SUR LES FONCTIONS ANALYTIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES

VII. SUR QUELQUES NOTIONS ARITHMÉTIQUES.

Par M. Kiyoshi Oka.

Introduction. Nous sommes maintenant en chemin de nous réfléchir éfforcement, en reconnaissant les caractères des difficultés que nous avons rencontrées sur la voie suivie,[1] en observant les figures des difficultés que nous rencontrerons sur le prolongement, et en faisant des autres; et dont nous exposerons ici un des résultats.

On pourra apercevoir des certaines notions arithmétiques au Théorème II du Mémoire I (Lemme fondamental), au Théorème I du Memoire II, et à la condition (β) (condition de A. Weil) du Mémoire V; et on rencontrera une autre, si l'on admet les points de ramification; dont, sans cela, on ne pourra pas traiter même les fonctions algébriques. Ceci nous fait commencer par étudier ces notions.

Supposons quelques notions arithmétiques, la congruence et l'idéal par exemple, transplantés du champ de polynomes à celui de fonctions analytiques; la fonction ne pouvant en général plus se prolonger à tout espace fini, on apercevra des nouveaux problèmes. C'est H. Cartan qui a découvert un phéhomène de cette nature,[2] et dans le présent Mémoire on trouvera, comme conclusion, plusieurs théorèmes et un problème bien filtré de la même nature (Voir No. 7); dont les théorèmes me sont indispensables pour traiter les problèmes depuis le Mémoire I, aux domaines contenant les points de ramification, et ils sont utiles pour les domaines moins compliqués.

Or, nous, devant le beau système de problèmes à F. Hartogs et aux successeurs, voulons léguer des nouveaux problèmes à ceux qui nous suivront; or, comme le champ de fonctions analytiques de plusieurs variables s'étend

[1] Les Mémoires précédents sont : I Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles, 1936. II Domaines d'holomorphie, 1937. III Deuxième problème de Cousin, 1939. IV Domaines d'holomorphie et domaines rationnellement convexes, 1941. V L'intégrale de Cauchy, 1941. VI Domaines pseudoconvexes, 1942.

[2] H. Cartan, Sur les matrices holomorphes de n variables complexes, 1940, p. 1-26 (Journal de Mathématiques, Vol. 19) ; dont nous devons beaucoup aussi aux théorèmes.

heureusement aux divers branches de mathématiques, nous serons permis de rêver divers types de nouveaux problèmes y préparant.[3]

≪Dans le Mémoire actuel, nous ne traiterons que le domaine *univalent et fini*, et dont la condition sera donc généralement abrégée.≫

1. Congruences et équivalences. Théorème de H. Cartan. Parmi les problèmes générés des notions arithmétiques transplantées au champ de fonctions analytiques, se trouve *un type* de problèmes, où on demande *globalement* ce que 1'on a défini *localement* (comme aux problème de Cousin), et que nous allons récolter.

Dans un domaine D à l'espace de n variables complexes $x_1, x_2, \dots, x_n$, considérons deux fonctions holomorphes f, φ et une combinaison finie de fonctions holomorphes $(F_1, F_2, \dots, F_p)$ des variables; dont l'espace sera abrégément désigné par (x), et la fonction f par exemple, par $f(x)$; et supposons une relation de la forme,

$$f - \varphi = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_p F_p,$$

α_i $(i = 1, 2, ..., p)$ étant des fonctions holomorphes des variables (x) dans D; les fonctions f, φ seront alors appelées *congruentes* par rapport à (F) dans D, et la relation sera désignée par

$$f \equiv \varphi \qquad \mod (F).$$

Nous appelons les fonctions f, φ d'être congruentes *en un point* P de D si elles le sont au voisinage de P; or, même si elles sont congruentes en tout point de D, elles ne le sont pas nécessairement, globalement pour D; et un des problèmes que voici :

Problème ($\mathbf{C_1}$) *Etant données une combinaison finie de fonctions holomorphes $(F_1, F_2, \dots, F_p)$ et une fonction holomorphe $\Phi(x)$ au voisin d'un ensemble fermé E (nécessairement borné), satisfaisant à la relation $\Phi(x) \equiv 0 \mod (F)$ en tout point de E; trouver p fonctions $A_i(x)$ holomorphes au voisinage de E, de façon que $\Phi = \sum A_i F_i$ $(i = 1, \dots, p)$ identiquement.*

Ceci concerne l'expression de la fonction; si pour la fonction même :

Problème ($\mathbf{C_2}$) *Considérons, au voisinage d'un ensemble fermé E à l'espace (x), une combinaison finie de fonctions holomorphes $(F_1, F_2, \dots, F_p)$,*

[3]L'auteur voudra dire ici un remerciement sincère à Huju-Kai pour son secours depuis vers le temps du Mémoire VI.

et en un point quelconque P de E, un polycylindre (γ) autour de P et une fonction $\varphi(x)$ holomorphe dans (γ): supposons, pour toute paire $[(\gamma),(\gamma')]$ des polycylindres contigus ayant la partie commune (δ), la relation $\varphi(x) \equiv \varphi'(x) \mod (F)$ entre les fonctions correspondantes en tout point de (δ); et nous nous proposons de trouver une fonction holomorphe $\Phi(x)$ au voisinage de E, telle que $\Phi(x) \equiv \varphi(x) \mod (F)$ en tout point P de E.

Nous allons expliquer quelques termes concernant le mot ≪polycylindre≫. E_i étant un ensemble sur le plan x_i, tout ensemble de la forme $x_i \in E_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sera appelé *ensemble cylindrique*, et E_i ses composantes. Tout ensemble cylindrique fermé E sera appelé *simplement connexes*, si sur chaque plan x_i, l'ensemble complémentaire de la composante E_i devient connexe lorsque il est considéré sur la sphère de Riemann. Nous appellerons *polycylindre* tout ensemble cylindrique E dont toutes les composantes E_i sont des cercles.

Considérons ensuites deux combinaisons finies de fonctions holomorphes dans un domaine D à l'espace (x), et que nous désignons par $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$, $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots. \varphi_q)$; supposons les deux relations,

$$\varphi_i \equiv 0 \mod (f), \quad f_j \equiv 0 \mod (\varphi) \quad (i = 1, \ldots, q;\ j = 1, \ldots, p)$$

globalement pour D, et nous appellerons alors, les système de fonctions $(f), (\varphi)$ d'être équivalents dans D; dont nous désignerons les relations simultanées par

$$(f) \sim (\varphi),$$

et une seule des deux relations, la première par exemple, par

$$(\varphi) \subset (f).$$

Nous appellerons les système de fonctions $(f), (\varphi)$ d'être équivalents *en un point* P de D, s'il est ainsi au voisinage de P, et également pour $(\varphi) \subset (f)$.

A l'équivalence, on trouve le suivant :

Problème (E) *Dans la configulation géométrique du problème* (C_2)*, supposons pour chaque (γ) un système fini de fonctions holomorphes (f), et pour chaque (δ) la relation $(f) \sim (f')$ entre les systèmes de fonctions correspondantes aux polycylindre $(\gamma), (\gamma')$, en tout point de (δ); et nous nous proposons de trouver un système fini de fonctions (F) au voisinage de l'ensemble fermé E, telle que $(F) \sim (f)$ en tout point P de E.*

Ce sont les problèmes récoltés.

Pour le problème (E), H. Cartan a montré dans le Mémoire cité plus haut le théorème suivant :

Théorème de H. Cartan. *Considérons à l'espace* (x) *deux ensembles cylindriques fermés* Δ', Δ'', *qui ont mêmes composantes sur les plans toutes les variables sauf une, et dont l'intersection* $\Delta' \cap \Delta'' = \Delta_0$ *existe et elle est simplement connexe; et supposons au voisinage de* Δ' *une combinaison finie de fonctions holomorphes* (f'), *aue voisinage de* Δ'' *une combinaison* (f'') *de la même propriété, et au voisinage de* Δ_0 *la relation* $(f') \sim (f'')$ *globalement. Dans ces circonstances, on peut trouver un système fini de fonctions holomorphes* (f) *au voisinage de la reunion* $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$ *de façon que* $(f) \sim (f^{(i)})$ *au voisinage de* $\Delta^{(i)}$ $(i = 1, 2)$.

Dans le Mémoire, H. Cartan a démontré ce théorème en transplantant la notion *matrice*. D'après sa méthode, p, q, r étant les nombres de fonctions des systèmes $(f'), (f''), (f)$, respectivement, on a toujours

$$p < r, \qquad q < r;$$

à ce phénomène il a encore prêté l'attention élaboré.

Nous allons appliquer *le théorème de Cartan* au problème (E). Considérons sur le plan x_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ un cercle (α_i), et sur le plan x_n trois cercles (β_j) $(j = 1, 2, 3)$ empiétant deux à deux; considérons donc le polycylindre fermé Δ_j $(j = 1, 2, 3)$ défini par les composantes fermées $(\overline{\alpha})$, $(\overline{\beta}_j)$; et supposons un système fini de fonctions holomorphes (f_j) au voisinage de chaque Δ_j, de façon que toute paire des systèmes (f_j) soient globalement équivalentes au voisinage de l'intersection correspondante,

A ces circonstance, essayons d'appliquer le théorème de Cartan : pour $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, l'application est possible et on trouve un système fini de fonctions holomorphes (f) au voisinage de Δ, telle que $(f) \sim (f_1)$ globalment au voisinage de Δ_1 et pareillement pour Δ_2; pour $\Delta \cup \Delta_3$, l'application n'est pas toujours possible; puisque, selon la configuration géométrique les systèmes $(f), (f_3)$ ne sont pas visibles d'être globalement équivalents ou non au voisinage de l'intersection; si tout problème (C_1) est résoluble pour (c'est-à-dire, au voisinage de) tout polycylindre fermé, la deuxième application est évidemment possible, et d'où il en résultra :

Si tout problème (C_1) *est reśoluble pour tout polycylindre fermé, il en est de même pour le problème* (E).

La démonstration, étant facile et habituelle, sera abrégée; nous expliquerons pour le ≪polycylindre≫. Dans le Mémoire actuel, *nous traiterons* *les problèmes exclusivement pour polycylindre fermé*, car, alors, les propriétés intrinsèques mêmes des problèmes permetteront de l'étendre aux domaines fermés moins restrictifs, et encore puisque cette notion est simple.

Pour la relation entre les problèmes (C_1), (C_2) :

Considérons la même configuration géométrique qu'au théorème de Cartan, sauf pour l'intersection Δ_0*, qui n'est pas restreinte d'être simplement connexe; et supposons une combinaison finie de fonctions holomorphes* $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ *au voisinage de* Δ*, telle que tout problème* (C_1) *par repport à* (F) *soit résoluble au voisinage de* Δ_0*. Dans ces circonstances, si l'on suppose une fonction holomorphe* f' *au voisinage de* Δ'*, et* f'' *pour* Δ''*, telles que* $f' - f'' \equiv 0 \mod (F)$ *en tout point au voisinage de* Δ*, on peut trouver une fonction holomorphe* f *au voisinage de* Δ*, telle que* $f \equiv f' \mod (F)$ *en tout point au voisinage de* Δ' *et pareillement pour* Δ''*.*

En effet. la fonction

$$\varphi(x) = f'(x) - f''(x),$$

étant holomorphe au voisinage de Δ_0 telle que

$$\varphi(x) \equiv 0 \mod (F)$$

en tout points de Δ_0, en resolvant le problème (C_1), sera représentée comme

$$\varphi = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_p F_p,$$

α_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ étant des fonctions holomorphes au voisinage de Δ_0.

