疎ベイズ解像度合成
Sparse Bayesian Resolution Synthesis

兼村 厚範 (PY)†, 前田 新一 †, 石井 信 ‡
Atsunori Kanemura (PY), Shin-ichi Maeda, and Shin Ishii
† 京都大学 大学院情報学研究科
{atsu-kan, ichi}@sys.i.kyoto-u.ac.jp, ishii@i.kyoto-u.ac.jp

Abstract— Resolution synthesis is an image processing technique that aims to expand a given image using filters trained *in advance* using some datasets. We have applied sparse Bayesian learning to resolution synthesis and obtained optimal and compact filters, which are useful for efficient image expansion.

Keywords— **Image Expansion, Image Interpolation, Sparse Bayesian Learning**

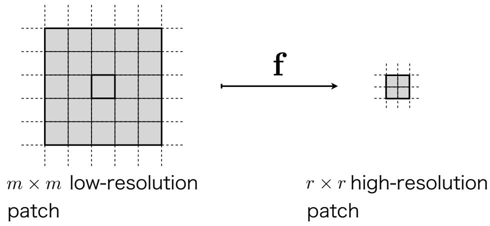


図 1: $m \times m = Q$ 低解像度パッチから $r \times r = D$ 高解像度パッチを推定する（図は $m = 5$, $r = 2$ の場合）.

1　解像度合成

解像度合成（RS; resolution synthesis）[1] は，画像拡大の 1 手法であり，与えられた低解像度画像の各画素を $r \times r$ のパッチで置き替えることで倍率 r の拡大画像を構成する．ただし，たった 1 個の画素値から r^2 個の画素値を推定するのは不可能であるため，低解像度画像における注目画素の近傍 $m \times m$ パッチを推定に利用する（図 1）．画像パッチは，本来 2 次元であるが，1 次元に配列したベクトルとして取り扱われる．低解像度パッチを $m^2 = Q$ 次元ベクトル $\boldsymbol{z}$ で，高解像度パッチを $r^2 = D$ 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ で表わし，パッチ間には次の線形関係を仮定する．

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{1}$$

ここで $\boldsymbol{W}$ は $D \times Q$ 行列，$\boldsymbol{\mu}$ は D 次元のバイアスベクトル，$\boldsymbol{\varepsilon}$ は等分散 β^{-1} の正規ノイズである．行列 $\boldsymbol{W}$ の各行を $\boldsymbol{w}_d$ と表わすと，$\boldsymbol{w}_d$ は，d 番目の高解像度画素を $\boldsymbol{z}$ から推定するためのフィルタであり，従って $\boldsymbol{W}$ は D 個のフィルタを積み重ねたフィルタ行列であると見なせる．以上の定義より，本モデルの尤度は次式となる．

$$p(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{z}_n, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{\mu}, \beta) = \mathcal{N}(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{W}\boldsymbol{z}_n + \boldsymbol{\mu}, \beta^{-1}\boldsymbol{I}_D). \tag{2}$$

ただし，$\mathcal{N}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = |2\pi\Sigma|^{-1/2}e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})}$ は正規分布，$\boldsymbol{I}_D$ は D 次元単位行列である．

解像度合成の特徴は，フィルタ（とバイアス）を事前に用意したデータから学習する点である．いま N 個の低解像度・高解像度パッチ対 $\mathcal{D} = \{\boldsymbol{z}_n, \boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^N$ が手元にあるものとしよう．各パッチを連結した行列を $\boldsymbol{Z} = [\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_N]$, $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N]$ とする．古典的な解像度合成法では，パラメタ $(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{\mu})$ を求めるために最尤法が用いられ，最適なパラメタはただちに

$$\widetilde{\boldsymbol{W}}^* = (\widetilde{\boldsymbol{Z}}\widetilde{\boldsymbol{Z}}^{\mathrm{T}})^{-1}\widetilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

と求まる．ここで $\widetilde{\boldsymbol{W}}$ と $\widetilde{\boldsymbol{Z}}$ は拡大行列 $\widetilde{\boldsymbol{W}} = [\boldsymbol{W}, \boldsymbol{\mu}]$, $\widetilde{\boldsymbol{Z}} = [\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{1}]^{\mathrm{T}}$ である．新たに与えられた低解像度パッチ $\boldsymbol{z}$ から，高解像度パッチ $\boldsymbol{x}$ を推定するには，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{W}^*\boldsymbol{z} + \boldsymbol{\mu}^*$ が用いられる．このように，最尤法によりフィルタを学習する手法を MLRS と呼ぶものとする．

2　疎ベイズ解像度合成

本節ではベイズ的解像度合成法 BayesRS を描写する．ベイズ的方法においてはすべての変数は確率変数と見なされ，次の事前分布が設定される．

$$p(\boldsymbol{W}|\boldsymbol{A}) = \prod_{d=1}^{D}\prod_{q=1}^{Q}\mathcal{N}(w_{dq}|0, \alpha_{dq}^{-1}), \tag{4}$$

$$p(\boldsymbol{\mu}|\rho) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{0}, \rho^{-1}\boldsymbol{I}_D), \tag{5}$$

