題 (C_1) は集合 E_1 に対して解ける． (F) と E_1 は任意であるから, すべての問題 (C_1) はすべての集合 E_1 の近傍で解ける.

E_2 の場合．　繰り返そう.

1° 問題 (λ)．　一つの E_2 を考え, それの空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ 上の成分を Q と表す．x_n 平面上の成分は $(\overline{C}_n)$ である．そして集合 E_2 の近傍で, 恒等的零ではない正則函数 $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_p(x)$ とそれに対応する問題 (λ) を考える．この問題は E_2 に含まれるすべての E_1 に対してはすでに解けている.

閉円 $(\overline{C_n})$ の下端と上端の間に $q-1$ 個の水平な直線を描いて $(\overline{C_n})$ を q 個の閉集合に分け, それらを下から上へ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ と表す． そして空間 (x) における閉筒状集合 (Q, α_i) $(i = 1, 2, \ldots, q)$ を A_i と表わし

$$A_1 \cup A_3 \cup A_5 \cup \cdots = \Delta_1,$$
$$A_2 \cup A_4 \cup A_6 \cup \cdots = \Delta_2$$

と置く．そうすると

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 = E_2$$

であり, 共通部分 $\Delta_0 = \Delta_1 \cap \Delta_2$ は有限個の集合 E_1 よりなる.

(F) に関する問題 (λ) は E_2 の任意の E_1 の近傍で解けるから, E_2 を十分狭く分割すると, この問題は各 A_i の近傍で解けるようになり, したがって Δ_1 と Δ_2 に対してそうなる. (この証明は例えば Borel-Lebesgue の補題に帰着さすことができる.) すべての問題 (C_1) はすべての E_1, したがって Δ_0 に対して解けるから, 補題 3 により問題 (λ) はこの集合 E_2 に対して解ける. この (F) と E_2 は任意であるから, すべての問題 (λ) はすべての E_2 の近傍で解ける.

2° 問題 (C_1). 一つの E_2 とその E_2 の近傍における問題 (C_1) を取り上げる. 上の幾何学的状勢を, 問題 (C_1) は Δ_1 と Δ_2 の近傍ですでに解けているように取れる. 対応する問題 (λ) は Δ に対して解けており, すべての問題 (C_1) は Δ_0 に対して解けるから, 補題 1,2 により問題 (C_1) は E_2 に対して解ける. この (C_1) と E_2 は任意であるから, 問題 (C_1) は E_2 の近傍で常にとける.

このように続けていって, しまいに次の結論に達する. すなわち 問題 (C_1), (λ) は問題 (K) が解ける限り, 閉多円筒の近傍で常に解ける. このことから直ちに次の中間結果が得られる.

閉多円筒の近傍における問題 $(\mathrm{C}_1), (\mathrm{C}_2)$, (E) および (L) は, 問題 (K) が解ける限り常に解ける.

5. 剰余の定理. 次の補題を準備 (se fournir) しよう.

剰余の定理. 空間 $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ において $[D, (C)]$ の形の領域を考える. D は空間 (x) の領域 (単葉有限) であり, (C) は y 平面の円である. $[D, (C)]$ 内に正則函数 $F(x, y)$ を考え (concevons), D のすべての点 (x^0) に対して方程式 $F(x^0, y) = 0$ は (C) 内に λ 個の根 [訳注. 重複度を込めて数える. 以下同様] を持つとする. λ は (x^0) によらない有限の数である. このとき $[D, (C)]$ におけるすべての正則函数 $f(x, y)$ はそこで

$$f(x, y) = f_0(x, y) + \varphi(x, y)F(x, y)$$

の形に表わされる. $f_0(x, y)$ と $\varphi(x, y)$ は正則函数であり, 特に f_0 は y に関する多項式で, もし $\lambda = 0$ なら恒等的に零であり, そうでなければ y に関する高々 $\lambda - 1$ 次の多項式である. さらにこの表現は一意的である.

f_0 の一意性を確かめることから始めよう. もし $\lambda = 0$ なら $f_0 = 0$ である. それで, $\lambda > 0$ と仮定する. この場合, もし f_0 と f'_0 とが得られたとすると, 恒等的に

$$(f_0 - f'_0) - (\varphi - \varphi')F = 0$$

が得られる. φ と φ' は $[D,(C)]$ における正則函数である. ところで, D の点 (x^0) に対して方程式 $F(x^0,y)=0$ は (C) 内に λ 個の零を持つ. したがって, もし $f_0-f_0'=\psi$ と置くなら, 方程式 $\psi(x^0,y)=0$ は (C) 内に少なくとも λ 個の零を持たなければならない. 他方 ψ は y に関して高々 $\lambda-1$ 次の多項式であるから, それは恒等的に零である. すなわち $f_0=f_0'$ である.

$F(x,y)$ の形に注目しよう (envsagerons). D 内に任意に点 ξ を取る. (x) を (ξ) の或る近傍内に取り, y を (C) 内に取ると, Weierstrass の予備定理により

$$F(x,y)=\omega(x,y)F_0(x,y)$$

が得られる. ここで ω と F_0 は正則函数で, ω は決して零を取らず,

$$F_0=y^\lambda+\alpha_1(x)y^{\lambda-1}+\cdots+\alpha_\lambda(x)\quad(\lambda\geq 0)$$

である. $\alpha_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,\lambda)$ は正則函数である. さて F_0 のこの表現は明らかに (visiblement) 一意的だから, それは $[D,(C)]$ に対して大域的に成り立つ. [訳注. 以下, F の代わりに F_0 を使うというのである.]

方程式 $F(x^0,y)=0$ は (C) 内に常に同じ個数 (有限) の根を持つと仮定したが, この独特な (particulière) 条件を検討しよう.

複素 2 変数 x,y の空間で $F=y-x$, $f(x,y)=f(y)$ を考え, $f(y)$ は円 $|y|<1$ をその固有な正則域とする 1 変数 y のみの正則函数とする. (C) としてその円を選ぶと, 条件は $|x|<1$ に対してしか成り立たない. そこで D を, 円 $|x|<1$ の外へも内へも拡がっているような, x 平面上の領域 (連結) とし, f_0 を x のみの正則函数として, $[D,(C)]$ に対して, 式

$$f(y)=f_0+\varphi\cdot(y-x)$$

が得られたと仮定する. そうすると $x=y$ に対して恒等的に

$$f(y)=f_0(y)$$

となり, $f(y)$ の正則域のあり方に反する.

したがってこの条件は省けない. これは解析函数の分野で 1 変数の分野 (portion) から離れたときに出会う奇妙な現象の一つである.

1 変数の場合を見よう (envisageons). このときは $F(x,y)$ と $f(x,y)$ が一つの変数 y だけの函数である場合というだけのことであるから, 上記の条件は満たされている. したがって, この定理は (もし多変数のときに正しければ) この場合も成り立つ.