Δ_0 étant cylindrique, en employant *l'intégrale de Cousin*, on trouve des fonctions holomorphes $a_i(x)$ au voisinage de Δ' et des fonctions $b_i(x)$ ayant la même propriété pour Δ'', de façon que

$$a_i(x) - b_i(x) = \alpha_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

identiquement; formons les fonctions

$$\psi' = f' - (a_1 F_1 + \cdots + a_p F_p), \quad \psi'' = f'' - (b_1 F_1 + \cdots + b_p F_p),$$

ψ' est alors holomorphe au voisinage de Δ' et ψ'' pour Δ''; or pour Δ_0 on a identiquement

$$\psi' - \psi'' = \varphi - (\alpha_1 F_1 + \cdots + \alpha_p F_p) = 0;$$

ψ' et ψ'' sont donc des parties d'une seule fonction holomorphe $f(x)$ au voisinage de Δ; $f = \psi' \equiv f' \mod (F)$ au voisinage de Δ', et pareillement pour Δ''. C.Q.F.D.

De ce lemme, il en résulte immédiatement que :

Si tout problème (C_1) *est résoluble pour le polycylindre fermé, le problème* (C_2) *l'est aussi.*

Les problèmes $(\mathrm{C}_1), (\mathrm{C}_2), (\mathrm{E})$ *sont donc réduits au problème* (C_1).

Finalement, on apercevra au théorème II du Mémoire I, au théorème I du Mémoire II et à la condition (β) du Mémoire V, les problèmes $(\mathrm{C}_2), (\mathrm{E})$ et (C_1) respectivement.

2. Idéaux de domaines indéterminés. D'après l'intention de H. Cartan, nous allons transplanter l'≪idéal≫.

Considérons à 1'espace (x) un domaine D et un ensemble (I) de fonctions holomorphes dans D; supposons les deux propriétés suivantes :

1° Si $f(x) \in (I)$ et si $\alpha(x)$ est une fonction holomorphe dans D, alors $\alpha f \in (I)$;

2° Si $f'(x) \in (I), f''(x) \in (I)$, alors $f' + f'' \in (I)$; et nous appellerons (I) *idéal holomorphe du domaine détermié* D; mais nous ne nous arrêterons pas ici.

Considérons à 1'espace (x) le domaine (connexe ou non) δ, la fonction $f(x)$ holomorphe pour δ et un ensemble (I) de (f, δ), dont, à la place de dire que $(f, \delta) \in (I)$, nous dirons par fois que $f \in (I)$ pour δ; supposons les deux propriétés suivantes :

1° Si $(f, \delta) \in (I)$ et si $\alpha(x)$ est une fonction holomorphe pour domaine (connexe ou non) δ', on a alors $\alpha f \in (I)$ pour $\delta \cap \delta'$;

2° Si $(f, \delta) \in (I)$, $(f', \delta') \in (I)$, on a alors $f + f' \in (I)$ pour $\delta \cap \delta'$;

et nous appellerons (I) *idéal holomorphe de domaines indéterminés*; (I) sera par fois appelé abrégément idéal de domaines indéterminés, ou plus simplement idéal.

De la définition, il s'ensuit que :

Pour l'idéal (I), *si* $(f, \delta) \in (I)$, $\delta \supset \delta'$, *on a nécessairement* $(f, \delta') \in (I)$.

Nous appellerons donc qu'une fonction f appartient à un idéal de domaines indéterminés *en un point* P, s'il en est ainsi au voisinage de P.

Concevons les propriétés pareilles pour l'idéal (I) de domaine indéterminés :

Propriété (T_1) Si $(f, \delta) \in (I)$, $(f, \delta') \in (I)$, on a nécessairement $(f) \in (I)$ pour $\delta \cup \delta'$.

Propriété (T_2) Si $\delta_1 \subset \delta_2 \cdots$ et si $(f, \delta_1) \in (I)$, $(f, \delta_2) \in (I), \ldots$, on a nécessairement, pour la limite δ_0 de la suite $\delta_1, \delta_2, \ldots$ que $(f, \delta_0) \in (I)$.

Examinons ces conceptions :

Exemple 1. Considérons sur le plan d'une variable complexe x, le cercle (C) autour de l'origine et de rayon 1, et dans (C), un domaine (connexe ou non) quelconque δ de diamètre d (c'est-à-dire que la borne supérieure de toute distance entre deux points de δ soit d); et concevons l'ensemble (I) de (f, δ) dont $d \leq \frac{1}{2}$. (I) est un idéal, *qui admet la propriété* (T_2)*, sans l'être pour* (T_1).

Exemple 2. Considérons dans le cercle (C) une suite de cercle (C_i) $(i = 1, 2, \ldots)$ autour de l'origine et de rayon r_i, telle que la suite croissante en tendant vers 1; concevons l'ensemble (I) de (f, δ) dont δ appartient à un au moins des cercles (C_i) de la suite; alors, (I) est un idéal *qui admet la propriété* (T_1) *sans l'être pour* (T_2).

Nous allons maintenant transplanter la conception ≪bases finies d'un idéal≫ des domaines déterminés aux domaines indéterminés, et la filtrer, en faisant abstraction des propriétés $(T_1), (T_2)$ et de ce qui concerne le problème (C_1).

Considérons à l'espace (x) un idéal (I) de domaines indéterminés, un domaine D et un nombre fini de fonctions holomorphes dans D, $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_p(x)$; supposons donc les propriétés suivantes :

1° Une quelconque des fonctions F_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ appartient à (I) en tout point de D;

2° Pour un point quelconque P de D, si une fonction $f(x)$ appartient à (I) en P, on a nécessairement $(f) \subset (F_1, F_2, \ldots, F_p)$ pour P; et nous appellerons (F) *pseudobases finies* de (I) dans D. Nous nous proposons :

Problème (I) *Etant donnés à l'espace* (x) *un idéal* (I) *de domaine indéterminés et un ensemble fermé* E*, trouver un système fini de pseudobases de* (I) *au voisinage de* E*.*

Considérons ensuite à l'espace (x) un idéal (I) de domaines indéterminés, deux domaines D, D' tels que $D' \subset D$ et une combinaison finie de fonctions holomorphes (F) pour D; supposons que (F) donne les pseudobases de (I) pour D; et on trouvera immédiatement qu'il en est de même pour D'.

Pour tout idéal (I) de domaines indéterminés, nous appellerons donc qu'une combinaison finie de fonctions holomorphes (F) donne les psedo bases de (I) *en un point*, s'il en est ainsi au voisinage du point, dont (F) sera par fois appelé *pseudobases locales.* Nous nous proposons encore :

Problème (J) *Etant donnés à l'espace (x) un idéal (I) de domaine indéterminés et un point P, trouver un système fini de pseudobases de (I) pour P.*

Le problème (J) est un cas spécial du problème (I); mais entre eux il y a la relation suivante :

Considérons un problème (I) *à l'espace (x) par rapport à un idéal (I) et à un ensemble fermé E, de façon que E soit polycylindre fermé; supposons que pour tout point P de E, le problème* (J) *de l'idéal (I) au point P soit résoluble, et que tout problème* (C_1) *pour le polycylindre fermé soit résoluble; et on trouve que le problème* (I) *ci-dessus est aussi résoluble.*

En effet, considérons un point quelconque P de E; le problème (J) par rapport à (I) étant résoluble en P, on peut trouver un polycylindre (γ) autour de P et un système fini de fonctions holomorphes (f) pour (γ), de façon que (f) donne les pseudobases de (I) pour (γ); examinons une paire $[(\gamma),(\gamma')]$ des polycylindres contigus; les systèmes de fonctions correspondantes $(f),(f')$, chacun donnant les pseudobases, sont équivalents tout point de l'intersection $(\delta)\cap(\delta')$; nous nous proposons donc de trouver un système fini de fonctions holomorphes (F) au voisinage de E, tel que $(F)\sim(f)$ en tout point P de E. Or, ceci étant un problème (E) par rapport à un polycylindre fermé E, d'après l'hypothèse que tout problème (C_1) soit résoluble pour un polycylindre fermé quelconque, (F) existe comme nous l'avons vu; (F) donne les pseudobases en tout point P de E, puisque $(F)\sim(f)$, il en est donc de même pour E. C.Q.F.D.

Le problème (J) est ainsi la partie propre du problème (I).

Or, contre le problème (J), il y a l'exemple suivant :

Exemple 3. Traçons à l'espace de deux variables complexes $x,\ y$, deux hypersphères (C), (γ) autour de l'origine et telles que $(C)\supset(\gamma)$, et la surface caractéristique $x=y$; désignons la partie de la surface entre les deux hypersurfaces C, γ et sur γ, par Σ_0; et considérons l'ensemble (I) de (f,δ) dont $\delta\subset(C)$ et $\frac{f(x,y)}{x-y}$ est holomorphe en tout point de l'intersection $\Sigma_0\cap\delta$. (I) est un ideal (satisfaisant aux propriétés $(T_1),(T_2)$); mais, puisque l'ensemble de zéros de (f,δ) de (I) est Σ_0, *cet idéal ne peut posséder les pseudobases locales finies pour aucun point sur γ.*

On ne peut donc pas résoudre tous les problèmes (J) à la fois et sans condition. On apercevera encore divers sortes d'exemples contraires.

Nous verrons deux espèces d'idéaux de domaines indéterminés pour lesquelles le problème (J) est résoluble aux polycylindres fermés; dont l'une sera traitée dans le présent Mémoire.

L'autre espèce est *les idéaux géométriques de domaines indéterminés* (ce qui correspond aux idéaux géométriques au champ de polynomes), qui deviendront indispensables à nous, lorsque nous nous occupe domaines admettant des points de ramifications. La démonstration pour les idéaux de cette espèce (pour que le problème (J) soit résoluble aux polycylindre fermés) demande, outre les résultats du Mémoire actuel, quelque notions sur tels domaines. Nous le traiterons donc, dans un Mémoire ultérieur.

3. Equations fonctionnelles linéaires homogènes et ses solution formulaires. Nous allons scruter les environs du problème (C_1) à l'aide conceptions que nous venons de préparer.

