

特徴抽出問題の解として導出される V1 細胞受容野のモデル

A theory of V1 receptive fields as optimal feature detectors

佐藤 俊治 (PY)[†], 臼井 支朗[†]

Shunji Satoh (PY) and Shiro Usui

[†] 理化学研究所脳科学総合研究センター shun@brain.riken.jp

Abstract—A novel receptive-field model of V1 simple cells is introduced as the solution of a feature detection problem. The spatial/spatial-temporal profiles are consistent with physiological evidence.

Keywords—V1 simple cell, receptive field, model

1 はじめに

Gabor 関数は、位置と空間周波数の不確定性積を最小化する関数であり、V1 野単純型細胞の受容野モデルとしても広く用いられている。しかし、ゼロ交差(興奮性/抑制性領域の境界)が常に等間隔であり(図 1(a))、神経生理学的知見と一致しない[1]。一方、Gaussian derivative モデル (GD モデル, [1]) はゼロ交差の問題を解決するが、奇関数もしくは偶関数しか表現できず、非対称的な受容野を表現できない。また「GD 関数は何を最適化している関数なのか」を明らかにする理論的考察がない。

我々はこれらの問題を解決するために、「V1 単純型細胞の計算論的役割は、画像を効率良く表現・分解し(2.1 節)、分解された画像の強度を正確に計算し(2.2 節)、かつ、網膜像のずれにも対応した計算を行なうこと(2.3 節)」であると、新しい受容野モデルの導出を試みた。

2 V1 単純型細胞の空間受容野モデル

本研究では問題を簡単にするため、図 1(a)にあるように、受容野の最適方位と直交する x 軸を定め、 x 軸上の受容野空間分布について考察する。

2.1 画像の表現・展開

網膜像を $J(x)$ と記す。 $x = 0$ まわりの局所網膜像を $f(x)$ とし、次式で表現する： $f(x) = w(x) \cdot J(x)$ 。 $w(x)$ は窓関数であり、一例として矩形窓や Gauss 窓が挙げられる。本稿では $J(x)$ と $f(x)$ をそれぞれ、複数の基底関数 $\{J_i(x)\}$ および $\{u_i(x)\}$ の線形和で表現する：

$$J(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \cdot J_i(x), \quad f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \cdot u_i(x). \quad (1)$$

なお、 $u_i(x) = w(x) \cdot J_i(x)$ である。以降、 $J_i(x)$ を i 番目の画像特徴、 $b_i \in \mathbb{R}$ を J_i または u_i に対応する特徴量(画像特徴の強度)と呼ぶ。また、フーリエ変換を \mathcal{F} とし、任意の関数 $a(x)$ に対して $\hat{a}(\omega) = \mathcal{F}[a(x)]$ と記す。例えば、 $\hat{f}(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \cdot \hat{u}_i(\omega)$ と書ける。

我々は、任意の $u_i(x)$ または $\hat{u}_i(\omega)$ が満たすべき自然な条件として、下記 4 つの条件を考えた。本節の目的

は、下記 4 条件を満たす $\{u_i(x)\}$ を求めることである。

1. 局所性：局所画像特徴 $u_i(x)$ は $x = 0$ 周りに局在している。また、 $u_i(x = \pm\infty) = (d/dx)u_i(x = \pm\infty) = 0$ とする。
2. 直交性： $u_i(x)$ と $u_j(x)$ は $i \neq j$ であるとき直交。効率的に $f(x)$ を展開するために必要な条件。
3. 正規性： $\int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{u}_i(\omega)\|^2 d\omega = 1$ 。
4. 完備性： $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)] = f(x)$ であるとき、任意の $\hat{f}(\omega)$ が、 $\sum_{i=0}^{\infty} b_i \cdot \hat{u}_i(\omega)$ の形式で表現できる。

我々は、上記条件を満たす $\{u_i(x)\}$ を求める問題は、汎関数 $L[u] = M[u] + 2n \cdot K[u]$ (n は未定乗数) を極小化する変分問題と等価であることを見出した。ただし、

$$M[u] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \{u(x)\}^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \|\hat{u}(\omega)\|^2 d\omega, \quad (2)$$

$$K[u] = \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{u}(\omega)\|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \{u(x)\}^2 dx, \quad (3)$$