さて, この命題を証明しよう.

$$F = y^{\lambda} + \alpha_1(x)y^{\lambda-1} + \cdots + \alpha_{\lambda}(x) \quad (\lambda > 0)$$

と仮定する. $\alpha_i(x)$ は D における正則函数であり, (C) は $|y| < 1$ で与えられている. そうすると, β_i $(i = 0, 1, 2, \ldots,)$ を D における変数 (x) の正則函数として,

$$f = \beta_0 + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \cdots + \beta_m y^m + R_m,$$

$$R_m = \beta_{m+1}y^{m+1} + \beta_{m+2}y^{m+2} + \cdots$$

が得られる. したがって $[D, (C)]$ において

$$(1) \qquad f(x, y) = A_m(x, y)F(x, y) + B_m(x, y) + R_m(x, y)$$

と表わされる. $A_m(x, y)$ と $B_m(x, y)$ は正則函数であり, 特に $B_m(x, y)$ は y に関する高々 $\lambda - 1$ 次の多項式である. それを

$$B_m(x, y) = \gamma_1^{(m)}y^{\lambda-1} + \gamma_2^{(m)}y^{\lambda-2} + \cdots + \gamma_{\lambda}^{(m)}$$

と表す. $\gamma_i^{(m)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \lambda)$ は D における (x) の正則函数である. ここで, m が無限に大きくなったときの, 列 $B_m(x, y)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ の動向が問題である. 以下, 下付けの m は, それを固定して考えるときは, 省く.

領域 D の定点 (x) に対し, 方程式 $F(x, y) = 0$ は円 (C) 内に λ 個の根 $y_1, y_2, \ldots, y_{\lambda}$ を持つ. それで, 式 (1) の y に, 根 y_i $(i = 1, 2, \ldots, \lambda)$ を代入して

$$f(x, y_i) - R(x, y_i) = B(x, y_i)$$

が得られる. これを簡単に B_i と表す. そうすると

$$\gamma_1^{(m)}y_i^{\lambda-1} + \gamma_2^{(m)}y_i^{\lambda-2} + \cdots + \gamma_{\lambda}^{(m)} = B_i \quad (i = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

が得られる. このようにして λ 個の未知数 $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{\lambda})$ に関する λ 個の方程式が得られた.

行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1^{\lambda-1} & y_1^{\lambda-2} & \cdots & 1 \\ y_2^{\lambda-1} & y_2^{\lambda-2} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{\lambda}^{\lambda-1} & y_{\lambda}^{\lambda-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

および, Δ の p 列を $(B_1, B_2, \dots, B_\lambda)$ $(p = 1, 2, \dots, \lambda)$ で置き換えた行列式 Δ_p を考える. 例えば

$$\Delta_\lambda = \begin{vmatrix} y_1^{\lambda-1} & y_1^{\lambda-2} & \cdots & B_1 \\ y_2^{\lambda-1} & y_2^{\lambda-2} & \cdots & B_2 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ y_\lambda^{\lambda-1} & y_\lambda^{\lambda-2} & \cdots & B_\lambda \end{vmatrix}$$

である.

先ず, $F(x, y)$ は重複因子を持たないと仮定する. そうすると解析集合 (variété analytique)

$$F(x, y) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = 0$$

は複素 $(n-1)$ 次元である. さらに F の形から, その集合の (x) 空間への射影 S (すなわち y' を適当な値として, (x', y') がその集合に属するような (x') の集合) は D における解析面である. [訳注. F は (C) の境界の近傍に零点を持たない.] そうすると, S 以外の D の任意の点 (x) に対しは, 方程式 $F(x, y) = 0$ の根 y_i $(i = 1, 2, \dots, \lambda)$ はすべて異なるから, その点で $\Delta \neq 0$ である. したがって

$$\gamma_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \qquad (i = 1, 2, \dots, \lambda) \tag{2}$$

である.

m を無限に大きくしたときの $\gamma_i^{(m)}(x)$ $(i = 1, 2, \dots, \lambda)$ の絶対値を評価しよう. 先ず, D に含まれ, S の点を一つも含まない, それ以外は任意の閉集合 E を考える. 行列式 Δ は m によらず, その絶対値は E 上零ではない下限を持つ. $\Delta_i^{(m)}$ については, 函数 $B^{(m)}(x, y_i)$ $(i = 1, 2, \dots, \lambda)$ の絶対値は, E 上 m によらない上限を持つから, $\Delta_i^{(m)}$ についてもそうである. したがって式 (2) により, $\gamma_i^{(m)}(x)$ も同様に m によらない上限を持つ. 次に, D 内の任意の閉集合 E' を考える. S は解析面であるし, $\gamma_i^{(m)}(x)$ は正則函数だから E における結果から E' に対しても明らかに同じ結果が得られる. [訳注. 5]

したがって, 函数の列 $B_m(x, y)$ $(m = 0, 1, 2, \dots)$ は D における正規族をなす. $B_{p_i}(x, y)$ $(i = 1, 2, \dots)$ を極限函数 B_0 を持つ部分列とする. それは D における変数 (x, y) の正則函数であり, 高々$\lambda - 1$ 次の y に関する多項式である. しかも式 (1) により,

$$f = A_{p_i} F + B_{p_i} + R_{p_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, p)$$

が得られるが, i が無限に大きくなると, B_{p_i} は B_0 に収束し, R_{p_i} は零に収束するから A_{p_i} も $[D,(C)]$ で極限函数 $A_0(x,y)$ に収束する. それは有理型であり, しかも $F=0$ となる点以外ではたしかに正則である. A_{p_i} は $[D,(C)]$ で正則だから $A_0(x,y)$ も $[D,(C)]$ で正則である. (上と同じ議論によって, または正規族の定理によって). それで, $F(x,y)$ が重複因子を持たないときは求める式

$$f(x,y)=B_0(x,y)+A_0(x,y)F(x,y)$$

が得られる.

次にそうでない場合 [訳注. すなわち $F(x,y)$ が重複因子を持つ場合] を考える (envisageons). t を複素変数として

$$\Phi(x,y,t)=F(x,y)+t \qquad |t|<\rho$$

を考える (concevons). 函数 Φ は明らかに重複因子を持たず,

$$\Phi(x,y,t)=y^\lambda+a_1(x,t)y^{\lambda-1}+\cdots+a_\lambda(x,t) \quad (\lambda>0)$$

なる形をしている. 方程式 $\Phi(x',y,t')=0$ の根の数については, $D'\Subset D$ であるような, それ以外は任意の有界領域 D' が与えられたとき, ρ を十分小さく取れば, $(x')\in D'$, $|t|<\rho$ であるようなすべての (x',t') に対して, (C) 内の根の数は λ である. 即ち, 函数 $\Phi(x,y,t)$ は $[(x)\in D', |t|<\rho, |y|<1]$ に対して命題の条件を満たし, さらに重複因子がない. したがって, 上で見たことから, 恒等的に

$$f(x,y)=G(x,y,t)+H(x,y,t)\Phi(x,y,t)$$

が成り立つ. G と H は正則函数であり, 特に G は y に関する高々$\lambda-1$ 次の多項式である.