1° *Equations fonctionnelles linéaires homogènes.* Considérons p fonctions holomorphes $F_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ différentes de zéro dans un domaine D à l'espace (x); concevons l'équation,

$$(1) \qquad A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_pF_p = 0,$$

où A_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ signifient des fonctions inconnues; nous appellerons tout système de fonctions holomorphes $[A_1(x), A_2(x), \ldots, A_p(x)]$ pour un domaine (connexe ou non) δ contenu dans D satisfaisant à cette équation identiquement d'être une *solution* (*holomorphe*) de 1'équation pour δ; et nous appellerons toute équation de cette nature *équation fonctionnelle linéaire homogène.*

Considérons, concernant 1'équation (1), l'ensemble (I_1) de (A_1, δ) de façon que $(A_1, A_2, \ldots, A_p)$ soit une solution pour δ; je dis que :

(I_1) *est un idéal.*

Car, si $(A_1, \delta) \in (I_1)$ et si $\alpha(x)$ est une fonction holomorphe pour un domaine (connexe ou non) δ', on a alors $\alpha A_1 \in (I_1)$ pour $\delta \cap \delta'$; si $(A_1, \delta) \in (I_1)$, $(A_1', \delta') \in (I_1)$, on a alors $A_1 + A_1' \in (I_1)$ pour $\delta \cap \delta'$.

Nous ne pouvons pas apercevoir immédiatement si (I_1) satisfait aux propriétés $(T_1), (T_2)$ ou non.

C'est pour cette espèce d'idéaux dont nous avons parlé à la fin du numéro précédant; et dont problème (J) est comme suivant :

Problème (K) *Etant donnés une équation fonctionnelle linéaire homogène dans un domaine D à l'espace (x), et un point P de D, trouver un* *système fini de pseudobases de l'idéal* (I_1) *correspondant, en* P.

2° *Solutions formulaires.* Nous nous proposons maintenant de représenter les solutions de l'équation (1). Nous avons considéré l'idéal (I_1) pour l'équation (1); considérons ensuite l'équation,

$$(2) \qquad A_2F_2 + A_3F_3 + \cdots + A_pF_p = 0,$$

et l'ensemble (I_2) de (A_2, δ), pareillement; (I_2) est un idéal d'après ce qui précède; et ainsi de suite; et considérons finalement l'équation $A_pF_p = 0$, dont $(I_p) = (0)$ (c'est-à-dire, l'idéal consistant d'un seul élément 0), puisque la fonction F_p est différente de 0. Concevons le problème composé suivant :

Problème (λ) *Pour tout ensemble fermé* E *contenu dans le domaine* D*, trouver les pseudobases finies des idéaux* $(I_1), (I_2), \ldots, (I_p)$*, de façon que chacun des pseudobases appartienne globalement à l'idéal correspondant au voisinage de* E.

Supposons le problème (λ) résolu; on a alors,

$$(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p),\ (\Phi'_1, \Phi'_2, \ldots, \Phi'_p)\ , \ldots,\ (0)$$

pour les pseudobases des caractères indiqués pour $(I_1), (I_2), \ldots, (I_p)$, respectivement. Considerons un point quelconque P au voisinage de E et une solution quelconque $[A_1(x), A_2(x), \ldots, A_p(x)]$ de l'équation (1) en P (c'est-à-dire au voisinage de P); (Φ) étant les pseudobases de (I_1) au voisinage de E, la fonction $A_1(x)$ sera représentée en P de la forme,

$$A_1 = C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2 + \cdots + C_q\Phi_q,$$

C_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$ étant des fonctions holomorphes.

Envisageons ensuite $A_2(x)$: comme chaque Φ_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$ appartient globalement à (I_1) au voisinage de E, l'équation (1) admettra q solutions de la forme $(\Phi_i, \Psi_{i2}, \Psi_{i3}, \ldots, \Psi_{ip})$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$ au voisinage de E; posons

$$B_j = C_1\Psi_{1j} + C_2\Psi_{2j} + \cdots + C_q\Psi_{qj} \qquad (j = 2, 3, \ldots, p),$$

et on aura une solution de l'équation (1) de la forme $(A_1, B_2, \ldots, B_p)$ pour P; et si l'on pose encore $A'_j = A_j - B_j$, $(A'_2, A'_3, \ldots, A'_p)$ est une solution de l'équation (2) pour P; par conséquent, la fonction $A_2(x)$ sera représentée en P de la forme,

$$A_2 = B_2 + C'_1\Phi'_1 + C'_2\Phi'_2 + \cdots + C'_r\Phi'_r$$

où C'_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ sont des fonctions holomorphes et B_2 se représente comme ci-dessus; et ainsi de suite.

On reconnaîtera maintenant que la solution $[A_1(x), A_2(x), \ldots, A_p(x)]$ de l'équation (1) soit représentée pour P comme ce qui suit :

$$(3) \qquad A_i = C_{i1}\pi_{i1} + C_{i2}\pi_{i2} + \cdots + C_{iN}\pi_{iN} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

avec quelques identités de la forme $C_{ij} = C_{kl}$ $(k = 1, \ldots, p; l = 1, \ldots, N)$, où π_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, p; j = 1, \ldots, N)$ sont des fonctions holomorphes déterminées au voisinage de E et C_{ij} sont des fonctions holomorphes au point P dépendant de la solution. Par exemple, pour A_1, on a

$$\pi_{1i} = \Phi_i, \quad \pi_{1j} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, q; j = q + 1, q + 2, \ldots, N);$$

et pour A_2, on a

$$\pi_{2i} = \Psi_{i2}, \quad \pi_{2j} = \Phi'_{j-q}, \quad \pi_{2k} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, q;\ j = q + 1, q + 2 \ldots, q + r;\ k = q + r + 1, \ldots, N),$$
$$C_{1i} = C_{2i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q).$$

Considérons réciproquement un point quelconque P au voisinage de E, et d'après (3) une combinaison quelconque des fonctions holomorphe (C) en P (respectant naturellement les identités indiquées); à cette conbinaison (C) correspond un système de fonctions holomorphes (A) pour P d'après (3), et qui satisfait visiblement à l'équation fonctionnelle (1) pourvu si 1'on a choisi (3) convenablement.

Si en général, à l'équation fonctionnelle (1) il correspond une expression de la forme (3), où π_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, p; j = 1, 2, \ldots, N)$ sont des fonctions holomorphes déterminées dans un domaine (connexe ou non) D' donné dans D, et qui satisfait aux propriétés suivantes :

1° Toute solution $[A_1(x), A_2(x), \ldots, A_p(x)]$ de l'équation (1) pour point P quelconque dans D' peut être représentée en cette forme, dont C_{ij} sont des fonctions holomorphes convenables (respectant naturellement les identités indiquées) en P;

2° Aux fonctions C_{ij} (respectant naturellement les identités indiquées) holomorphes en un point P de D, mais d'ailleurs quelconques, il correspond d'après cette expression une solution (A) de 1'équation (1) pour P; nous appellerons cette expression d'être une *solution formulaire* de l'équation fonctionnelle (1) pour le domaine D', et (π) le *noyau* de la solution formulaire. Formulons le problème que nous venons de traiter :

Problème (L) *Etant donnés une équation fonctionnelle linéaire homogène dans un domaine et un ensemble fermé E dans le domaine, trouver une solution formulaire de l'équation au voisinage de E.*

Nous avons vu que :

Lemme 1. *Si un problème* (λ) *est résoluble, le problème* (L) *correspondant est aussi résoluble.*

3° *Application au problème* (C_1). La relation entre le problème (C_1) et la solution formulaire de 1'équation fonctionnelle linéaire homogène sera donnée par la proposition suivante :

Lemme 2. *Traçons à l'espace* (x) *deux ensembles cylindriques ferme's contigus* Δ', Δ'', *qui ont en commun toutes les composantes sauf une, en désiguant :* $\Delta' \cup \Delta'' = \Delta$, $\Delta' \cap \Delta'' = \Delta_0$. *Considérons une fonction holomorphe* $\Phi(x)$ *et une combinaison finie de fonctions holomorphes* $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ *au voisinage de* Δ, *en supposant la relation*

$$\Phi = A'_1 F_1 + A'_2 F_2 + \cdots + A'_p F_p,$$

A'_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ *étant des fonctions holomorphes au voisinage de* Δ', *et pour* Δ'' *la relation pareille*

$$\Phi = A''_1 F_1 + A''_2 F_2 + \cdots + A''_p F_p.$$

Supposons une solution formulaire de l'équation fonctionnelle

$$A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_p F_p = 0, \tag{4}$$

au voisinage de Δ_0 *satisfaisant aux propriétés suivantes :* 1° *le noyau consiste des fonctions holomorphes au voisinage de* Δ; 2° *toute solutions de l'équation au voisinage de* Δ_0 *sera représentée globalement (par la solution formulaire au voisinage de* Δ_0*). Nous dirons alors que la fonction* Φ *est représentée de la forme,*

$$\Phi = B_1 F_1 + B_2 F_2 + \cdots + B_p F_p,$$

B_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ *étant des fonctions holomorphes au voisinage de* Δ.

En effet, soit

$$A_i = \sum C_{ij} \pi_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1, 2, \ldots, N), \tag{5}$$

avec quelques identités parmi (C),

la solution formulaire ayant les propriétés indiquées. Considérons les fonctions

$$\gamma_i = A'_i - A_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

qui sont holomorphes au voisinage de Δ_0 et elles y satisfont à l'équation (4); elles sont donc représentées par (5), globalement au voisinage de Δ_0 comme

$$\gamma_i = \sum d_{ij}\pi_{ij},$$

d_{ij} étant des fonctions holomorphes.

Δ_0 étant cylindrique, grâce à *l'intégrale de Cousin*, on trouve des fonctions holomorphes $a_{ij}(x)$ au voisinage de Δ' et des fonctions pareilles $b_{ij}(x)$ pour Δ'', telle que

$$a_{ij} - b_{ij} = d_{ij}$$

identiquement, et encore, comme les fonction (d) satisfont aux identités de la solution formulaire (5), on peut choisir (a, b) de façon que (a) ou (b) le soient aussi; posons donc,

$$\alpha_i = \sum a_{ij}\pi_{ij}, \qquad \beta_i = \sum b_{ij}\pi_{ij},$$

on a alors,

$$\alpha_i - \beta_i = \gamma_i;$$

et encore, (5) étant la solution formulaire de l'équation (4) au voisinage de Δ_0, on y a identiquement

$$\sum \alpha_i F_i = 0, \qquad \sum \beta_i F_i = 0;$$

et de plus, comme le noyau (π) consiste des fonctions holomorphes au voisinage de Δ, les fonctions (α) sont holomorphes au voisinage de Δ' et elles y satisfont par suite à 1'équation (1), et (β) pareillement.

Posons

$$B_i' = A_i' - \alpha_i, \quad B_i'' = A_i'' - \beta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p);$$

les fonctions (B') sont holomorphes au voisinage de Δ', et (B'') pour Δ'', et au voisinage de Δ'

$$\Phi = B_1'F_1 + B_2'F_2 + \cdots + B_p'F_p$$

$$\Phi = B_1''F_1 + B_2''F_2 + \cdots + B_p''F_p$$

pour Δ''; or, puisque

$$B_i' - B_i'' = (A_i' - A_i'') - (\alpha_i - \beta_i) = \gamma_i - \gamma_i = 0$$

pour tout i, les fonctions B_i', B_i'' ne sont que les parties d'une seule fonction holomorphes B_i au voisinage de Δ. C.Q.F.D.