である。以下、等価である理由を、直交性(条件 2.) についてのみ簡単に述べる。 $L[u]$ を極小化する解として、未定乗数 n に対応した複数の解が得られるが、 $L[u]$ は Sturm-Liouville 問題を生じる変分問題の汎関数であるため、 $\{u_i(x)\}$ の直交性は数学的に保証されている。

具体的には以下の解が得られた。

$$w(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad J_n(x) = \frac{H_n(x)}{\sqrt{2^n \Gamma(n+1) \sqrt{\pi}}}, \quad (4)$$

$$u_n(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot H_n(x)}{\sqrt{2^n \Gamma(n+1) \sqrt{\pi}}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5)$$

ただし、 $H_n(x)$ は n 次の Hermite 多項式である。

2.2 特徴量計算

V1 単純型細胞 S_n の計算論について考察する。 S_n の受容野モデルを $g_n(x)$ と記す。本稿では線形入出力モデルを考え、出力を s_n と記す： $s_n = \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) \cdot J(x) dx$ 。我々は「V1 単純型細胞 S_n の役割の一つは、式(5)で求めた局所画像特徴 $u_n(x)$ が網膜像 $J(x)$ の中にどれだけ含まれているかを計算すること、すなわち、特徴量 b_n を $J(x)$ から正確に計算することである」と考えた。すなわち解くべき問題は、 $\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) \cdot J(x) dx = b_n$ を満たす $g_n(x)$ を求めることになる。 $\{u_i(x)\}$ の正規直交性を用いると、次の解が簡単に得られる。

$$g_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} u_n(x) = \frac{e^{-x^2} \cdot H_n(x)}{\sqrt{2^n \Gamma(n+1) \sqrt{\pi}}}. \quad (6)$$

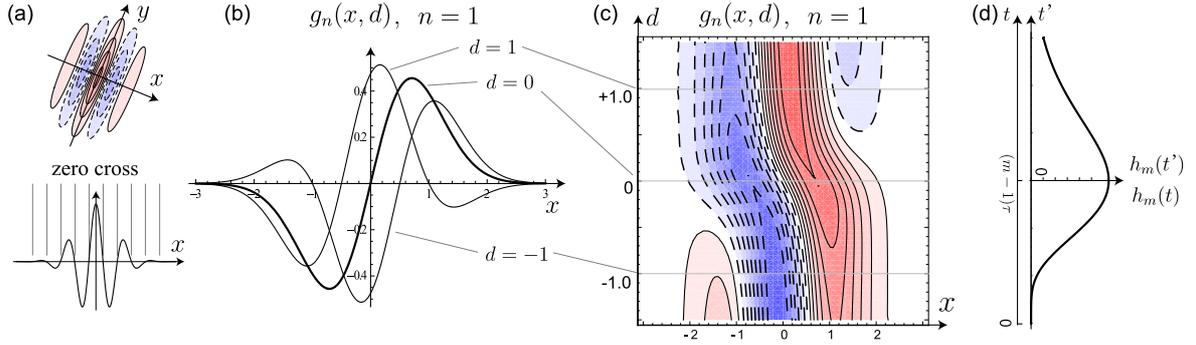


図 1: (a): Gabor 関数の例。実線と破線はそれぞれ、正值 (興奮性) と負値 (抑制性) の等高線。(b), (c): $g_n(x; d)$ のプロット。ただし見やすいように、 $1/\sqrt{1+d^2 \cdot 2(n+1)}$ を乗じている。(d) 関数 $h_m(t') = h_m(t + (m-1)\tau)$

2.3 ずれた網膜像に対する特徴抽出

網膜像は固視微動などによって空間的にずれるため、ずれた網膜像 $J(x+d)$ から、特徴量 b_n を抽出する処理は、視覚系にとって重要な処理であると予想される。この問題は、窓関数を $w(x) = e^{-x^2/2}$ に固定したまま、

$$b_n = \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x; d) J(x+d) dx, \quad (7)$$