$t=0$ と置いて

$$f(x,y)=G(x,y,0)+H(x,y,0)F(x,y,)$$

が得られる. これは $[D',(C)]$ における求める式である. D' は任意であるし, f の表現は一意的であるから, この式は $[D,(C)]$ でも成り立つ.

C.Q.F.D.

6. 局所問題 (K) の解決. いよいよ問題 (K) に取り組もう (se dévouerons).

1° 有限個の複素変数の有限空間 (E) において, 領域 D, D における恒等的零ではない p 個の正則函数 $F_1,F_2,\ldots,F_p$, および D の任意の点 P を考える. それで (F) の P における問題 (K) である.

函数方程式

$$A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_pF_p = 0 \tag{1}$$

は P において (すなわち P の近傍において) 形式解

$$A_i = C_{i1}\pi_{i1} + C_{i2}\pi_{i2} + \cdots + C_{iN}\pi_{iN} \tag{2}$$

(C) の間の或る等式を伴う

を持つと仮定する. ここでさらに C_{1i} $(i = 1, 2, \ldots, N)$ はすべて異なると仮定する. もしそうでないなら, そうなるように表現を修正することができる. その状況のもとで, $C_{11} = 1$ とし, 他のすべての C_{ij} を零とすると $A_1 = \pi_{11}$ が得られる. したがって 函数 π_{11} は P でイデアル (I_1) に属する. 他の π_{1i} $(i = 1, 2, \ldots, N)$ に対しても同様である. さらに, P で (I_1) に属するすべての函数 A_1 に対し, そこで $(A_1) \subset (\pi_{11}, \pi_{12}, \ldots, \pi_{1N})$ が得られる. したがって, 函数系 $(\pi_1) = (\pi_{11}, \pi_{12}, \ldots, \pi_{1N})$ はイデアル (I_1) の擬底を与える. すなわち問題 (K) は解ける. それで次の問題を考える.

問題 (μ) 　領域 D の点 P の近傍における函数方程式 (1) の形式解を求めること.

今見たことから, 問題 (μ) を解きさえすればよい. それで以下この形の問題のみを扱う.

2° 　複素 1 次元の空間 (E) で見よう (observons). 空間 (E) は複素変数 x によって描かれると考え, 点 P は原点に持って来てると考える. 函数 $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_p(x)$ の中に原点で零にならないものがあるとし, 例えば

$$F_p(0) \neq 0$$

とすると, 方程式 (1) の原点における形式解として

$$\begin{cases} A_i = C_i & (i = 1, 2, \ldots, p-1), \\ A_p = \dfrac{-1}{F_p}(C_1F_1 + C_2F_2 + \cdots + C_{p-1}F_{p-1}) \end{cases}$$

が得られる.

それで

$$F_1(0) = F_2(0) = \cdots = F_p(0) = 0$$

と仮定する. この場合, 容易に分かる様に, すべての函数 $F_i(x)$ は原点で x^m で割れ, それらの中に少なくとも一つ, 例えば $F_p(x)$, は x^{m+1} では割れないとなるような数 m が存在する. この場合, 形式解は上記のままの形で得られる.

問題 (μ) はこのように複素 1 次元の (E) に対しては解ける. それでこの問題が n 以下の次元の (E) に対して解けることを仮定して, $n+1$ 次元の (E) に対して解けばよい.

3° 空間 (E) を $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ で表わし, 点 P を原点に持って来る. そして

$$F_i(0, y) \not\equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

とする. [訳注. 座標系をこうなるように取るのである.] 方程式 $F_i(0, y) = 0$ は $y = 0$ に対して λ_i $(\lambda_i \geq 0)$ 個の根を持つ. その λ_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ の中にもし零があれば, 例えば $\lambda_p = 0$ なら, $F_p(0, 0) \neq 0$ である. このときは, 函数方程式 (1) は原点で $n = 1$ の場合と同じ形の形式解を持つ. それで ≪ $\lambda_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ であり, 簡単のため $\lambda_p = \lambda$ と置いて, $\lambda_i \leq \lambda$ $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$ と仮定する.≫

y 平面の原点を中心とした小さな円 (C') を描き, (C') に対応して空間 (x) に, 原点を中心とする十分小さい多円筒 (C) を描く. $F_i(x, y)$ は多円筒 $[(C), (C')]$ で正則であり, さらに, Weierstrass の予備定理によって, その多円筒で

$$F_i(x, y) = \Omega_i(x, y)\Phi_i(x, y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$
$$\Phi_i(x, y) = y^{\lambda_i} + a_{i1}(x)y^{\lambda_i - 1} + \cdots + a_{i\lambda_i}(x)$$

と表わされる. $a_{ij}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, \lambda_i)$ は正則函数であり, $\Omega_i(x, y)$ は零を取らない正則函数である. そしてさらに ≪ (C) のすべての固定した (x') に対し, 方程式 $\Phi_i(x', y) = 0$ は (C') 内に λ_i 個の根を持ち, したがって (C') の外およびその周上には一つも根を持たない.≫ [訳注. そうなるように $[(C), (C')]$ を描くのである.]

函数方程式

$$\text{(A)} \qquad B_1\Phi_1 + B_2\Phi_2 + \cdots + B_p\Phi_p = 0$$

を考える. (B) は未知函数である. 方程式 (1) の形式解を (2) とすると, 方程式 (A) は原点で

$$\text{(B)} \qquad B_i = \Omega_i(C_{i1}\pi_{i1} + C_{i2}\pi_{i2} + \cdots + C_{iN}\pi_{iN}) \quad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

(C) の間に (2) と同じ等式を伴う

の形の形式解を持つ.

実際, 原点の或る近傍の点 Q における方程式 (A) の任意の解 $[B(x, y)]$ を考えると, $F_i = \Omega_i\Phi_i$ だから, $A_iF_i = (A_i\Omega_i)\Phi_i$ であり, したがって函数系 $(B_1/\Omega_1, B_2/\Omega_2, \ldots, B_p/\Omega_p)$ は Q において方程式 (1) を満たす. す

なわちそれは Q で, 式 (2) で表わされる. したがって, 函数系 (B) は Q において式 (B) で表わされる. 逆に, 原点の近傍の点 Q で正則な, それ以外は任意の函数の組 (C) を考え, 式 (B) によって函数系 (B) を考えると, 函数系 $(B_1/\Omega_1, B_2/\Omega_2, \ldots, B_p/\Omega_p)$ は Q において方程式 (1) を満たす. $(B_i/\Omega_i)F_i = B_i\Omega_i$ だから, 系 (B) は Q において方程式 (A) を満たす. したがって表現 (B) は原点における方程式 (A) の形式解を与える.