4° *Application du théorème de H. Cartan.*

Lomme 3. *Concevons, dans la configuration géométrique du lemme 2, l'intersection* Δ_0 *simplement connexe et jouissant de la propriété que tout problème* (C_1) *soit résoluble au voisinage d'elle; considérons* p *fonctions holomorphes* $F_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ *dlfférentes de zéro au voisinage de* Δ *et le problème* (λ) *correspondant; supposons les problèmes* (λ) *résolus au voisinage de* Δ' *et pour* Δ''*; et nous disons que le problème* (λ) *aussi résoluble au voisinage de* Δ.

Dans les circonstances de la conclusion du lemme actuel, d'après le lemme 1, on trouvera une solution formulaire de l'équation (1) du lemme 2 satisfaisant aux propriétés indiquées.

Nous allons démontrer la proposition par la récurrence mathématique par rapport à p. Pour $p = 1$, il n'y a qu'un seul idéal $(I_1) = (0)$ dans le problème (λ); il est donc résolu à priori, et la proposition est vraie. Envisageons donc le cas p, en supposant que la proposition pour $1, 2, \ldots, p-1$.

Soient $(\Phi'_1, \Phi'_2, \ldots, \Phi'_q)$ les pseudobases de (I_1) au voisinage de Δ', telle que chaque Φ'_i y appartient globalement à (I_1) et soient $(\Phi''_1, \Phi''_2, \ldots, \Phi''_r)$ celles de Δ''; les systèmes de fonctions $(\Phi'), (\Phi'')$ sont équivalents en tout point au voisinage de Δ_0; comme tout problème (C_1) est résoluble pour Δ_0, l'équivalence est globale; Δ_0 étant simplement connexe, d'après *le théorème de Cartan*, on trouve donc un système de fonctions $(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_r)$ au voisinage de Δ, tel que $(\Phi) \sim (\Phi')$ globalement pour Δ et $(\Phi) \sim (\Phi'')$ globalement pour Δ''

Φ'_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ appartenant globalement à (I_1) au voisinage de Δ', on y a globalement

$$\Phi'_i F_1 \equiv 0 \mod (F_2, F_3, \ldots, F_p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, q);$$

il en est donc de même pour $\Phi_i F_1$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$; et également pour Δ''; or, l'équation fonctionnelle

$$A_2F_2 + A_3F_3 + \cdots + A_pF_p = 0,$$

étant dans le cas de $(p - 1)$, admet une solution formulaire au voisinage de Δ_0, satisfaisant aux propriétés indiquées dans le lemme 2; d'après ce lemme-ci, on a donc,

$$\Phi_i F_1 \equiv 0 \mod (F_2, F_3, \ldots, F_p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

globalement au voisinage de Δ, c'est-à-dire, les fonctions Φ_i y appartiennent globalement à (I_1).

Le système de fonctions (Φ), qui satisfait à la propriété ci-dessus, donne les pseudobases de (I_1) au voisinage de Δ', puisque $(\Phi) \sim (\Phi')$; et également pour Δ''; (Φ) donne donc, les pseudobases de (I_1) au voisinage de Δ; dans le problème (λ) pour Δ, la partie concernant (I_1) est ainsi résolu; le reste étant à priori résolu d'après l'hypothèse, la proposition est vraie.

4. Réduction des problèmes au problème local (K). Traçons maintenant un cercle fermé $(\overline{C}_i)$ sur le plan x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, et considérons le polycylindre fermé $(\overline{C})$ ayant les composantes $(\overline{C}_i)$.

Représentons par E_0, tout point appartenant au polycylindre fermé $(\overline{C})$.

Partageons ensuite la variable x_n en deux parties réelle et imaginaire, comme $x_n = X + iY$ (i étant l'unité imaginaire), traçons une droite de la forme

$$x_i = x_i^0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \quad Y = Y^0,$$

x_i^0 étant des valeurs complexes et Y_0 une valeur réelle, et représentons par E_1 la partie de cette droite sur le polycylindre fermé $(\overline{C})$; la partie E_1 est généralement un ségment, elle devient par fois un point.

Concevons pareillement $E_2, E_3, \ldots$; en élevant la dimension réelle, successivement, et en terminant par E_{2n}; où E_2, par exemple, est un ensemble cylindrique fermé dont la composante sur le plan x_i $(i = 1, 2, \ldots, n-l)$ est un point de $(\overline{C}_i)$, et la composante sur le plan x_n est $(\overline{C}_n)$; et E_{2n} signifie le polycylindre fermé $(\overline{C})$.

En appliquant à cette configuration géométrique les lemmes du No.3, nous verrons les problèmes $(\mathrm{C}_1), (\lambda)$ résolus successivement pour E_0, E_1, $\ldots, E_{2n}$; *pourvu que le problème* (K) *soit toujours résoluble.*

Cas de E_0. Au voisinage d'un point, le problème (C_1) est à priori résoluble. Le problème (λ) l'est aussi, d'après l'hypothèse.

Cas de E_1. Considérons un quelconque des ensembles E_1 et désignos cet ensemble par la même lettre E_1 que nous pouvons supposer d'être un vrai ségment.

1° Considérons des fonctions holomorphes $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_p(x)$ différentes de zéro au voisinage de l'ensemble E_1; et dont le problème (λ) est résoluble en chaque point de E_1.

L'ensemble E_1 est un ensemble cylindrique, dont la composante sur l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ est un point que nous désignons par Q, et la composante sur le plan x_n est un segment que nous désignons par l; l est horizontal, dont l'extrême gauche sera désigné par m_0, et l'extrême droit par m_q, en interposant $(q-1)$ points $m_1, m_2, \ldots, m_{q-1}$ sur le segment de gauche à droite; désignons le segment fermé (m_{i-1}, m_i) par l_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$;

désignons à l'espace (x) l'ensemble cylindrique (Q, m_i) par M_i et (Q, l_i) par L_i et désignons comme

$$L_1 \cup L_3 \cup L_5 \cup \cdots = \Delta_1,$$
$$L_2 \cup L_4 \cup L_6 \cup \cdots = \Delta_2;$$

on aura alors,

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 = E_1,$$
$$\Delta_0 = \Delta_1 \cap \Delta_2 = M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_{q-1}.$$

Or, puisque le problème (λ) par rapport à (F) est résoluble en tout point de E_1, si tous les segments L_i deviennent suffisamment petit, ce problème deviendra résoluble au voisinage de chacun d'eux (ceci est évident d'après *le lemme de Borel-Lebesgue*); et par suite pour Δ_1 et pour Δ_2. Tout problème (C_1) étant résoluble pour Δ_0, d'après le lemme 3, le problème (λ) sera alors résoluble pour E_1; et dont (F) et E_1 étant quelconques, *tout problème* (λ) *est résoluble au voisinage de tout* E_1*.*

2° Envisageons ensuite le problème (C_1) : Considérons un ensemble déterminé E_1, des fonctions holomorphes $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ et une fonction holomorphe $f(x)$ au voisinage de l'ensemble E_1 et considérons le problème (C_1) correspondant à ces $(F), (f)$ et E_1. Comme ce problèm (C_1) résoluble au voisinage d'un point quelconque de E_1, analoguement au problème (λ), nous pouvons tracer $\Delta_1, \Delta_2, \Delta$ et Δ_0 de façon que le problème (C_1) soit résolu au voisinage de Δ_1 et pour Δ_2. Or, le problème (λ) par rapport aux fonctions (F) est, comme nous l'avons vu, résoluble pour l'ensemble E_1, tout problème (C_1) est résoluble pour l'intersecton Δ_0; donc, d'après le lemme 1, nous aurons une solution formulaire correspondant à (F) ayant la propriété indiquée au lemme 2; et d'après ce lemme-ci, le problème (C_1) est résoluble pour l'ensemble E_1; et dont (F) et E_1 étant quelconque, *tout problème* (C_1) *est résoluble au voisinage de tout ensemble* E_1.

Cas de E_2. Nous répéterons.

1° *Problème* (λ). Considérons un E_2, en désignant par Q la composante sur l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, la composante sur le plan x_n est $(\overline{C}_n)$. Considérons ensuite des fonctions holomorphes $F_1(x), F_2(x), \ldots,$ $F_p(x)$ différentes de zéro, et le problème (λ) correspondant, aux voisinage de l'ensemble E_2; ce problème est déjà résolu, spécialement pour tout E_1 contenu dans E_2.

Entre l'extrême inférieur et l'extrême supérieur du cercle fermé $(\overline{C}_n)$, traçons $q-1$ droites horizontales, en partageant $(\overline{C}_n)$ en q partie fermés, et que nous désignerons par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$, de inférieure à supérieure; désignons à l'espace (x), le polycylindre fermé (Q, α_i) $(i = 1, 2, \dots, q)$ par A_i, et

$$A_1 \cup A_3 \cup A_5 \cup \cdots = \Delta_1,$$
$$A_2 \cup A_4 \cup A_6 \cup \cdots = \Delta_2;$$

on trouve alors que

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 = E_2,$$

et que 1'intersection $\Delta_0 = \Delta_1 \cap \Delta_2$ consiste des ensembles E_1 en nombre fini.

Le problème (λ) par rapport à (F) étant résoluble au voisinage ensemble quelconque E_1 de E_2, si l'on partage E_2 étroitement, ce problème reviendra résoluble au voisinage de chaque A_i, et par suite pour Δ_1 et pour Δ_2 (où on peut réduire le raisonnement, par exemple, encore au lemme de Borel–Lebesgue); tout problème (C_1) étant résoluble pour E_1 et conséquemment pour Δ_0, d'après lemme 3, le problème (λ) est résoluble pour l'ensemble E_2; et dont (F) et E_2 étant quelconques, *tout problème* (λ) *est résoluble au voisinage de tout* E_2.

2° *Problème* (C_1). Choisissons un E_2 et un problème (C_1) au voisinage de ce E_2 ci; on pourra alors supposer une des configuration géométriques ci-dessus telle que le problème (C_1) soit déjà résolu au voisinage de Δ_1 et pour Δ_2; puisque le problème (λ) correspondant est résoluble pour Δ, et que tout problème (C_1) est résoluble pour Δ_0, d'après les lemmes 1, 2, le problème (C_1) est résoluble pour 1'ensemble E_2; et dont (C_1) et E_2 étant arbitraire, *le problème* (C_1) *est toujours résoluble au voisinage de* E_2.

Et ainsi de suite, et on atteindra finalement que : Les problèmes $(\mathrm{C}_1), (\lambda)$ seront toujours résolubles au voisinage du polycylindre fermé, pourvu que le problème (K) soit toujours résoluble; et d'où il s'ensuit immédiatement le résultat intermédiaire suivant :

Les problèmes $(\mathrm{C}_1), (\mathrm{C}_2), (\mathrm{E})$ *et* (L) *au voisinage du polycylindre fermé sont toujours résolubles, pourvu que le problème* (K) *soit toujours résoluble.*

5. Théorème du reste. Nous allons nous fournir le lemme suivant :

Théorème du reste. *Considérons à l'espace* $(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ *un domaine de la forme* $[D, (C)]$, *dont* D *est un domaine (univalent et fini) à l'espace* (x), *et* (C) *un cercle sur le plan* y. *Concevons dans* $[D, (C)]$ *une fonction holomorphe* $F(x, y)$ *telle que pour tout point* (x^0) *de* D *l'équation* $F(x^0, y) = 0$ *ait* λ *racines dans* (C), *dont* λ *est un nombre fini indépendant* *de (x^0). Nous disons alors que toute fonction holomorphe $f(x, y)$ dans $[D, (C)]$ peut y se représenter de la forme*

$$f(x, y) = f_0(x, y) + \varphi(x, y)F(x, y),$$

où f_0 et φ sont des fonctions holomorphes, et spécialement la fonction f_0 est un polynome par rapport à y, elle est identiquement nulle si $\lambda = 0$, et si non elle est $\lambda - 1$ au plus en degré par rapport à y; nous disons encore que elle est unique.

