

# ガウス事前分布を用いたスパイク発火率の MAP 推定アルゴリズム

## Maximum a posteriori probability estimation algorithm of firing rate using Gaussian prior distribution

久保智洋 (PY)<sup>†</sup>, 渡辺一帆<sup>†</sup>, 岡田真人<sup>†‡</sup>

Tomohiro Kubo (PY), Kazuho Watanabe, and Masato Okada

<sup>†</sup> 東京大学大学院新領域創成科学研究科 <sup>‡</sup> 理化学研究所脳科学総合研究センター

tomohiro@mns.k.u-tokyo.ac.jp

**Abstract**— We investigate the properties of firing rate estimation method by framework of Bayesian estimation. We devise an efficient estimation algorithm for maximum a posteriori probability method (MAP method). Additionally we investigate its properties.

**Keywords**— Bayesian estimation, Firing rate estimation, Maximum a posteriori probability method, cubic equation

### 1 はじめに

神経細胞が出す出力信号はスパイク（発火）と呼ばれるパルス電流によって表現される。スパイクは他の様々な神経細胞からの入力や外的要因によって時間的に不規則な振る舞いを示し、ある種の確率過程として捉える事が出来る。この時、神経細胞は背後にある発火率関数によって確率的に発火、若しくは非発火の状態を制御していると考えられる。発火率関数は神経細胞が情報伝達を行う際の重要な量であると考えられるため、スパイクの時系列データから時間的に変動する発火率関数を推定する事が行われている [1][2]。今回我々はベイズ事後確率を最大にする発火率を推定値として用いる事後確率最大化 (MAP) 法によるスパイク発火率推定法の性質について考察した。発火率の事前分布としてガウス分布を仮定すると、MAP 推定量を求めるための方程式は一般に三次方程式で表わされることを示し、その解を与える。

### 2 発火率推定のモデル

本研究では、発火率推定のためにベイズ推定を用いる。ベイズの定理は、

$$P(\{\lambda_i\}|\{X_i\}) = \frac{P(\{X_i\}|\{\lambda_i\})P(\{\lambda_i\})}{\int P(\{X_i\}|\{\lambda_i\})P(\{\lambda_i\})d\{\lambda_i\}} \quad (1)$$

で表される。 $\lambda_i$  は発火率を表し、 $X_i$  はスパイクデータを表わす。スパイクデータは非発火の時に 0、発火の時に 1 をとる二値のパラメータとする。左辺は事後分布と呼ばれ、発火率  $\lambda_i$  をデータ  $X_i$  から推定する分布であり、その分布を発火率  $\lambda_i$  からデータ  $\{X_i\}$  が生じる確率  $P(\{X_i\}|\{\lambda_i\})$  と発火率そのものが生じる確率  $P(\{\lambda_i\})$  という二つの分布から求めることができることを示している。MAP 推定法では左辺の事後分布を最大にするよ

うな  $\lambda_i$  を計算する推定法である。モデル  $P(\{X_i\}|\{\lambda_i\})$  と事前分布  $P(\{\lambda_i\})$  は以下のように与えた。

$$P(\{X_i\}|\{\lambda_i\}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i^{X_i} (1 - \lambda_i)^{1 - X_i} \quad (2)$$

$$P(\{\lambda_i\}) = \frac{1}{Z(\beta)} \prod_{i=1}^n \exp\left\{-\frac{\beta}{2}(\lambda^T A \lambda)^2\right\} \quad (3)$$

行列  $A$  の  $(ij)$  成分を  $a_{ij}$  と表記する。ベイズの定理で右辺の分母は定数となるので、右辺の分子に  $\log$  をとったものを  $L$  とする。

$$L = \log [P(\{X_i\}|\{\lambda_i\})P(\{\lambda_i\})]$$

### 3 MAP 推定法

MAP 推定量を求めるアルゴリズムとして以下のものを提案する。

1.  $\{\lambda_i\}$  に適当な初期値を与える。
2.  $i = 1, 2, \dots, N$  に対し、 $\lambda_j (j \neq i)$  の値を固定し、 $\lambda_i$  に関する  $L$  の最大化を行うことを  $\{\lambda_i\}$  が収束するまで繰り返す。