上の議論で, 方程式 (1) と (A) は明らかに可逆的である. したがって, 原点における問題 (μ) を方程式 (1) に対して解くためには, それを方程式 (B) に対して解けばよい.

4° それで函数方程式

$$A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_pF_p = 0 \tag{1}$$

において, 函数 $F_1, F_2, \ldots, F_p$ は多円筒 $[(C), (C')]$ に関して $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$ と同じ性質を持つと仮定する. [訳注. すなわち F_j はすべて多円筒 (C) における正則函数を係数とする y の多項式であって, その次数 λ_j は $\lambda_j \leq \lambda$, $\lambda_p = \lambda$ である.] 我々の目標は上の方程式 (1) の原点の近傍における形式解

$$A_i = C_{i1}\pi_{i1} + C_{i2}\pi_{i2} + \cdots + C_{iN}\pi_{iN} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{2}$$

(C) の間の或る等式を伴う

である.

多円筒 $[(C), (C')]$ の或る点 (x^0, y^0) における方程式 (1) の解 (A) を考える. y^0 を中心とする小さい円 (γ') を (C') 内に描き, さらに (γ') に対応して (x^0) を中心とする十分小さい多円筒 (γ) を描く. 函数 $A_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ は多円筒 $[(\gamma), (\gamma')]$ で正則であり, (γ) の点 (x') に対して方程式 $F_p(x'y) = 0$ は (γ') 内に同一個数 μ $(0 \leq \mu \leq \lambda)$ の根を持つ. [訳注. そうなるように $[(\gamma), (\gamma')]$ を描くのである.] そうすると, 剰余の定理を使って, $[(\gamma), (\gamma')]$ に対して

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} A_i = A_i^0 + \alpha_i F_p & (i = 1, 2, \ldots, p-1) \\ A_p = A_p^0 - (\alpha_1F_1 + \alpha_2F_2 + \cdots + \alpha_{p-1}F_{p-1}) \end{cases}$$

が得られる. ここで A_p^0 はこのように置かれたものであり, A_i^0 と α_i $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$ は (x, y) の正則函数であって, 特に A_i^0 は, もし $\mu = 0$ なら恒等的に零, $\mu > 0$ なら y に関する高々 $\mu-1$ 次の多項式である. したがって A_p^0 は $[(\gamma), (\gamma')]$ における正則函数である. 函数系 (A) は (x^0, y^0) における解なのだから, このように選ばれた函数系 (A^0) も $[(\gamma), (\gamma')]$ に

おける方程式 (1) の解を与える. A_i^0 $(i=1,2,\ldots,p-1)$ は y に関する多項式であり, A_p^0 に対しては,

$$A_p^0F_p=\Phi,\quad \Phi=-(A_1^0F_1+A_2^0F_2+\cdots+A_{p-1}^0F_{p-1})$$

と表わされるから, A_p^0 は y の有理函数ではある.

さて, (x) が (γ) 内にあり, y が (γ') の周 γ' 上にあるとき, 函数 $F_p(x,y)$ は零にならない. それで, もし $\lambda>\mu$ なら, それは

$$F_p=F'\cdot F''$$

のように分解する.[訳注. この分解がこの研究の核心である.] ここで F' と F'' は y に関する多項式で, その係数は (γ) における変数 (x) の正則函数であり, 特に y の最高次の係数は 1 である. そして (x') を (γ) 内の任意の点とするとき 方程式 $F'(x',y)=0$ は円 (γ') の中にしか根を持たず, 方程式 $F''(x',y)=0$ はその円の外にしか根を持たない. $\lambda=\mu$ のときは $F'=F_p$, $F''=1$ と考える (concevons). そうすると, $A_p^0(x,y)$ は $[(\gamma),(\gamma')]$ 内では正則なのであるから, 函数 $\Phi(x,y)$ は $F'(x,y)$ で割れる. それで

$$\text{(B)}\qquad B_i=F''A_i^0\qquad (i=1,2,\ldots,p)$$

と置く. そうすると B_p は $(x)\in(\gamma)$ で正則な y に関する多項式になる. [訳注. F' の最高次の係数は 1 である.] 他の B_i についてはもともとそうである. 函数系 (B) は $[(\gamma),(\gamma')]$ に対して, したがって $(x)\in(\gamma)$ に対して方程式 (1) を満たす.

もう一度

$$\text{(C)}\qquad \begin{cases} B_i=B_i^0+\beta_iF_p & (i=1,2,\ldots,p-1),\\ B_p=B_p^0-(\beta_1F_1+\beta_2F_2+\cdots+\beta_{p-1}F_{p-1}) \end{cases}$$

と置く. B_i^0 と β_i $(i=1,2,\ldots,p-1)$ は $(x)\in(\gamma)$ で正則な y の多項式であり, 特に B_i^0 は高々 $\lambda-1$ 次である. したがってこのように置かれた函数 B_p^0 も $(x)\in(\gamma)$ で正則な y の多項式である. さらに, 函数系 (B^0) は $(x)\in(\gamma)$ に対して方程式 (1) を満たすから, B_p^0 は式

$$B_p^0F_p=\Psi,\quad \Psi=-(B_1^0F_1+B_2^0F_2+\cdots+B_{p-1}^0F_{p-1})$$

を満たす. そして $\lambda_i\leq\lambda$ $(i=1,2,\ldots,p)$ だから Ψ は y に関する高々 $2\lambda-1$ 次の多項式であり, したがって B_p^0 も高々 $\lambda-1$ 次である. [訳注. 6]

このようにして, 指定された性質を持つ函数方程式 (1) [訳注. F_j は y の λ_j 次の多項式であって, $\lambda_j\leq\lambda$, $\lambda_p=\lambda$.] が与えられたとき, $[(C),(C')]$

の任意の点 (x^0, y^0) における任意の解 (A) に対して, 点 (x^0, y^0) における, y に関する高々 $\lambda-1$ の多項式よりなる解が対応し, その対応は三つの式 (A), (B) および (C) で与えられる.

三つの式を合わせると

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} A_i = \delta_p B_i^0 + \delta_i F_p & (i = 1, 2, \ldots, p-1) \\ A_p = \delta_p B_p^0 - (\delta_1 F_1 + \delta_2 F_2 \cdots + \delta_{p-1} F_{p-1}) \end{cases}$$

となる. ここで

$$\delta_i = \alpha_i + \frac{\beta_i}{F''}, \qquad \delta_p = \frac{1}{F''}$$

であり, したがって (δ) は $[(\gamma), (\gamma')]$ における正則函数である.