Nous commençerons par nous assurer *l'unicité de f_0*. Si $\lambda = 0$, on a $f_0 = 0$; supposons donc $\lambda > 0$. Dans ce cas, s'il y avaient f_0 et f_0', on aurait

$$(f_0 - f_0') - (\varphi - \varphi')F = 0$$

identiquement, φ et φ' étant des fonctions holomorphes dans $[D, (C)]$; or, puisque pour un point (x^0) de D l'équation $F(x^0, y) = 0$ a λ racines dans (C), si l'on désigne comme $f_0 - f_0' = \psi$, l'équation $\psi(x^0, y) = 0$ aurait au moins λ racines dans (C), or, comme la fonction ψ est un polynome par rapport à y de degré $\lambda - 1$ au plus, elle serait nécessairement nulle identiquement; c'est-à-dire $f_0 = f_0'$.

Nous envisagerons la forme de $F(x, y)$. Marquons arbitrairement un point (ξ) dans D; lorsque (x) est au voisinage de (ξ) et y dans (C), on aura, grâce à Weierstrass,

$$F(x, y) = \omega(x, y)F_0(x, y),$$

où ω et F_0 sont des fonctions holomorphes, ω ne s'annule jamai et

$$F_0 = y^\lambda + \alpha_1(x)y^{\lambda-1} + \cdots + \alpha_\lambda(x) \quad (\lambda \geq 0),$$

$\alpha_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, \lambda)$ étant des fonctions holomorphes; or, puisque telle expression de F est visiblement unique, elle subsiste globalement pour $[D, (C)]$.

Nous examinerons la condition particulière dans laquelle on a supposé que l'équation $F(x^0, y) = 0$ ait toujours le même nombre (fini) de racines dans (C) :

Dans l'espace des deux variables complexes x, y, concevons $F = y - x$, $f(x, y) = f(y)$, dont $f(y)$ est une fonction holomorphe de la seule variable y ayant le cercle $|y| < 1$ pour son propre domaine d'holomorphie; si l'on choisit le cercle comme (C), la condition ne subsistera que pour $|x| < 1$. D étant un domaine (connexe) sur le plan x s'étendant simultanément à l'extérieure et à l'intérieure du cerlce $|x| < 1$, supposons que l'on aurait pour $[D, (C)]$ la relation

$$f(y) = f_0 + \varphi(y - x),$$

f_0 étant une fonction holomorphe de x seul; pour $x = y$,

$$f(y) = f_0(y)$$

contredisant la configuration des domaines d'holomorphie.

La condition est donc inévitable. Ceci est un des phénomène curieux que l'on rencontrera dans le champ de fonctions analytiques, quand on quitte la portion d'une seule variable.

Envisageons le cas d'une seule variable. Or ce n'est que le cas pour lequel $F(x, y)$ et $f(x, y)$ sont des fonctions d'une seule variable y; la condition ci-dessus est donc, toujours remplie; et le théorème restera subsister (s'il est vrai pour plusieurs variables).

Nous allons maintenant démontrer la proposition. Supposons que

$$F = y^{\lambda} + \alpha_1(x)y^{\lambda-1} + \cdots + \alpha_{\lambda}(x) \quad (\lambda > 0),$$

$\alpha_i(x)$ étant des fonctions holomorphes dans D, et que (C) soit donné par $|y| < 1$; on y aura alors,

$$f = \beta_0 + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \cdots + \beta_m y^m + R_m,$$

$$\textit{avec} \quad R_m = \beta_{m+1} y^{m+1} + \beta_{m+2} y^{m+2} + \cdots ,$$

où β_i $(i = 1, 2, \ldots)$ sont des fonctions holomorphes des variables (x) dans D; on a par suite dans $[D, (C)]$,

$$f(x, y) = A_m(x, y)F(x, y) + B_m(x, y) + R_m(x, y), \tag{1}$$

dont $A_m(x, y)$ et $B_m(x, y)$ sont des fonctions holomorphes, et spécialement $B_m(x, y)$ et un polynome par rapport à y de degré $\lambda - 1$ au plus, que nous désignerons par

$$B_m(x, y) = \gamma_1^{(m)} y^{\lambda-1} + \gamma_2^{(m)} y^{\lambda-2} + \cdots + \gamma_{\lambda}^{(m)},$$

$\gamma_i^{(m)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \lambda)$ étant des fonctions holomorphes de (x) dans D; c'est l'allure de la suite de fonctions $B_m(x, y)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ qui est en question lorsque m tend vers l'infini; et dont l'affixe m sera abrégée, lorsqu'il est fixé.

Pour un point déterminé (x) du domaine D l'équation $F(x, y) = 0$ a λ racines dans le cercle (C), que nous dénotons par $y_1, y_2, \ldots, y_{\lambda}$; et substituant la racine y_i $(i = 1, 2, \ldots, \lambda)$ à y de la relation (1), on a

$$f(x, y_i) - R(x, y_i) = B(x, y_i),$$

que nous désignerons abrégément par B_i; on a alors,

$$\gamma_1^{(m)} y_i^{\lambda-1} + \gamma_2^{(m)} y_i^{\lambda-2} + \cdots + \gamma_\lambda^{(m)} = B_i \quad (i = 1, 2, \ldots, \lambda).$$

Nous avons ainsi λ équations par rapport à λ inconnues $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\lambda)$.

Considérons le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1^{\lambda-1} & y_1^{\lambda-2} & \cdots & 1 \\ y_2^{\lambda-1} & y_2^{\lambda-2} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_\lambda^{\lambda-1} & y_\lambda^{\lambda-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

et le déterminant Δ_p en remplaçant la p-ième colonne de Δ par $(B_1, B_2, \ldots, B_\lambda)$ $(p = 1, 2, \ldots, \lambda)$, par exemple,

$$\Delta_\lambda = \begin{vmatrix} y_1^{\lambda-1} & y_1^{\lambda-2} & \cdots & B_1 \\ y_2^{\lambda-1} & y_2^{\lambda-2} & \cdots & B_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_\lambda^{\lambda-1} & y_\lambda^{\lambda-2} & \cdots & B_\lambda \end{vmatrix}.$$

Supposons $F(x, y)$ sans facteur multiple. La variété analytique

$$F(x, y) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = 0$$

est alors à $(n-1)$ dimensions complexes; et de plus, d'après la forme de F, la *projection* S de la variété sur 1'espace (x) (c'est-à-dire, l'ensemble de (x') tel que (x', y') soit un point de la variété, dont y' est une valeur convenable) est une surface caractéristique. Pour tout point (x) de D, extérieur à S, puisque les racines y_i $(i = 1, 2, \ldots, \lambda)$ de l'équation $F(x, y) = 0$ sont toutes différentes, on a $\Delta \neq 0$, et par suite

$$(2) \qquad \gamma_i = \Delta_i / \Delta \qquad (i = 1, 2, \ldots, \lambda).$$

Nous allons évaluer la valeur absolute de $\gamma_i^{(m)}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, \lambda)$, en faisant à m tendre vers l'infini. Considérons d'abord un ensemble fermé E contenu dans D sans contenir aucun point de S, mais d'ailleurs quelconque; le déterminant Δ est indépendant de m, il admet une borne inférieure en valeur absolue différente de zéro sur E; quant à $\Delta_i^{(m)}$, la fonction $B^{(m)}(x, y_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, \lambda)$ possédant visiblement une borne supérieure indépendante de m en valeur absolue sur E, $\Delta_i^{(m)}$ l'est aussi; d'après la relation (2), $\gamma_i^{(m)}(x)$ l'est donc aussi. Considérons ensuite un ensemble fermé quelconque E' dans D; puisque S n'est qu'une surface caractéristique, et que $\gamma_i^{(m)}(x)$ sont des fonctions holomorphes, du résultat pour E il s'ensuivra immédiatement le même résultat pour E'.

La suite de fonctions $B^{(m)}(x,y)$ $(m=0,1,2,\ldots)$ forme donc une famille normale dans D; soit $B_{p_i}, (i=1,2,\ldots)$ une suite partielle admettant la limite B_0; elle est une fonction holomorphe des variables (x,y) dans D, elle est un polynome par rapport à y en degré $\lambda-1$ au plus; or, d'après la relation (1), on a

$$f = A_{p_i}F + B_{p_i} + R_{p_i} \quad (i=1,2,\ldots),$$

dans laquelle, lorsque i tend vers l'infini, B_{p_i} tend vers B_0 et R_{p_i} vers 0, A_{p_i} tend donc vers une limite $A_0(x,y)$ dans $[D,(C)]$; elle est méromorphe et certainement régulière en dehors de $F=0$; A_{p_i} étant holomorphe dans $[D,(C)]$, $A_0(x,y)$ est donc une fonction holomorphe dans $[D,(C)]$ (d'après le meême mode de raisonnement que ci-dessus, ou grâce à la théorie de familles normales); et on aura la relation voulue

$$f(x,y) = B_0(x,y) + A_0(x,y)F(x,y),$$

lorsque $F(x,y)$ n'ait pas de facteur multiple.

Envisageons ensuite *le cas contraire*; t étant une variable complexe, concevons

$$\Phi(x,y,t) = F(x,y) + t \qquad |t| < \rho;$$

la fonction Φ est évidemment sans facteur multiple, elle est de la forme

$$\Phi(x,y,t) = y^\lambda + a_1(x,t)y^{\lambda-1} + \cdots + a_\lambda(x,t) \quad (\lambda > 0);$$

quant au nombre de racines de l'équation $\Phi(x',y,t')=0$, étant donné un domaine borné D' tel que $D' \Subset D$, mais d'ailleurs quelconque, on peut évidemment choisir ρ suffisamment petit de façon que pour tout point (x',t') dans $(x) \in D'$, $|t| < \rho$, l'équation ait λ racines dans (C). La fonction $\Phi(x,y,t)$ satisfait ainsi la condition de la proposition pour $[(x) \in D',\ |t| < \rho : |y| < 1]$ et de plus elle est sans facteur multiple; d'après ce que nous venons de voir, on y a donc, identiquement

$$f(x,y) = G(x,y,t) + H(x,y,t)\Phi(x,y,t),$$

dont G et H sont des fonctions holomorphes, et spécialement G est au plus égale à $\lambda-1$ en degré par rapport à y.

Posons $t=0$, et on a

$$f(x,y) = G(x,y,0) + H(x,y,0)F(x,y,);$$

c'est la relation voulue pour $[D',(C)]$; dont D' étant quelconque et telle expression pour f étant unique, la relation subsiste pour $[D,(C)]$. C.Q.F.D.