2 における  $L$  の最大値を与える  $\lambda_i$  は以下のようになる。ここで  $\sum_{j \neq i} a_{ij} \lambda_j = \Phi_i$  とする。

(i)  $X_i = 0$  の場合

$$\lambda_i = \frac{\beta(a_{ii} - \Phi_i) - \sqrt{\beta^2(\Phi_i + a_{ii})^2 + 4a_{ii}\beta}}{2a_{ii}\beta},$$

$$\left(\frac{-\Phi_i}{a_{ii}} > \frac{1}{a_{ii}\beta} \text{ のとき}\right)$$

$$\lambda_i = 0, \quad \left(\frac{-\Phi_i}{a_{ii}} \leq \frac{1}{a_{ii}\beta} \text{ のとき}\right)$$

(ii)  $X_i = 1$  の場合

$$\lambda_i = \frac{\beta(-\Phi_i) + \sqrt{\beta^2(\Phi_i)^2 + 4a_{ii}\beta}}{2a_{ii}\beta},$$

$$\left(\frac{-\Phi_i}{a_{ii}} < 1 - \frac{1}{a_{ii}\beta} \text{ のとき}\right)$$

$$\lambda_i = 1, \quad \left(\frac{-\Phi_i}{a_{ii}} \geq 1 - \frac{1}{a_{ii}\beta} \text{ のとき}\right)$$

(i),(ii) それぞれにおいての場合分けは  $\beta$  の値によって、発火率が 0 に張り付く場合と 1 に張り付く場合が生じることを意味する。3.1,3.2 で具体例を出す。

[解の導出]  $\{\partial L(\lambda_i)/\partial \lambda_i\} = 0$  を考える。

$$\frac{L(\{\lambda_i\})}{\partial \lambda_i} = \frac{X_i}{\lambda_i} - \frac{1 - X_i}{1 - \lambda_i} - \beta(\lambda_i a_{ii} + \Phi_i) = 0$$

$\lambda_i \neq 0, 1$  とすると、 $\lambda_i$  の三次方程式が導出される。その三次方程式は発火、非発火の状態、つまり、 $X_i = 0, X_i = 1$  に場合分けをして考える。右辺を整理すると

$X_i = 0$  の場合、

$$a_{ii}\beta\lambda_i^3 - \beta(a_{ii} - \Phi_i)\lambda_i^2 - (1 + \beta\Phi_i)\lambda_i = 0$$

$X_i = 1$  の場合、

$$a_{ii}\beta\lambda_i^3 - \beta(a_{ii} - \Phi_i)\lambda_i^2 - (1 + \beta\Phi_i)\lambda_i + 1 = 0$$

$X_i = 0$  の時は  $\lambda_i$  の解の一つが  $\lambda_i = 0$  であり、 $X_i = 1$  の時は  $\lambda_i = 1$  となることが計算からわかる。これにより、三次方程式を二次方程式におとし、各々の  $\lambda_i$  を求める。[導出終わり]

(3) 式の事前分布は一般の二次形式で表わされている。次節で事前分布として発火率の滑らかさを仮定して、一階微分形式と二階微分形式を用いた例を示す。

### 3.1 一階微分形式

(3) 式で  $a_{ii} = 2, a_{ii+1} = -1, a_{ii-1} = -1$  とした次の事前分布を考える。

$$P(\{\lambda_i\}) = \frac{1}{Z(\beta)} \prod_{i=1}^n \left\{ -\frac{\beta}{2} (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^2 \right\}$$

ここで、 $\lambda_{i+1} + \lambda_{i-1} = \Lambda_1$  とし、発火率について解くと、 $X_i = 0$  のときは

$$\lambda_i = \frac{\beta(2 + \Lambda_1) - \sqrt{\beta^2\{(\Lambda_1 - 2)\}^2 + 8\beta}}{4\beta}$$