改めて函数方程式 (1) を考え, $[(x) \in (C_0), y \in (C'_0)]$ を原点を中心とし, $[(C), (C')]$ に含まれ, それ以外は任意の多円筒とする. そして θ_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, N')$ を $[(C_0), (C'_0)]$ における変数 (x, y) の正則函数として, 表現

$$\text{(3)} \qquad B_i^0 = C_{i1}\theta_{i1} + C_{i2}\theta_{i2} + \cdots + C_{iN'}\theta_{iN'} \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

(C) の間に或る関係を伴う

を考え, それに対して次のことを仮定する.

1^o　方程式 (1) の解 (B^0) であって, (C_0) 内の点 (x^0) で正則な, y の高々 $\lambda - 1$ の多項式よりなり, それ以外は任意のものを考えると, (B^0) は $(x) = (x^0), y \in (C_0)$ なるすべての点で式 (3) によって表わされる. (ここで函数系 (C) は指定された等式を満たす適当な正則函数である.)

2^o $[(C_0), (C'_0)]$ の点 (x^0, y^0) で正則で, それ以外は任意の函数系 (C) (指定された等式を満たす) を考えると, 対応する函数系 (B^0) は (x^0, y^0) において方程式 (1) を満たす.

この性質を持つすべての表現をさし当たって条件付き形式解と言い, (B^0) を 特殊解と言う. [訳注. 特殊解とは, (3) で与えられる解ではなく, y の高々 $\lambda - 1$ 次の多項式よりなる解のことである.]

さて, 上記の条件付き形式解 (3) が得られたと仮定して, (3) と式 (D) の合成は, δ_i $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$ と $\varepsilon_{ij} = (\delta_p C_{ij})$ $(i = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, N')$ を独立な未知函数と考えて, 方程式 (1) の多円筒 $[(C_0), (C'_0)]$ における (本当の) 形式解を与えることを言おう. [訳注. 7]

実際, その合成は (2) と同じ形になり, その核は $[(C_0), (C'_0)]$ における定まった函数 (F) と (θ) とからなっている. $[(C_0), (C'_0)]$ の或る点 (x^0, y^0) における方程式 (1) の任意の解 (A) を考えると, すでに見たことから, そ

の解はこの合成によって表わされる. 逆に $[(C_0),(C_0')]$ の点 (x^0,y^0) における任意の正則函数 (δ,ε) を考え, この (ε) を (3) の (C) に代入して函数系 (B^0) を作ると, それは (x^0,y^0) で 方程式 (1) を満たす. [訳注. 条件付形式解の条件 (2°)] ところで, この系 (B^0) と, 合成によって函数系 (δ,ε) に対応する系 (A) の間には関係式 (D) の一つがあり, そこでは $\delta_p=1$ である. (B^0) は (x^0,y^0) に対して方程式 (1) を満たすのだから, (A) も同様である. C.Q.F.D.

したがって, 指定された性質を持つ函数方程式 (1) [訳注. F_j は y の λ_j 次の多項式であって, $\lambda_j\leq\lambda$, $\lambda_p=\lambda$.] が原点の近傍で条件付形式解を持つことを言えば十分である. [訳注. 目標は (1) の (本当) の形式解である.]

5^o 函数系 (B^0) を多円筒 (C) の点 (x^0) における方程式 (1) の特殊解とすると,

$$\text{(A)}\qquad B_1^0F_1+B_2^0F_2+\cdots+B_p^0F_p=0$$

である. そして,

$$\begin{cases} B_i^0=\alpha_{i0}y^{\lambda-1}+\alpha_{i1}y^{\lambda-2}+\cdots+\alpha_{i\lambda-1} \\ F_i=f_{i0}y^{\lambda}+f_{i1}y^{\lambda-1}+\cdots+f_{i\lambda}\quad (i=1,2,\dots,p) \end{cases}$$

とする. (α) と (f) は点 (x^0) における変数 (x) の正則函数である. そうすると,

$$\sum B_i^0F_i=\Phi_0y^{2\lambda-1}+\Phi_1y^{2\lambda-2}+\cdots+\Phi_{2\lambda-1}\quad (i=1,2,\dots,p)$$

が得られる. ここで

$$\begin{cases} \Phi_0=\sum\alpha_{i0}f_{i0} \\ \Phi_1=\sum\alpha_{i0}f_{i1}+\sum\alpha_{i1}f_{i0} \\ \Phi_2=\sum\alpha_{i0}f_{i2}+\sum\alpha_{i1}f_{i1}+\sum\alpha_{i2}f_{i0} \\ \quad\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_{2\lambda-1}=\sum\alpha_{i\lambda-1}f_{i\lambda} \end{cases}$$

である. したがって式 (A) は式

$$\text{(B)}\qquad \Phi_0=0,\quad \Phi_1=0,\quad \Phi_2=0,\ \dots,\ \Phi_{2\lambda-1}=0$$

と同等である.

式 (B) の中で (f) は (C) における一定の正則函数である. ここでもし (α) を未知函数とみなすなら, (B) は<u>(同次線形) 連立函数方程式系</u>とな

り, それに対して今考えている函数系 (α) は (x^0) における一つの解を与える. ところで, この連立函数方程式系は空間 (x) で考えられているのであるから, 問題 (μ) は低次元の空間 (E) では解けるという仮定によって, 後に見るように, 多円筒 (C) のすべての点で形式解を持つ.

それで次の仮定を置く. 連立函数方程式系 (B) に対し, ρ_{ijk} を (C) に含まれる或る多円筒 (C_0) における定まった函数として, 表現

$$\text{(C)} \qquad \alpha_{ij}=\sum\beta_{ijk}\rho_{ijk}\ (i=1,\dots,p; j=0,\dots,\lambda-1; k=1,\dots,\nu)$$

(α) の間に或る関係を伴う

が対応し, 次の性質を持つ:

1° (C_0) の任意の点 (x^0) に対する方程式 (B) のすべての解 (α) は (x^0) で式 (C) で表される.

2° (C_0) の任意の点 (x) における正則函数のすべての組 (β) に対し, 対応する函数系 (α) は (x^0) において方程式 (B) を満たす.

B_i^0 に (C) の α_{ij} を代入して

$$\text{(D)} \qquad B_i^0=\sum\beta_{i0k}(\rho_{i0k}y^{\lambda-1})+\sum\beta_{i1k}(\rho_{i1k}y^{\lambda-2})+\cdots$$
$$+\sum\beta_{i(\lambda-1)k}(\rho_{i(\lambda-1)k}) \quad (i=1,2,\dots,p; k=1,2,\dots,\nu)$$

(β) 間に (C) と同じ関係を伴う

が得られる. ここで $(\rho_{ijk}y^{\lambda-1}),\dots$ は (C_0) における定まった正則函数で, 核とみなされるものであり, (β) は未知函数である. [訳注. これが (1) の条件付形式解を与える. 以下はその証明.]

