

細胞新生する連想記憶モデルの統計力学的解析

Statistical mechanics of the Hopfield model with replacing units

小松 靖直 (PY)[†], 青西 亨[†] 倉田耕治[‡]

Yasunao Komatsu(PY), Toru Aonishi, Koji Kurata

[†] 東京工業大学大学院 [‡] 琉球大学

y-komatsu@acs.dis.titech.ac.jp

Abstract— This paper described a property of the Hopfield model in which a number of units are replaced by newborn ones when the networks learn. So in our network, every time a number of neurons die and the same number of neurons are born. We analyzed the network with replacing neuron by statistical mechanics. We found that the critical number of replacing units was $R_c = 3.2$ avoiding overloading and independent to the network size.

Keywords— associative memory, rebirth neuron, overloading, statistical mechanics

1 はじめに

近年、海馬やその周辺の部位で神経細胞の新生が起きていることが多数報告されている。細胞の新生が記憶の情報処理にどのような影響を及ぼしているのであろうか。細胞の新生により、回路に埋め込まれた情報が破壊されることはないのであろうか。

このような細胞新生が神経回路の性能に与える影響を明らかにするため、我々は連想記憶モデルとして最も典型的な Hopfield モデルに着目する。Hopfield モデルには臨界記憶容量 $0.138N$ が存在し (素子数 N)、この数を超えるパターンを埋め込むとオーバーロードになり、それまでに学習した全記憶パターンを想起できなくなる。一方、ある数の素子を新しい素子と入れ換える、即ち新生させることで、オーバーロードを防ぎ最近学習した記憶パターンを安定して保持することが可能である [1]。本研究では統計力学を用いた解析により、素子数とは無関係に各学習ステップごと 3.2 個の素子を新生させると記憶パターンが安定して保持されることを示す。また類似の構造を持つ指数忘却モデルと細胞新生モデルの関係について議論する。

2 定式化

この章では Hopfield モデルにおける素子新生を定式化する。回路は N 個の素子で構成されているとする。時刻 t での i 番目の素子の状態を $s_i(t)$ 、素子 j と i を結ぶ結合荷重を J_{ij} とすると、状態 $s_i(t)$ を $s_i(t+1)$ に更

新する状態方程式は次式のようになる。

$$s_i(t+1) = \text{sgn} \left[\sum_{j=1}^N J_{ij} s_j(t) \right] \quad (1)$$

次に素子新生と結合荷重について述べる。過去へ遡る時間を μ 、その各時刻ごと独立に細胞が R 個生まれ変わるものとする。この場合、新生 (死亡) 確率は R/N となる。このときの結合荷重を以下のようにする、

$$J_{ij} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \xi_i^{\mu} u(t_i - \mu) \xi_j^{\mu} u(t_j - \mu), \quad u(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 μ 番目の記憶パターンを ξ^{μ} ($1 \leq \mu$) とし、その i 番目の成分 ξ_i^{μ} ($1 \leq i \leq n$) を $\text{Prob}[\xi_i^{\mu} = \pm 1] = 0.5$ と独立に生成する。また、 t_i は素子 i が新生した時間である。ステップ関数 $u(t_i - \mu)$ より新生以前の記憶パターンの結合加重 J_{ij} への関与が消去される。各時刻ごと独立に細胞が R 個生まれ変わる場合、新生素子 i が時刻 $\mu = t_i$ で新生する確率は、

$$P(t_i) = \frac{R}{N} \left(1 - \frac{R}{N} \right)^{t_i - 1} \quad (3)$$

である。各時刻の各パターンの寄与を決めているステップ関数 $u(t_i - \mu)$ の平均を求めると、 $N \rightarrow \infty$ において

$$E[u(t_i - \mu)] = \sum_{t_i=1}^{\infty} P(t_i) u(t_i - \mu) = \exp(-R\alpha) \quad (4)$$

ここで、 α は素子数 N でスケールされた時間 $\alpha = \mu/N$ である。したがって、ステップ関数 $u(t_i - \mu)$ は忘却の効果に対応している。

3 統計力学

上記のモデルに対して、SCSNA (Self-Consistent Signal-to-Noise Analysis) を適用する。以下の巨視方程式が導かれる、

$$\begin{aligned} m^{\psi} &= \int_{\psi}^{\infty} d\tau P(\tau) \text{erf} \left[\frac{u(\tau - \psi) m^{\psi}}{\sqrt{2}\sigma(\tau)} \right], \\ \Gamma(\alpha) &= \int_{\alpha}^{\infty} d\tau P(\tau) \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2(\tau)}} \exp \left(-\frac{u(\tau - \psi) (m^{\psi})^2}{2\sigma^2(\tau)} \right), \\ \sigma^2(\tau) &= \int_0^{\tau} d\alpha' \frac{\exp(-R\alpha')}{(1 - \Gamma(\alpha'))^2}, \quad P(\tau) = R \exp(-R\tau). \end{aligned}$$

m^ψ は、素子数 N でスケーリングされた時間 $\psi = \rho/N$ に記憶したパターン ξ^ρ と素子の状態 s のオーバーラップである。 $\Gamma(\alpha)$ は帯磁率であり、連続関数となっている。また、 $P(\tau)$ は新生確率であり、 $N \rightarrow \infty$ で式 (3) より得られる。