発火率が 0 に張り付く条件は  $\frac{\Lambda_1}{2} < \frac{1}{2\beta}$ 。

発火率  $X_i = 1$  のとき

$$\lambda_i = \frac{\beta(\Lambda_1) + \sqrt{\beta^2(\Lambda_1)^2 + 8\beta}}{4\beta}$$

発火率が 1 に張り付く条件は  $\frac{\Lambda_1}{2} > 1 - \frac{1}{2\beta}$ 。

図 1. は一階微分形式で発火率推定をおこなった例であり、 $N = 500, \beta = 2050$  とした。

### 3.2 二階微分形式

(3) 式で  $a_{ii} = 6, a_{ii+2} = 1, a_{ii+1} = -4, a_{ii-1} = -4, a_{ii-2} = 1$  とした次の事前分布を考える。

$$P(\{\lambda_i\}) = \frac{1}{Z(\beta)} \prod_{i=2}^n \left\{ -\frac{\beta}{2} (\lambda_{i+1} - 2\lambda_i + \lambda_{i-1})^2 \right\}$$

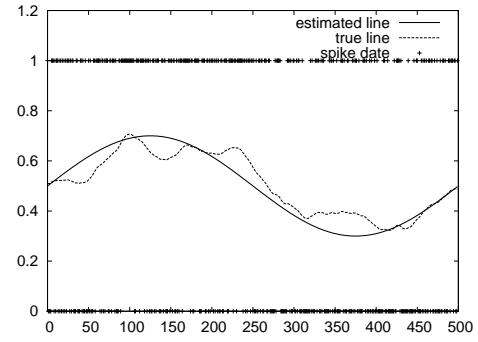


図 1:  $N = 500$  のときの適用例 (+ は実際のデータ)

ここで  $\lambda_{i+2} - 4\lambda_{i+1} - 4\lambda_{i-1} + \lambda_{i-2} = \Lambda_2$  とし、発火率について解くと、 $X_i = 0$  のときは

$$\lambda_i = \frac{\beta(-\Lambda_2 + 6) - \sqrt{\beta^2(\Lambda_2 + 6)^2 + 24\beta}}{12\beta}$$

発火率が 0 に張り付く条件は  $\frac{-\Lambda_2}{6} < \frac{1}{6\beta}$ 。

発火率が  $X_i = 1$  のとき

$$\lambda_i = \frac{\beta\Lambda_2 + \sqrt{\beta^2(\Lambda_2)^2 + 24\beta}}{12\beta}$$

発火率が 1 に張り付く条件は  $\frac{-\Lambda_2}{6} > 1 - \frac{1}{6\beta}$ 。

## 4 考察

目的関数  $L$  について凸性を考察する。凸関数の和は凸関数なので、ベクトルにおいてもこの関係が成り立つ。 $L$  については、対数関数と二次関数の凸性から、 $\log[P(X_i|\lambda_i)], \log[P(\lambda_i)]$  が凸関数であるので、 $L$  も凸関数であることがわかる。このような各変数を逐次的に最適化する方法では一般に大域最適解を得られる保証はないが、目的関数の凸性から任意の初期値をとっても大域最適解を導出することができる。

## 5 結論

ベイズ推定の枠組みによるスパイク発火率推定法の性質について考察した。MAP 推定法のための、比較的簡便な推定アルゴリズムを導出し、その性質を調べた。今回導出したアルゴリズムを用いると発火率推定の計算を非常に早く行うことができる。最急上昇法のように更新を制御する変数を決める必要がない。今回はハイパーパラメータ  $\beta$  は固定して扱ったが、本来はデータから推定する必要がある。ハイパーパラメータの推定法を確立することは今後の課題である。

## 参考文献

- [1] Shinsuke Koyama, Takeaki Shimokawa and Shigeru Shinomoto. "Phase transitions in the estimation of event-rate: A path integral analysis." J. Phys. A (2007), 40, E383-E390.
- [2] 田中浩之, 三浦圭二, 渡辺一帆, 岡田真人 (2008) "転送行列法を用いた発火率推定." 信学技報, vol. 107, no. 413, NC2007-96, pp. 55-60.