方程式 (1) の特殊解 (B^0) で, その函数は (C_0) の点 (x^0) で正則で, それ以外は任意なものを考える. それは対応する組 (α) が (x^0) において連立方程式系 (B) を満たすと言うことであるから, (α) は (x^0) において式 (C) で表される. したがって (B^0) は (x^0,y) なるすべての点で式 (D) で表される.

逆に $(x^0)\in(C_0)$ なる点 (x^0,y^0) で正則で, それ以外は任意の函数の組 (β) を考え, (D) によって (x^0,y^0) における変数 (x,y) の正則函数系 (B^0) を作り, (B^0) が (x^0,y^0) において方程式 (A) を満たすかどうかを検討しよう. これは明らかに, 同じ函数の組 (β) によって式 (C) から (x^0,y^0) における変数 (x,y) の正則函数系 (α) を作り, その (α) が連立方程式系 (B) を満たすかどうかという問題と同等である. それでその問題に注目しよう. [訳注. ここでの (β) は変数 (x,y) の函数であることに注意.]

式 (C) において, $(y-y^0)$ に関する (β) のべき級数展開を代入して (α) の展開 [訳注. $(y-y^0)$ に関するべき級数展開] が得られ, さらにこの展開を連立方程式系 (B) 内の Φ_i $(i=1,2,\ldots,2\lambda-1)$ に代入して, Φ_i の展開 [訳注. $(y-y^0)$ に関するべき級数展開] が得られる. ところが, それのすべての係数は明らかに恒等的零である. [訳注. その係数は変数 y を含まない函数による式 (C) を Φ_i に代入したものになっている.] したがって Φ_i もそうである.

したがって式 (D) は $[(C_0),(C')]$ に対する函数方程式 (1) の条件付き形式解を与える. それで残っているのは連立函数方程式系 (B) の形式解の存在を示すことだけである.

6^o　新たに空間 (x) において領域 D とそこにおける正則函数 A_{ij} $(i=1,2,\ldots,q; j=1,\ldots,p)$ を考える. (それらの内のどれかが恒等的零でもかまわない.) そして<u>(同次線形) 連立函数方程式系</u>

$$(1)\qquad \begin{cases} A_{11}F_1+A_{12}F_2+\cdots+A_{1p}F_p=0\\ A_{21}F_1+A_{22}F_2+\cdots+A_{2p}F_p=0\\ \cdots\cdots\cdots\\ A_{q1}F_1+A_{q2}F_2+\cdots+A_{qp}F_p=0 \end{cases}$$

(A) 間に或る関係を伴う

を考える. ここで (A) は未知函数である. それらの間には一般にある等式が存在する. (それが無ければその系は孤立した q 個の方程式に帰着する. そしてそれは方程式 (1) が連結かどうかと言う概念を生みだす. しかしそれは我々にとって同じことである.) 方程式 (1) を満たす正則函数のすべての組 (A) (勿論指定された等式を満たす) は<u>解</u>と呼ばれる.

次に, π_{ijk} を D における定まった正則函数とし, C_{ijk} を未定の函数として, 表現

$$(2)\qquad A_{ij}=\sum C_{ijk}\pi_{ijk}\qquad (k=1,\ldots,\lambda)$$

(A) 間の或る関係を伴う

を考え, それに対して次の性質を仮定する.

1^o　D の任意の点 P に対する方程式 (1) のすべての解 (A) は P において式 (2) で表わされる. (P における正則函数の組 (A) を, 指定された等式を満たすように適当に選んで.)

2^o　すべての正則函数の組 (C) (等式は存在する) に対し, (2) によって P における (1) の解 (A) が対応する.

このとき, 表現 (2) を方程式 (1) の<u>形式解</u>と呼ぶ.

問題 (**M**)　<u>D に含まれる閉領域 Δ の近傍における連立函数方程式 (1) の形式解を求めること.</u>

<u>空間 (x) における問題 (M) は, 同じ空間における問題 (λ) が解ける限り, 常に解ける</u>ことを言おう.

実際, 方程式 (1) の始めの r $(r \leq q)$ 個を, その方程式に関与している等式と共に取り出す. これはまた連立函数方程式系である. それを (E_r) と表す.

(E_1) は単独の方程式に過ぎないから, 対応する問題 (M) は仮定によって解ける. それで, 問題 (M) は $(E_1), (E_2), \ldots, (E_r)$ に対しては解けることを仮定して, (E_{r+1}) $(r+1 \leq q)$ に対してそれを解けばよい.

方程式 (E_{r+1}) の最後の式の記号 $A_{r+1,i},\ F_{r+1,i}$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ を新たに $B_i,\ \Phi_i$ と書き換えると,

$$(3)\qquad \begin{cases} A_{11}F_1 + A_{12}F_2 + \cdots + A_{1p}F_p = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ A_{r1}F_1 + A_{r2}F_2 + \cdots + A_{rp}F_p = 0 \\ B_1\Phi_1 + B_3\Phi_2 + \cdots + B_p\Phi_p = 0 \end{cases}$$

(A, B) 間の或る関係を伴う

が得られる.

仮定により, (E_r) は形式解

$$(4)\qquad A_{ij} = \sum C_{ijk}\Psi_{ijk} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \mu)$$

(C) 間の或る関係を伴う

を持つ (Δ の近傍で). それを方程式

$$(5)\qquad B_1\Phi_1 + B_2\Phi_2 + \cdots + B_p\Phi_p = 0$$

に代入する. それをもっと正確に述べよう.

B_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ がすべて異なるとして, B_1 を見る. もし例えば B_1 が (E_r) の中のどの (A) とも無関係なら, 項 $B_1\Phi_1$ はそのまま残す. 次に B_2 を見る. そしてもし例えば $B_2 = A_{11}$ なら, $B_2\Phi_2$ の代わりに

$$\sum C_{11k}(\Psi_{11k}\Phi_2)$$

を置く. すべての B_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ に対してそのようにすると, (5) の代わりに例えば

$$(6)\qquad B_1\Phi_1 + C_{111}(\Psi_{111}\Phi_2) + C_{112}(\Psi_{112}\phi_2) + \cdots = 0$$

のようなものが得られる．それを新たに

$$D_1X_1 + D_2X_2 + \cdots + D_sX_s = 0 \tag{7}$$

と表す．このとき，(D) の間には一般に何らかの関係が定まる．(そして (X) は Δ の近傍における或る定まった正則函数である.)