6. Résolution du problème local (K). Nous nous dévouerons maintenant au problème (K).

1° Considérons à un espace (fini) (E) d'un nombre fini de variables complexes un domaine D, p fonctions holomorphes $F_1, F_2, \ldots, F_p$ différentes de zéro dans D et un point P quelconque de D, et donc le problème (K) de (F) en P.

Supposons l'équation fonctionnelle

$$(1) \qquad A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_pF_p = 0$$

admettant en P (c'est-à-dire, au voisinage de P) la solution formulaire

$$(2) \qquad A_i = C_{i1}\pi_{i1} + C_{i2}\pi_{i2} + \cdots + C_{iN}\pi_{iN} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

avec quelque identités parmi (C)

dans laquelle nous supposerons encore C_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, N)$ tous différents, puisque, si non, on pourra facilement déformer l'expression pour être ainsi. Dans ces circonstances, si 1'on pose $C_{11} = 1$ et que tous les autres C_{ij}, soient nuls, on aura $A_1 = \pi_{11}$; la fonction π_{11} appartient donc à 1'idéal (I_1) en P; pareillement, il en est de même pour les autres π_{1i} $(i = 2, 3, \ldots, N)$; ensuite, pour toute fonction A_1 appartenant à (I_1) en P, on y a $(A_1) \subset (\pi_{11}, \pi_{12}, \ldots, \pi_{1N})$; le système de fonctions (π_1) donne donc les pseudobases de l'idéal (I_1) au voisinage de P, c'est-a-dire, le probleme (K) est résolu. Nous appellerons donc :

Problème (μ) *Trouver une solution formulaire de l'équation fonctionnelle* (1) *au voisinage d'un point P du domaine D.*

Nous venons de voir *qu'il nous suffit de résoudre la problème* (μ); c'est exclusivement en ce forme que nous traiterons le problème dans la suivante.

2° Observons (E) à une dimension complexe. Considérons 1'espace (E), pour être tracé par la variable complexe x et le point P comme être ramené à 1'origine. Parmi les fonctions $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_p(x)$, s'il y a une qui ne s'annule pas à l'origine, par exemple, si

$$F_p(0) \neq 0,$$

on aura

$$\begin{cases} A_i = C_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p-1), \\ A_p = \dfrac{-1}{F_p}(C_1F_1 + C_2F_2 + \cdots + C_{p-1}F_{p-1}) \end{cases}$$

pour solution formulaire de l'équation (1) à l'origine.

Supposons donc,

$$F_1(0) = F_2(0) = \cdots = F_p(0) = 0.$$

Dans ce cas, il existe visiblement un nombre m tel que toutes les fonctions $F_i(x)$ soient divisibles par x^m à l'origine et que parmi elles il y ait au moins une, soit $F_p(x)$ par exemple, qui n'est pas divisible par x^{m+1}, la solution formulaire ci-dessus reste donc subsister.

Le problème (μ) est ainsi résoluble pour l'espace (E) à une dimension complexe; il nous suffit donc de le résoudre pour (E) à $(n+1)$ dimensions complexes, en supposant le problème résolu pour (E) à moindres dimensions complexes.

3° Représentons 1'espace (E) par $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ et ramenons le point P à 1'origine; et cela de façon que

$$F_i(0, y) \not\equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

L'équation $F_i(0, y) = 0$ admet pour $y = 0$ λ_i racines ($\lambda_i \geq 0$); parmi ces λ_i ($i = 1, 2, \ldots, p$), s'il existe un qui est nul, soit par exemple $\lambda_p = 0$; ceci signifiant $F_p(0, 0) \neq 0$, l'équation fonctionnelle (1) admettra à l'origine une solution formulaire de la même forme qu'au cas de $n = 1$; supposons donc ≪ $\lambda_i > 0$ ($i = 1, 2, \ldots, p$); nous désignerons abrégément $\lambda_p = \lambda$, en supposant $\lambda_i \leq \lambda$ ($i = 1, 2, \ldots, p-1$). ≫

Traçons sur le plan y un petit cercle (C') autour de l'origine, et à l'espace (x) un polycylindre (C) autour de l'origine suffisamment petit en comparaison de (C'); les fonctions $F_i(x, y)$ seront alors holomorphes dans le polycylindre $[(C), (C')]$, et encore, grâce à Weierstrass. elles se représenteront dans le polycylindre de la forme

$$F_i(x, y) = \Omega_i(x, y)\Phi_i(x, y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$
$$\textit{avec} \quad \Phi_i(x, y) = y^{\lambda_i} + a_{i1}(x)y^{\lambda_i - 1} + \cdots + a_{i\lambda_i}(x),$$

dont $a_{ij}(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, p$; $j = 1, 2, \ldots, \lambda_i$) sont des fonctions holomorphes et $\Omega_i(x, y)$ est une fonction holomorphe non-nulle et de plus ≪l'équation $\Phi_i(x', y) = 0$ admettra pour tout point déterminé (x') dans (C), λ_i racines dans (C'), et par suite, elle n'admettra aucune racine à l'extérieur de (C') ni sur la circonférence.≫

Considérons l'équation fonctionnelle

$$\text{(A)} \qquad B_1\Phi_1 + B_2\Phi_2 + \cdots + B_p\Phi_p = 0,$$

(B) étant des fonctions inconnues. Supposons la solution formulaire (2) de l'équation (1), et nous disons alors que l'équation (A) admette en l'origine une solution formulaire de la forme,

$$\text{(B)} \qquad B_i = \Omega_i(C_{i1}\pi_{i1} + C_{i2}\pi_{i2} + \cdots + C_{iN}\pi_{iN}) \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

avec le mm̂e système d'identités parmi (C) *que* (2).

En effet, considérons une solution $[B(x, y)]$ de l'équation (A) en un point Q au voisinage de l'origine, mais d'ailleurs quelconque, comme $F_i = \Omega_i \Phi_i$, et conséquemment $A_i F_i = (A_i \Omega_i)\Phi_i$, le système de fonctions $(B_1/\Omega_1, B_2/\Omega_2, \ldots, B_p/\Omega_p)$ satisfait l'équation à (1) en Q; il est donc représenté de la forme (1) en Q; et par suite le système de fonctions (B) est représenté de la forme (B) en Q. Considérons réciproquement une combinaison de fonctions holomorphes (C) en un point Q au voisinage de l'origine, mais d'ailleurs quelconque, et considérons le système de fonctions (B) d'après (B); le système de fonctions $(B_1/\Omega_1, B_2/\Omega_2, \ldots, B_p/\Omega_p)$ remplit alors l'équation (1) en Q; puisque $(B_i/\Omega_i)F_i = B_i\Omega_i$, le système (B) remplit l'équation (A) en Q. L'expression (B) donne donc une solution formulaire de (A) en l'origine.

Dans le mode de raisonnement ci-dessus, les équations (1) et (A) sont visiblement réversibles; pour résoudre le problème (μ) à l'origine pour l'équation (1), il nous suffit donc de la faire pour l'équation (B).

4° Nous supposerons donc que, dans l'équation fonctionnelle

$$\text{(1)} \qquad A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_pF_p = 0,$$

les fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_p$ jouissent de la même propriétés qu'aux fonctions $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$ par rapport au polycylindre $[(C), (C')]$; notre but est la solution formulaire

$$\text{(2)} \qquad A_i = C_{i1}\pi_{i1} + C_{i2}\pi_{i2} + \cdots + C_{iN}\pi_{iN} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

avec quelques identités parmi (C),

de l'équation (1) ci-dessus, au voisinage de l'origine.

Considérons une solution (A) de l'équation (1) en un point (x_0, y_0) du polycylindre $[(C), (C')]$; traçons un petit cercle (γ') autour de y_0 dans (C'), et un polycylindre (γ) autour de (x_0) dans (C), suffisamment petit en comparaison de (γ'); les fonctions $A_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ seront alors holomorphes dans le polycylindre $[(\gamma), (\gamma')]$, et l'équation $F_p(x', y) = 0$ admettra pour tout (x') dans (γ) le même nombre μ de racines dans (γ'), dont

$0 \leq \mu \leq \lambda$; en l'appliquant *le théorème du reste*, on aura pour $[(\gamma), (\gamma')]$,

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} A_i = A_i^0 + \alpha_i F_p \qquad (i = 1, 2, \ldots, p-1), \\ A_p = A_p^0 - (\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_{p-1} F_{p-1}) \end{cases}$$

où A_p^0 est posé d'être ainsi, A_i^0 et α_i $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$ sont des fonctions holomorphes de (x, y) et spécialement les fonctions A_i^0 sont identiquement nulles si $\mu = 0$, et si $\mu > 0$ elles sont au plus égales à $\mu - 1$ en degré; A_p^0 est par suite une fonction holomorphe dans $[(\gamma), (\gamma')]$; le système de fonctions (A^0) ainsi choisi donne une solution de l'équation (1) dans $[(\gamma), (\gamma')]$, puisque (A) est une solution en (x_0, y_0); A_i^0 $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$ sont des polynomes par rapport à y, et pour A_p^0, on a

$$A_p^0 F_p = \Phi, \quad \Phi = -(A_1^0 F_1 + A_2^0 F_2 + \cdots + A_{p-1}^0 F_{p-1});$$

A_p^0 est donc une fonction rationnelle par rapport à y.

Or, la fonction $F_p(x, y)$ ne s'annule pas, lorsque (x) soit dans (γ) et y soit sur la circonférence γ'; si $\lambda > \mu$, elle se décompose donc, comme

$$F_p = F' \cdot F'',$$

où F' et F'' sont des polynomes par rapport à y, dont les coefficients sont des fonctions holomorphes des variables (x) dans (γ), et spécialement les coefficients des plus hautes puissances de y sont égaux à 1, et tels que (x') étant un point déterminé quelconque dans (γ), l'équation $F'(x', y) = 0$ n'ait de racine que dans le cercle (γ') et que l'équation $F''(x', y) = 0$ n'ait de racine qu'à l'extérieur du cercle; nous convenons lorsque $\lambda = \mu$ que $F' = F_p$, $F'' = 1$. La fonction $\Phi(x, y)$ est alors divisible par $F'(x, y)$, pusique $A_p^0(x, y)$ est holomorphe dans $[(\gamma), (\gamma')]$; posons donc,

$$\text{(B)} \qquad B_i = F'' A_i^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p);$$

B_p deviendra alors un polynome par rapport à y, holomorphe pour $(x) \in (\gamma)$; il en est à priori de même pour les autres B_i; le système de fonctions (B) satisfait à l'équation (1) pour $[(\gamma), (\gamma')]$, et par suite pour $(x) \in (\gamma)$.