4 計算機実験と理論の比較

上記の確率的に定義した素子新生を数値実験では以下のように実装する。ステップ μ の記憶パターン ξ^μ において、 $R \sum_{\nu=1}^{\mu} (1 - \frac{R}{N})^{\nu-1}$ 個の要素に 0 を割り当てた。この操作により、各ステップで新生せずに生き残る細胞が指数関数的に減少することになる。図 1 に数値実験の結果と、巨視方程式から求めた結果を示す。縦軸が $\psi = 0$ のパターンと素子の状態のオーバーラップ、横軸が新生数 R である。図 1 の理論曲線では、オーバーラップが一次相転移した臨界値は $R_c = 3.19$ であった。すなわち、ネットワーク規模に関係なく各学習ステップごと 3.2 個の素子を新生させると、オーバーロードを防ぎ、近接した記憶パターンを安定して保持できる。

5 指数忘却と細胞新生の関係

記憶パターンを忘却することにより、神経細胞の新生と同様にオーバーロードによる記憶パターン全体の不安定化を防ぐことが知られている。指数忘却をもつ場合の結合荷重は以下のように与えると、

$$J_{ij} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \exp\left(-\gamma \frac{\mu}{N}\right) \xi_i^\mu \xi_j^\mu, \quad (5)$$

以下の巨視方程式が導かれる、

$$m^\psi = \operatorname{erf}\left[\frac{\exp(-\gamma\psi)m^\psi}{\sqrt{2\sigma}}\right],$$

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\exp(-\gamma\psi)m^\psi)^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$\sigma^2 = \int_0^\infty d\alpha' \frac{\exp(-2\gamma\alpha')}{(1 - \exp(-\gamma\alpha')\Gamma)^2},$$

一次相転移を防ぎ、記憶パターンを安定して想起できる忘却率 γ の臨界値が $\gamma_c = 1.6$ であることが知られている。これに対して細胞新生数の臨界値は $R_c = 3.19$ であり、忘却の 2 倍になっている。

細胞新生の巨視方程式は、指数忘却の巨視方程式を外から新生確率 (式 (3)) で平均する形になっている。細胞新生の場合、素子 i の局所場 h_i に着目すると、 $N \rightarrow \infty$ では大域結合により、式 (4) の平均操作が行われ、

$$h_i = \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{j=1(j \neq i)}^N u(t_i - \mu) \exp\left(-R \frac{\mu}{N}\right) \xi_i^\mu \xi_j^\mu s_j, \quad (6)$$

となる。よって、他の細胞の生死の影響は平均として作用する。しかしながら、素子 i 自体の生死は相互作用に

より平均化できないので、統計力学的手法によりシステムを一体化した際には、個々の素子の揺らぎを巨視方程式の外から平均しなければならない。これが、細胞新生の巨視方程式が指数忘却と比べて複雑になる原因である。

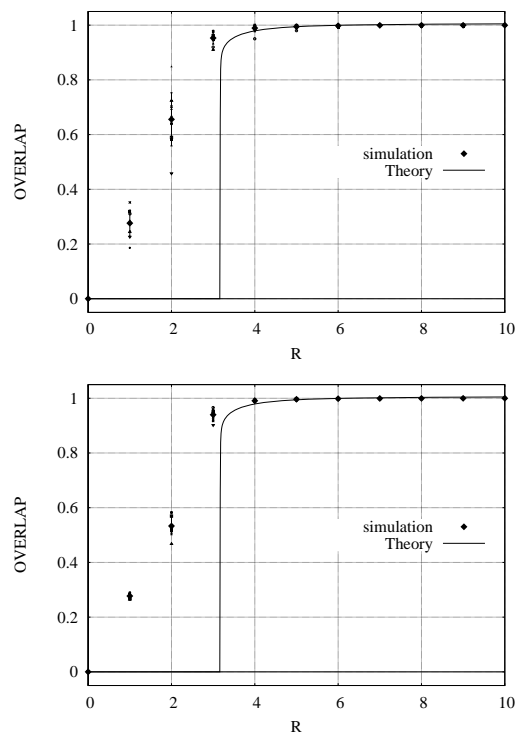


Fig 1: 細胞新生数 R と記憶パターンの安定性。 $\psi = 0$ に覚えたパターンを想起できるかどうかで判定する。上: $N = 1000$ 。下: $N = 5000$ 。各図の実線は巨視方程式より求めたオーバーラップ

6 結び

神経細胞の新生により連想記憶回路のオーバーロードを防ぎ、最近学習した記憶パターンを安定して保持できることが統計力学的解析により明らかになった。

本研究で求めた臨界新生数は先行研究が数値的に求めた値と異なっている [1]。先行研究では、ステップ μ の記憶パターン ξ^μ の $R \cdot \mu$ 個の要素に 0 を割り当てて、各ステップごとに生き残る細胞数が線形に減少する。この細胞新生の設定の違いが異なる結果をもたらしている。

先行研究では記憶容量を最大化する最適な新生数が存在することが数値的に示されている [1]。講演では、統計力学的に導出した最適な新生数も報告する。

参考文献

[1] Akira Date, and Koji Kurata, Artificial Life and Robotics, vol.12, pp.291-294, 2008.