これは (E_1) の場合であるから，方程式 (7) の形式解 (Δ の近傍における)

$$D_i = \sum \gamma_{ij}\theta_{ij} \qquad (j = 1, \ldots, \nu) \tag{8}$$

(γ) 間の或る関係を伴う

が得られる．

(8) の中で (D) の各々は (B) のどれか，または (C) のどれかである．それで，各 A_{ij} を順に取り出す．[訳注. (3) の形式解における各 A_{ij} の表現を (4) と (8) から求めようというのである.] もし取り出した A_{ij} が $A = B$ の場合でなければ，(4) における表現それ自身を (4) の中にそのまま保存する．そうでない場合は，(4) における A の表現の中に現われる C_{ijk} に，(8) のそれに対応する表現を代入する．[訳注. $A = B$ の場合の場合，(4) におけるそれの表現に現われる C_{ijk} は (8) の中のどれかの D_i になっている.] 次に B_i を順に取り出す．[訳注. 次は (3) の形式解における各 B_i の表現を求めようというのである.] もし (8) の中に B を見つけたら，それをそのまま採用する．そうでなければ その B はどれかの A である．そのときは，上に定めたその A の新しい表現を採用する．そのようにして新しい表現が得られる．それを改めて

$$\begin{cases} A_{ij} = \sum \delta_{ijk}\rho_{ijk} \\ B_i = \sum \delta'_{ik}\rho'_{ik} \end{cases} \tag{9}$$

と表す．ここで (ρ, ρ') は核を意味し，(δ, δ') は未知函数である．それらの間には，一部は (4) から来たもの，もう一つは (8) から来たもの，三番目には新しくできたもの等の等式がある．この表現の性格を良く見てみよう (envisager).

Δ の任意の点 P に対する (3) の或る解 (A, B) を考える．(A) は方程式 (E_r) を満たしているから，P で式 (4) で表わされ，(B) は (5) を満たしているから，もし上記ように式 (D) を作ると，(D) は P で (7) を満たす．したがってその (D) は式 (8) で表わされる．すなわち (A, B) は P で式 (9) で表わされる．

逆に Δ の任意の点 P における正則函数の組 (δ, δ') を考え，(9) によって函数系 (A, B) を作る．先ず (A) に注目する．(A) を表す (9) の部分は,

(4) の中に (8) を代入して作られたものであるから, [訳注. 式 (4) の中の (C_{ijk}) に (8) の中のそれに対応する D_i を代入したもの.] (4) の特別なものに過ぎない. したがって (A) は P で (E_r) を満たす. それで残るのは (B) が P で (5) を満たすことを示すだけである. ところで条件 (7) は条件 (5) の特別な場合であるから, もし (B) が方程式 (7) を満たせば, 方程式 (5) は自動的に満たされる. (9) を良く見よう. これの (B) を表す部分は式

$$B = B = D \quad \text{または} \quad B = A = \sum C\Psi = \sum D\Psi$$

によって (8) の (D) に対応する. さて対応する (D) は明らかに (7) を満たす. したがって (B) は P で (5) を満たす.

このようにして, 表現 (9) は Δ の近傍における方程式 (3) の形式解である. 空間 (x) における問題 (M) はこのように $(E_1), (E_2), \ldots, (E_r)$ に対しては解けるという仮定のもとで (E_{r+1}) に対して解ける.

このように (6^o) に置かれた仮定は解けたので 問題 (K) は常に解ける. したがって閉多円筒の近傍で 問題 $(\mathrm{C}_1), (\mathrm{C}_2), (\mathrm{E}), (\mathrm{L})$ および (M) は解ける.

7. 結論. 繰り返そう.

定理 I. 空間 (x) における閉多円筒 Δ の近傍に正則函数の組 $[F_1(x), F_2(x), \ldots, F_p(x)]$ と一つの正則函数 $\Phi(x)$ が与えられており, Δ のすべての点で $\Phi(x) \equiv 0 \mod (F)$ であるとする. このとき Δ の近傍における正則函数 $A_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ を 恒等的に

$$\Phi(x) = A_1(x)F_1(x) + A_2(x)F_2(x) + \cdots + A_p(x)F_p(x)$$

となるように選ぶことができる. (多円筒とは成分が円であるような筒状集合のことである.)

定理 II. 閉多円筒 Δ の近傍に正則函数の組 $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ が与えられているとき, もし Δ のすべての点 P に対して, P を中心とする多円筒 (γ) と, (γ) における正則函数 $\varphi(x)$ が対応していて, 共通部分 (δ) を持つ隣接した多円筒のすべての対 $\varphi'(x), \varphi''(x)$ に対して, (δ) の全ての点で $\varphi'(x) \equiv \varphi''(x) \mod (F)$ であるなら, Δ の近傍における正則函数 $\Phi(x)$ を, Δ のすべての点 P で $\Phi(x) \equiv \varphi(x) \mod (F)$ となるように見つけることができる.

定理 III. 定理 II と同じ幾何学的状勢の下で, 全ての (γ) に有限個の正則函数の組 (f) が対応しており, すべての対 $(\gamma'), (\gamma'')$ に対し, それらに対応する系 $(f'), (f'')$ が, 共通部分 (δ) のすべての点で同等なら, Δ

の近傍における有限個の正則函数の系 (F) を, Δ のすべての点 P で (F) $\sim (f)$ となるように見つけることができる.

定理 IV. 閉多円筒 Δ の近傍に正則函数 $F_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ が与えられているとき, 函数方程式 $A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_pF_p = 0$ の, Δ の近傍における形式解を見つけることができる. 連立同次線形方程式系に対しても同様である.

我々は閉多円筒に限って来た, そうすれば内在的性格から問題はもっと制限の少ない閉集合に対して解けるからである. 上の定理の他に 5 節では剰余の定理を証明した. この定理に関しては, もし十分な応用を望むなら量的な研究が必要になる.

我々はこのように結果の方を述べたが, 他の側を述べよう, すなわち, 我々は次の問題を得た.

問題 (J). 不定域イデアルに対して局所有限擬底を見つけること.

この問題に対しては私は殆ど何も知らない. この研究のためにどのような態度をとればよいのかも知らない. ただ, 2 節で反例を見たのであるから, 無条件ですべての問題を同時に解くことはできない.

この問題の特別な場合として, 問題 (K)を解いた. これは上の定理を確立するのに不可欠であった. 我々はこの問題にもう一度立ち戻る. そして幾何学的不定域イデアルに対してそれが無条件に解ける事を見るだろう. これは我々にとって, 第 I 論文以来の諸問題を, 分岐点の生じることを許して, 研究するのに不可欠である. この二つの例はこの問題の重要性を物語っている.

(1948 年 7 月 和歌山県紀見村にて、1948 年 10 月 15 日受理)

訳　注

[訳注. 1]　ここで取り扱う問題は解析変換を許容する. したがって, これらの問題が多円筒で解けていれば, 当然, 多円筒と解析的に同値な領域でも解ける. しかしここでは, もっと先を見越して, 多少準備が要るが, 上空移行の原理を応用して, これらの問題を解析多面体で解くことが念頭にあるのであろう.

[訳注. 2]　三つの関係は次のようである.