Posons encore

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} B_i = B_i^0 + \beta_i F_p \qquad (i = 1, 2, \ldots, p-1), \\ B_p = B_p^0 - (\beta_1 F_1 + \beta_2 F_2 + \cdots + \beta_{p-1} F_{p-1}), \end{cases}$$

dont B_i^0 et β_i $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$ sont des polynomes par rapport à y, holomorphes pour $(x) \in (\gamma)$, et spécialement B_i^0 sont au plus égaux à $\lambda - 1$ en degré; la fonction B_p^0 ainsi posée, est donc un polynome par rapport à

y, holomorphe pour $(x) \in (\gamma)$; le système de fonctions (B^0) satisfait encore à 1'équation (1) pour $(x) \in (\gamma)$; B_p^0 satisfait donc à la relation

$$B_p^0 F_p = \Psi, \quad \Psi = -(B_1^0 F_1 + B_2^0 F_2 + \cdots + B_{p-1}^0 F_{p-1});$$

dont Ψ est au plus égale à $2\lambda - 1$ en degré par rapport à y, puisque $\lambda_i \leq \lambda$ $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$; B_p^0 est donc au plus égale à $\lambda - 1$ en degré par rapport à y.

Nous avons ainsi vu que, étant donnée l'équation fonctionnelle (1) jouissant de la propriété indiquée, à toute solution (A) pour un point (x_0, y_0) quelconque de $[(C), (C')]$, il correspond une solution (B^0) pour le point (x_0, y_0), consistant des polynomes par rapport à y de degré $(\lambda - 1)$ au plus, de façon que la correspondance soit donnée par les trois relations (A), (B) et (C).

La réunion des trois relations est de la forme,

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} A_i = \delta_p B_i^0 + \delta_i F_p & (i = 1, 2, \ldots, p-1), \\ A_p = \delta_p B_p^0 - (\delta_1 F_1 + \delta_2 F_2 \cdots + \delta_{p-1} F_{p-1}), \end{cases}$$

dont

$$\delta_i = \alpha_i + \frac{\beta_i}{F''}, \qquad \delta_p = \frac{1}{F''},$$

(δ) sont donc des fonctions holomorphes dans $[(\gamma), (\gamma')]$.

Considérons à nouveau l'équation fonctionnelle (1); $[(x) \in (C_0), y \in (C_0')]$ étant un polycylindre autour de 1'origine contenu dans le polycylindre $[(C), (C')]$, mais d'ailleurs quelconque, pour l'expression

$$\text{(3)} \qquad B_i^0 = C_{i1}\theta_{i1} + C_{i2}\theta_{i2} + \cdots + C_{iN}\theta_{iN'} \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

avec quelques identités parmi (C),

θ_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, N')$ étant des fonctions holomorphes des variables (x, y) dans le polycylindre $[(C_0), (C_0')]$ supposons les propriétés suivantes :

1° Considérons une solution (B^0) de l'équation (1) consistant des polynomes par rapport à y de degré $\lambda - 1$ au plus, holomorphes en un point (x^0) dans (C_0), mais d'ailleurs quelconque; (B^0) se représente alors de la forme (3) en tout point tel que $(x) = (x^0)$, $y \in (C_0')$ (dont (C) étant des fonctions holomorphes convenables, respectant naturellement les identités indiquées).

2° Considérons des fonctions (C) holomorphes en un point (x^0, y^0) de $[(C_0), (C_0')]$ (respectant naturellement les identités indiquées), mais d'ailleurs quelconque; le système de fonctions (B^0) correspondant satisfait alors en (x^0, y^0) à 1'équation (1).

Et nous appellerons pour le moment tout expression de ce caractère *solution formulaire conditionnelle, et* (B^0) *solution spéciale.*

Supposons maintenant la solution formulaire conditionnelle (3) ci-dessus; et nous disons que la réunion de (3) et la relation (D) donne une (vraie) solution formulaire de l'équation (1) dans le polycylindre $[(C), (C'_0)]$, en regardant δ_i $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$ et $\varepsilon_{ij} = (\delta_p C_{ij})$ $(i = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1, 2, \ldots, N')$ pour être les fonctions inconnues indépendantes.

En effet, la réunion prend la même forme que (2), dont le noyau consiste des fonctions déterminées (F) et (θ), holomorphes dans $[(C_0), (C'_0)]$. Considérons une solution (A) de 1'équation (1) en un point (x^0, y^0) de $[(C_0), (C'_0)]$, mais d'ailleurs quelconque; alors, d'après ce que nous venons de voir, la solution est représentée par la réunion. Considérons réciproquement des fonctions holomorphes (δ, ε) en un point (x^0, y^0) de $[(C_0), (C'_0)]$, mais d'ailleurs quelconques; et en substituant ce (ε) à (C) de (3), formons un système de fonctions (B^0); il satisfait alors à 1'équation (1) pour (x^0, y^0). Or, entre ce système (B^0) et le système (A) correspondant aux fonctions (δ, ε) d'après la réunion, il y a une des relations (D), dans laquelle $\delta_p = 1$; (B^0) satisfaisant à l'équation (1) pour (x^0, y^0), (A) l'est aussi. C.Q.F.D.

Il nous suffit donc de dire que l'équation fonctionnelle (1) jouissant de la propriété indiquée admette une solution formulaire conditionnelle au voisinage de l'origine.

5° (B^0) étant une solution spéciale de 1'équation (1) en un point (x^0) de (C), on a

$$\text{(A)} \qquad B_1^0 F_1 + B_2^0 F_2 + \cdots + B_p^0 F_p = 0;$$

soient

$$\begin{cases} B_i^0 = \alpha_{i0} y^{\lambda-1} + \alpha_{i1} y^{\lambda-2} + \cdots + \alpha_{i\lambda-1} \\ F_i = f_{i0} y^{\lambda} + f_{i1} y^{\lambda-1} + \cdots + f_{i\lambda} \quad (i = 1, 2, \ldots, p), \end{cases}$$

(α) et (f) étant des fonctions holomorphes des variables (x) au point (x^0); on a alors,

$$\sum B_i^0 F_i = \Phi_0 y^{2\lambda-1} + \Phi_1 y^{2\lambda-2} + \cdots + \Phi_{2\lambda-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

où

$$\begin{cases} \Phi_0 = \sum \alpha_{i0} f_{i0}, \\ \Phi_1 = \sum \alpha_{i0} f_{i1} + \sum \alpha_{i1} f_{i0}, \\ \Phi_2 = \sum \alpha_{i0} f_{i2} + \sum \alpha_{i1} f_{i1} + \sum \alpha_{i2} f_{i0}, \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ \Phi_{2\lambda-1} = \sum \alpha_{i\lambda-1} f_{i\lambda}; \end{cases}$$

la relation (A) est donc équivalentes à la relation suivante;

$$\text{(B)} \qquad \Phi_0 = 0, \quad \Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0, \; \ldots, \; \Phi_{2\lambda-1} = 0.$$

Dans la relation $(B), (f)$ sont des fonctions holomorphes déterminées dans (C); si l'on regarde (α) pour être fonctions inconnues, (B) deviendra *un système d'équations fonctionnelles (linéaires homogènes) simultanées*, et pour lequel le système de fonctions (α) actuel donnera une *solution* en (x^0, y^0). Or ce système d'équations simultanées, étant considéré à l'espace (x), admettra une *solution formulaire* en tout point de (C), comme nous le verrons plus tard, grâce à l'hypothèse que le problème (μ) soit toujours résoluble à l'espace (E) de moindres dimensions.

Supposons donc la suivantes : au système d'équations fonctionnelles simultanées (B), il correspond l'expression

$$\text{(C)} \qquad \alpha_{ij} = \sum \beta_{ijk} \rho_{ijk} \; (i=1, \ldots, p; j=0, \ldots, \lambda-1; k=1, \ldots, \nu)$$

avec quelques identites parmi (α),

dont ρ_{ijk} sont des fonctions déterminées holomorphes dans un polycylindre (C_0) contenu dans (C), et qui jouit de la propriété suivante :

1° Toute solution (α) de l'équation (B) pour un point (x^0) quelconque de (C_0) est représentée de la forme (C) en (x^0).

2° A toute combinaison de fonctions holomorphes (β) en un point (x^0) quelconque de (C_0), le système de fonctions (α) correspondant remplit l'équation (B) en (x^0).

En substituant α_{ij} de (C) à B_i^0, on obtient :

$$\begin{aligned} (D) \quad B_i^0 = & \sum \beta_{i0k} (\rho_{i0k} y^{\lambda-1}) + \sum \beta_{i1k} (\rho_{i1k} y^{\lambda-2}) + \cdots \\ & + \sum \beta_{i(\lambda-1)k} (\rho_{i(\lambda-1)k}) \quad (i = 1, 2, \ldots, p; k = 1, 2, \ldots, \nu) \end{aligned}$$

avec le même système d'identite's parmi (β) qu'à (C),

dont $(\rho_{iok} y^{\lambda-1}), \ldots$ sont des fonctions déterminées holomorphes dans (C_0), que nous regarderons comme noyau, et (β) comme fonctions inconnues.

Considérons une solution spéciale de l'équation (1), dont les fonctions sont holomorphes en un point (x^0) dans (C_0), mais d'ailleurs quelconque; puisque cela veut dire que le système (α) correspondant satisfait au système d'équations simultanées (B) en (x^0), (α) se représente de la forme (C) en (x^0); et par suite, (B_0) se représente de la forme (D) en tout point de la forme (x_0, y).

Considérons réciproquement des fonctions holomorphes (β) en un point (x^0, y^0) tel que $(x^0) \in (C_0)$, mais d'ailleurs quelconque; formons par (D) le système de fonctions holomorphes (B_0) des variables (x, y) en (x^0, y^0); et nous nous demanderons si (B_0) satisfait à l'équation (A) en (x^0, y^0). Or ceci est visiblement équivalent de former le système de fonctions holomorphes (α) des variables (x, y) en (x^0, y^0) par (C) avec la même combinaison de fonctions (β), et de se demander si ce (α) remplit le système d'équations simultanées (B); nous envisagerons donc le problème-ci :

En substituant dans (C) le développement de (β) en séries de puissances de $(y - y^0)$, on a le développement de (α); et en substituant ce développement-ci dans Φ_i $(i = 0, 1, \ldots, 2\lambda - 1)$ du système d'équations simultanées (B), on obtient les développements de Φ_i; et dont tous les coefficients sont visibleinent nuls identiquement; Φ_i le sont donc aussi.

L'expression (D) donne donc une solution formulaire conditionnaire de l'équation fonctionnelle pour $[(C_0), (C')]$. Il ne nous reste donc qu'a montrer l'existence de la solution formulaire (C) du système d'équations fonctionnelles simultanées (B).

6° Considérons à nouveau dans l'espace (x) un domaine D, et dans lequel des fonctions holomorphes $A_{ij}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, q; j = 1, 2, \ldots, p)$ (dont quelqu'unes peuvent s'annuler identiquement) ; et considérons *le système d'équations fonctionnelles (linéaires homogènes) simultanées*

$$(1) \qquad \begin{cases} A_{11}F_1 + A_{12}F_2 + \cdots + A_{1p}F_p = 0 \\ A_{21}F_1 + A_{22}F_2 + \cdots + A_{2p}F_p = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ A_{q1}F_1 + A_{q2}F_2 + \cdots + A_{qp}F_p = 0 \end{cases}$$

avec quelques identités parmi (A),

dont (A) sont des fonctions inconnues; parmi eux il existe en général quelques identités (sans cela, ce système se réduira à q équations isolées, et ceci générera la conception dans laquelle les équations (1) sont connexes ou non, mais ça nous est égal). Tout système de fonctions holomorphes (A) (respectant naturellement les identités indiquées et) satisfaisant à l'équation (1) sera appelé sa *solution*.