を満す $g_n(x; d)$ を求めることに相当する。ずれた画像特徴 $J_n(x+d)$ が Hermite 多項式 $H_n(x+d)$ で記述されることに注意し、定理 $H_n(x+d) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (2d)^{n-i} H_i(x)$ を用いることで、式 (8) の解が得られる。ただし $O(d^2)$ 以降は小さいとして無視した。

$$g_n(x; d) = g_n(x) - d\sqrt{2(n+1)}g_{n+1}(x). \quad (8)$$

式 (8) が、本稿で提案する空間受容野モデルである。図 1(b) と図 1(c) に $g_n(x; d)$ の一例を示すが、非対称的な受容野を表現できることがわかる。また、非等間隔なゼロ交差位置を再現していることもわかった。

2.4 Gaussian derivative モデルとの関係

式 (8) の $g_n(x; d)$ は $d=0$ の場合、式 (6) の $g_n(x)$ と等しくなり、これは n 階微分の GD モデルと一致する。すなわち GD モデルは、網膜像がずれない場合に限り、 b_n を計算できる関数であることがわかった。ところで、式 (6) の n は、形式的には整数である必要はなく、実数 $\alpha \geq 0$ であってもよい。このとき、 $g_\alpha(x) \simeq g_n(x; d)$ (α は n と d の関数) であることが、我々の計算によってわかっている。すなわち、実数階微分 (例えば 2.34 階微分) の GD モデル $g_\alpha(x)$ が自然に定義され、これを受容野モデルとしても、ずれた網膜像から特徴量を計算することができる。詳細は、あらためて報告したい。

3 V1 単純型細胞の時空間受容野モデル

式 (8) の結果を利用して、速度 v で移動する網膜像 $J(x+vt)$ の中から特徴量 b_n を抽出 (計算) する、時空間受容野モデル (運動方向選択性受容野) の導出を試みる。すなわち、 $b_n = \iint_{-\infty}^{\infty} g_n(x; d) \cdot J(x+vt) dx dt$ を満す $g_n(x, t; v)$ を求める。

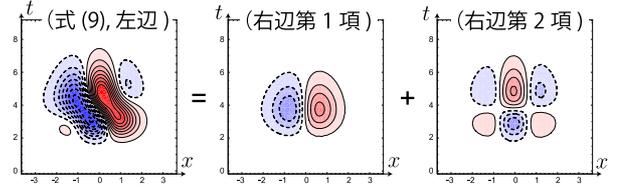


図 2: 計算論的に導出された運動方向選択性受容野

まず、 $\int_{-\infty}^{\infty} h_m(t) dt = 1$ を満す関数 $h_m(t)$ を定義する。本稿では、 m 次遅れの伝達関数を用いる: $h_m(t') = \Theta(t') \cdot \frac{(t'/\tau)^{m-1}}{\tau \Gamma(m)} e^{-t'/\tau}$ 。ただし、 $t' = t + (m-1)\tau$ 、 τ は時定数、 $\Theta(t')$ は t を変数とするステップ関数である (図 1(d))。関数 $h_m(t)$ の時間積分が 1 なので、恒等的に $b_n = \int_{-\infty}^{\infty} b_n \cdot h_m(t) dt$ が成立する。この恒等式の右辺に、式 (7) と (8) を代入し、 $d = vt'$ とすると $g_n(x, t; v)$ の解が得られる。

$$g_n(x, t; v) = g_n(x) h_m(t') + (-v)\sqrt{2(n+1)}g_{n+1}(x) \cdot t' h_m(t'). \quad (9)$$

本研究で導かれた式 (9) の運動方向選択性受容野モデル $g_n(x, t; v)$ は、時間と空間に関して separable な関数の和で表現できることを意味する。図 2 に、 $\{n = 0.9, v = 0.7, m = 16, \tau = 1/4\}$ であるときの $g_n(x, t; v)$ と、これを構成する式 (9) の右辺第 1 項と第 2 項を示す。図 2 の結果は、De Valois による神経生理学的実験結果 (文献 [2] の Fig7(b)) と定性的に一致する。

4 まとめ

V1 単純型細胞の新しい空間/時空間受容野モデルを、特別な仮定を導入せずに行うことができた。今後は、視差選択性受容野モデルなどにも取り掛かる予定である。

参考文献

- [1] R.A. Young *et al.* (2001) "The gaussian derivative model for spatio-temporal vision: I. cortical model." *Spatial Vision*, **14**, 261–319.
- [2] R.L. De Valois, *et al.* (2000) "Spatial and temporal receptive fields of geniculate and cortical cells and directional selectivity." *Vision Research*, **40**, 3685–3702.