1. 第 I 論文の定理 II について.
　(x) 空間の多項式による閉解析多面体

$$(\Delta) \qquad |x_i| \le r_i, \quad |P_j(x)| \le 1 \qquad (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, \nu)$$

と, (x, y) 空間における閉多円筒

$$(C) \qquad |x_i| \le r_i, \quad |y_j| \le 1 \qquad (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, \nu)$$

および (C) における解析集合

$$(\Sigma) \qquad y_j = P_j(x) \qquad (j = 1, \ldots, \nu)$$

を考え, (C) における函数系としては

$$F_j(x, y) = y_j - P_j(x) \qquad (j = 1, \ldots, \nu)$$

を考える. このとき, Δ における正則函数 $\varphi(x)$ に対して (C) における問題 (C_2) の分布を

1. Σ の点に対しては, 函数 $\varphi(x)$ とそれが正則であるような多円筒,
2. Σ 外の点に対しては, 函数 1 と Σ の点を含まないような多円筒

とすれば, 問題 (C_2) の条件は満たされる. 若しこの問題の (C) における解 $\Phi(x, y)$ が求まれば, これは第 I 論文の定理 II で得た函数である.

2. 第 II 論文の定理 I について.
　(x) 空間における一般な閉解析多面体

$$(\Delta) \qquad |x_i| \le r_i, \quad |f_j(x)| \le 1 \qquad (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, \nu)$$

と, (x, y) 空間における閉多円筒

$$(C) \qquad |x_i| \le r_i, \quad |y_j| \le 1 \qquad (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, \nu)$$

および (C) における解析集合

$$(\Sigma) \qquad y_j = f_j(x) \qquad (j = 1, \ldots, \nu)$$

を考える. そして問題 (E) の分布を

1. Σ の点に対しては, 函数系 $y_j - f_j(x)$ $(j = 1, \ldots, \nu)$ とそれらが正則であるような多円筒,

2. Σ 外の点に対しては, 函数系として一個の函数 1 と Σ の点を含まないような多円筒

とすれば, 問題 (E) の条件は満たされる. 若しこの問題の (C) における解 $F_k(x, y)$ $(k = 1, \ldots, \mu)$ が求まれば, Σ はそれらの函数の共通零点の集合であるから, 第 II 論文の定理 I は直ちに証明される.

3. 第 V 論文の条件 (β) について.

(x) 空間の領域 D における任意の正則函数 $\chi(x)$ に対し, 局所的には

$$\chi(x) - \chi(x^0) = a_1(x, x^0)(x_1 - x_1^0) + \cdots + a_n(x, x^0)(x_n - x_n^0)$$

を満たす正則函数 $a_i(x, x^0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は存在する. それを大域的に求める問題は, 函数系を $F_j(x, x^0) = x_j - x_j^0$ $(j = 1, \ldots, n)$ としたときの問題 C_1 である.

[訳注. 3] $\gamma \cap \Sigma_0$ の点 P を中心とする或る多円筒 δ における (I) の有限擬底 $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ が存在したとすると, 各 F_j は解析平面 $x = y$ の δ 内の部分で零にならなければならない. そうすると (I) に属する全ての函数もそうでなければならないことになって, 仮定に反する.

[訳注. 4] この部分は H. Cartan により, モジュールの概念を使って整理され, 岡先生も第 IX 論文ではそれに従っておられる. しかし, 岡先生は常に "必要最小限の道具しか使わない" と言っておられた. 目標は "命題を証明すること" ではなく, "数学的自然の状況を解明すること" なのであるが, そのためには, 使う道具はなるだけ単純なものの方が良いというのである.

[訳注. 5] 座標系を適当に取って, 解析面 S はその全ての点で x_n に関して Weierstrass の条件を満たしていると仮定しておく. ρ を正の数とし, S の任意の点 $P\ :\ (x'_1, \ldots, x'_{n-1}, x_n)$ に対して円板

$$(C_P)\ :\ x_i = x_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \qquad |x_n - x'_n| < \rho$$

と円周

$$C_P\ :\ x_i = x_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \qquad |x_n - x'_n| = \rho$$

を考え, $S \cap (C_P) \neq \emptyset$ となる P の全体を S^0 とする. そして

$$(\Gamma) = \bigcup_{P \in S^0} (C_P) \qquad \text{および} \qquad \Gamma = \bigcup_{P \in S^0} C_P$$

と置く．仮定により ρ を充分小さく取ると，$E = E' \cup \Gamma - E' \cap (\Gamma)$ は閉集合であって，D の完全内部に含まれ，S の点を含まない．さらに D における正則函数 f は，もし E で不等式 $|f| \le M$ を満たすなら E' においてもそうである．

[訳注．6]　ここでこの分解を考えることが問題 (K) を解くための要点である．イデアルをモジュールに拡張して，証明が整理されても，この分解が要点であることは変わらない．

問題 (K) の解法は空間の次元に関する帰納法である．それで次元を下げる事が問題になるが，そのために Weierstrass の予備定理と剰余の定理を使って，(x) と y の正則函数である (F) と (A) を一定次数以下の y の多項式に持ち込み，それらの多項式による一つの方程式を考える代わりに，それを一つの y の多項式に纏めて，その係数を零として作られる (x) だけの函数の連立方程式にしようというのである．

その部分を簡単に振り返っておこう．

先ず Weierstrass の予備定理によって (F) を多項式とする．

次に剰余の定理を使い，解の A_i $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$ を F_p で割った余りを A_i^0 とし，残りを A_p に繰り込んで A_p^0 とする．このとき，一般には (すなわち $\mu < \lambda$ の場合)，$F_p(x', y)$ $((x') \in (\gamma))$ は (γ') の外にも零を持つから，多項式 $A_p^0 F_p = \Phi$ は F_p では割れない．しかし $F'(x', y)$ は (γ') 内にしか零を持たない．したがって $A_p^0 F' F'' = \Phi$ は F' でなら割り切れる．それで $B_i = A_i^0 F''$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ と置くと，B_p も多項式であるような解 (B) が得られる．なおそのままでは，B_i の次数は高々 $\mu + \lambda - 1$ としか云えないので，もう一度剰余の定理を使って同じ操作をすると，次数がすべて高々 $\lambda - 1$ となるような解 (B^0) が得られる．

[訳注．7]　δ_i $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$ と $\varepsilon_{ij} = (\delta_p C_{ij})$ $(i = 1, 2, \ldots, p; \jmath = 1, \ldots, N')$ を使った (3) と (D) の合成は

$$
\text{(D)} \quad \begin{cases} A_i = \varepsilon_{i1}\theta_{i1} + \cdots + \varepsilon_{iN'}\theta_{iN'} + \delta_i F_p & (i = 1, 2, \ldots, p-1) \\ A_p = \varepsilon_{p1}\theta_{p1} + \cdots + \varepsilon_{pN'}\theta_{pN'} - (\delta_1 F_1 + \cdots + \delta_{p-1} F_{p-1}) \end{cases}
$$

である．これが (1) の (本当の) 形式解であることを言おうというのである．