Considérons l'expression

$$A_{ij} = \sum C_{ijk}\pi_{ijk} \qquad (k = 1, 2, \dots, \lambda), \tag{2}$$

avec quelques identités parmi (C),

dont π_{ijk} sont des fonctions déterminées holomorphes dans D, et C_{ijk} sont des fonctions holomorphes indéterminées; supposons la propriété suivante :

1° Toute solution (A) de l'équation (1) pour un point P quelconque de D se représente de la forme (2) en P (en choisissant convenablement le système de fonctions holomorphe (A) en P respectant les identités).

2° A toute combinaison de fonctions holomorphes (C) (respectant les identités) en P, il correspond par (2) une solution (A) de (1) pour P.

Nous appellerons alors, l'expression (2) d'être une *solution formulaire* de l'équation (1); nous nous proposons :

Probleme (M) *Trouver une solution formulaire du système d'équations fonctionnelles simultanèes* (1) *au voisinage d'un domaine fermé* Δ *contenu dans* D.

Et nous disons que *le problème* (M) *à l'espace* (x) *est toujours résoluble, pourvu que le problème* (λ) *au même espace soit toujours résoluble.*

En effet, prenons les premières r équations $(r \leq q)$ des équations (1) avec les identités qui concernent ces équations; ceci fera encore un système d'équations fonctionnelles simultanées, que nous désignerons par (E_r).

(E_1) n'étant qu'une seule équation fonctionnelle, le problème (M) correspondant est résoluble d'après 1'hypothèse, il nous suffit donc de résoudre le problème (M) pour (E_{r+1}) $(r+1 \leq q)$ en supposant le problème resolu pour $(E_1), (E_2), \dots, (E_r)$.

En remplaqant les lettres $A_{r+1,i},\ F_{r+1,i}$ $(i = 1, 2, \dots, p)$ de la dernière équation de (E_{r+1}) par les nouvelles B_i, Φ_i, on a

$$\begin{cases} A_{11}F_1 + A_{12}F_2 + \cdots + A_{1p}F_p = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ A_{q1}F_1 + A_{q2}F_2 + \cdots + A_{qp}F_p = 0 \\ B_1\Phi_1 + B_3\Phi_2 + \cdots + B_p\Phi_p = 0, \end{cases} \tag{3}$$

avec quelques identités parmi (A, B).

D'après 1'hypothèse, (E_r) admet la solution formulaire

$$A_{ij} = \sum C_{ijk}\Psi_{ijk} \qquad (k = 1, 2, \dots, \mu) \tag{4}$$

avec quelque identites parmi (C),

(au voisinage de Δ); que nous substituons dans l'équation

$$B_1\Phi_1 + B_2\Phi_2 + \cdots + B_p\Phi_p = 0, \tag{5}$$

dont nous allons expliquer précisément :

Considérons B_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ pour être tout différents; et regardons B_1; si par exemple, B_1 est indépendant de (A) de (E_r) on conservera le terme $B_1\Phi_1$; possons à B_2, si par exemple, $B_2 = A_1$, on remplacera à $B_2\Phi_2$

$$\sum C_{11k}(\Psi_{11k}\Phi_2);$$

et ainsi de suite, et on aura à la place de (5),

$$B_1\Phi_1 + C_{111}(\Psi_{111}\Phi_2) + C_{112}(\Psi_{112}\Phi_2) + \cdots = 0; \tag{6}$$

que nous désignerons à nouveau par

$$D_1X_1 + D_2X_2 + \cdots + D_sX_s = 0 \tag{7}$$

où il y aura en général quelques identités parmi (D) (et (X) sont des fonctions déterminées holomorphes au voisinage de Δ).

C'étant le cas de (E_1), on trouve la solution formulaire suivante de l'équation (7) (au voisinage de Δ) :

$$D_i = \sum \gamma_{ij}\theta_{ij} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu), \tag{8}$$

avec quelques identités parmi (γ).

Dans (8), chacun de (D) signifie ou bien quelques (B) ou bien quelque (C). Prenons en ordre chaque A_{ij}, si ce n'est pas le cas où $A = B$, on conservera pour ce A-ci l'expression de (4), et au cas contraire, on substituera dans 1'expression du A de (4) les expressions des C_{ijk} qui le concernent, de (8); ensuite pour (B), prenons en ordre chaque B_i, si l'on trouve ce B-ci dans (8), on l'écrira, et si non, puisque c'est le cas de $A = B$, on récrira pour le B la nouvelle expression du A écrite ci-dessus; et on aura une certaine expression; que nous désignerons à nouveau par

$$\begin{cases} A_{ij} = \sum \delta_{ijk}\rho_{ijk} \\ B_i = \sum \delta'_{ik}\rho'_{ik} \quad (i = 1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, r,\ k = 1, \ldots, t), \end{cases} \tag{9}$$

avec quelques identités parmi (δ, δ'),

où (ρ, ρ') signifie le noyau et (δ, δ') les fonctions inconnues, et parmi les identités indiquées, les unes viennent de (4), des autres viennnent de (8) et les troisièmes ont lieu à nouveau, Nous allons envisager le caractère de cette expression.

Considérons une solution quelconque (A, B) de l'équation (3) pour un point quelconque P de Δ; (A), remplissant (E_r), se représente en forme (4) pour P, et (B) satisfaisant à (5), si l'on forme (D) suivant la régle expliquée, (D) satisfera à (7) en P; (D) se représente par suite de la forme (8); (A, B) se représente donc de la forme (9) en P.

Considérons réciproquement une combinaison quelconque de fonctions holomorphes (δ, δ') en un point quelconque P de Δ et formons le système de fonctions (A, B) correspondant d'après (9); envisageons d'abord (A); la partie de (9) représentant (A), ayant été formée en substituant (8) dans (4), n'est qu'un cas spécial de (4); (A) remplit donc (E_r) en P; il ne nous reste qu'à vérifier que (B) satisfasse à (5) en P. Or la condition (7) étant un cas spécial de la condition (5), si l'équation (7) est remplie, l'équation (5) sera remplie à fortiori; envisageons (9); dont la partie représentant (B) correspond à (D) de (8) par une relation de la forme

$$B = B = D \quad \text{ou} \quad B = A = \sum C\Psi = \sum D\Psi;$$

or, le (D) correspondant satisfait évidemment à (7), le (B) satisfait donc à (5), en P.

L'expression (9) est donc une solution formulaire de l'équation (3) au voisinage de Δ; le problème (M) à l'espace (x) est ainsi résoluble pour (E_{r+1}) sous l'hypothèse qu'il en soit ainsi pour $(E_1), (E_2), \ldots, (E_r)$; la proposition est donc vraie.

L'hypothèse à (6°) étant ainsi dissouse, *le problème* (K) *est toujours résoluble*; et par suite au voisinage du polycylindre fermé, les problèmes $(\mathrm{C}_1), (\mathrm{C}_2), (\mathrm{E}), (\mathrm{L})$ et (M) sont résolubles.

7. Conclusions. Nous répéterons.

Théorème I. *Etant données une combinaison de fonctions holomorphes* $[F_1(x), F_2(x), \ldots, F_p(x)]$ *et une fonctipn holomorphe* $\Phi(x)$ *au voisinage d'un polycylindre fermé* Δ *dans l'espace* (x)*, de façon que* $\Phi(x) \equiv 0 \mod (F)$ *en tout point de* Δ*, on peut choisir des fonctions* $A_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ *holomorphes au voisinage de* Δ*, telles qu'on ait identiquement*

$$\Phi(x) = A_1(x)F_1(x) + A_2(x)F_2(x) + \cdots + A_p(x)F_p(x).$$

(*Polycylindre est un ensemble cylindrique dont les composantes sont des cercles.*)

Théorème II. *Etant donnée une combinaison de fonctions holomorphes* $(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ *au voisinage d'un polycylindre fermé* Δ*, s'il correspond à tout point* P *de* Δ *un polycylindre* (γ) *autour de* P*, et une fonction* $\varphi(x)$ *holomorphe dans* (γ)*, de façon que pour toute paire de polycylindres* (γ')*,* (γ'') *ayant l'intersection* (δ) *les fonctions correspondantes* $\varphi'(x), \varphi''(x)$ *satisfassent à* $\varphi'(x) \equiv \varphi''(x) \mod (F)$ *en tout point de* (δ)*, on pourra trouver une fonction* $\Phi(x)$ *holomorphe au voisinage de* Δ *telle que* $\Phi(x) \equiv \varphi(x) \mod (F)$ *en tout point* P *de* Δ*.*

Théorème III. *Dans la configuration géométrique de théorème II, s'il correspond à tout* (γ) *un système fini de fonctions holomorphes* (f)*, de façon que pour toute paire* $(\gamma'), (\gamma'')$ *les systèmes correspondants* $(f'), (f'')$ *soient équivalents en tout point de l'intersection* (δ)*, on pourra trouver un système fini de fonctions holomorphes* (F) *au voisinage de* Δ*, tel que* $(F) \sim (f)$ *en tout point* P *de* A*.*

Théorème IV. *Etant données des fonctions* $F_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ *holomorphes au voisinage d'un polycylindre fermé* Δ*, on peut trouver une solution formulaire de l'équation fonctionnelle* $A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_pF_p = 0$ *au voisinage de* Δ*. Il en est de même pour les systèmes d'équations fonctionnelles linéaires homogènes simultanées.*

Nous nous sommes restreint aux polycylindres fermés, puisqu'alors, en vertu des propriétés intrinsèques, les problèmes deviendront d'être résolus pour les ensembles fermés moins restrictifs. Outre les théorèmes ci-dessus, nous avons vu au No.5 *le théorème du reste*. Concernant ces théorèmes, si nous espérons l'application suffisante, nous serons obligés de l'étudier *quantitativement*.

Nous avons ainsi expliqué d'un côté des résultats. Nous allons parler de l'autre côté, ou nous avons acquis le problème :

Problème (J) *Pour les idéaux de domaines indéterminés, trouver les pseudobases finies locales.*

Pour ce problème, je ne sais presque rien, même quelle attitude sera favorable pour l'étudier. Seulement, on ne peut pas résoudre tous les problèmes à la fois et sans condition, puisque nous avons vu un exemple contraire au No.2.

Comme cas particulier de ce problème, nous venons de résoudre le *problème* (K). Ceci a été indispensable pour établir les théorèmes ci-dessus. Nous reviendrons encore une fois à ce problème, et montrerons, pour *les* *idéaux géométriques de domaines indéterminés*, qu'il est résoluble sans condition. Cela est indispensable à nous, pour traiter les problèmes depuis le Mémoire I en admettant les points de ramifications d'intervenir. Ces deux exemples parlerons de 1'importance du problème.

(Juillet 1948 à Kimimura, Wakayama-Ken, Japon. Reçu le 15 octobre, 1948.)