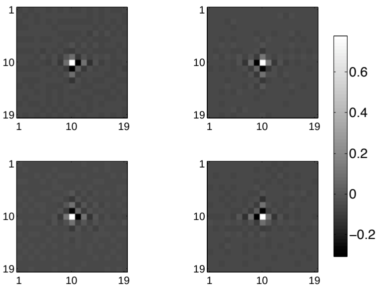
$$p(\beta) = \mathcal{G}(\beta|a_{\beta0}, b_{\beta0}), \tag{6}$$

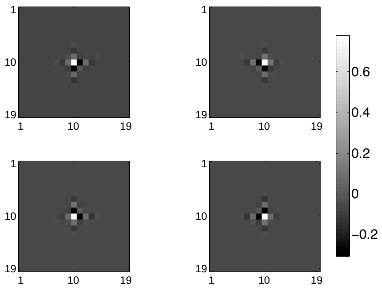
$$p(\boldsymbol{A}) = \prod_{d=1}^{D}\prod_{q=1}^{Q}\mathcal{G}(\alpha_{dq}|a_{\alpha0}, b_{\alpha0}), \tag{7}$$

$$p(\rho) = \mathcal{G}(\rho|a_{\rho0}, b_{\rho0}). \tag{8}$$

ここでガンマ分布を $\mathcal{G}(\tau|a, b) = \frac{1}{\Gamma(a)}b^a\tau^{a-1}e^{-b\tau}$ で表わした．本確率モデルは，パラメタ $\boldsymbol{A} = [\alpha_{dq}]$ の推定を通じてフィルタ係数に疎性を持たせるような設定となっており，疎ベイズ学習 [2] における automatic relevance determination と類似している．パラメタ $\boldsymbol{A}$ には左右対称性を持たせることとする．ハイパパラメタ $a_{\bullet0}$, $b_{\bullet0}$ は手で決めなければならないが，$a_{\alpha0}$ 以外はすべて 0 とし，疎性の強さを定める $a_{\alpha0}$ は正の値の範囲で制御した．

新たに与えられた低解像度パッチ $\boldsymbol{z}$ に対する高解像度パッチ $\boldsymbol{x}$ の推定値には，BayesRS は予測分布 $p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}, \mathcal{D})$ の期待値を用いる．しかし，予測分布を厳密に評価することは困難であるため，効率的な変分推定を採用する．すなわち，事後分布 $p(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{W}, \rho, \boldsymbol{\mu}, \beta|\mathcal{D})$ を因子化された試験分布





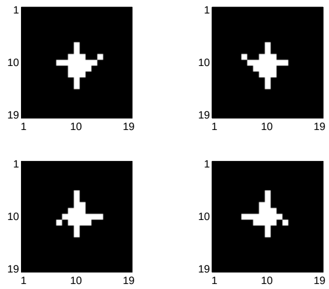
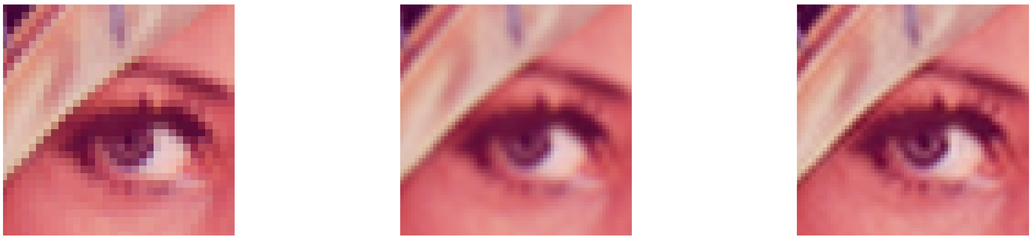


図 2: 最尤フィルタ（対数スケール）. 図 3: 疎ベイズフィルタ（対数スケール）. 図 4: 疎ベイズフィルタの台.



(a) 低解像度画像　(b) Bicubic; PSNR: 34.16 dB　(c) BayesRS; PSNR: 37.73 dB

図 5: 低解像度画像，双三次補間画像，疎ベイズ拡大画像.

$q(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{W}, \rho, \boldsymbol{\mu}, \beta) = q(\boldsymbol{A})q(\boldsymbol{W})q(\rho)q(\boldsymbol{\mu})q(\beta)$ で近似し，分布間の類似性尺度であるカルバック・ライブラー疑距離 $D_{\mathrm{KL}}(q(\boldsymbol{\tau})\|p(\boldsymbol{\tau}|\mathcal{D})) = -\int d\boldsymbol{\tau}\, q(\boldsymbol{\tau}) \ln(p(\boldsymbol{\tau}|\mathcal{D})/q(\boldsymbol{\tau}))$ を変分法的に最小化するように定められた最適な試験分布から予測分布を導出する．最適試験分布を用いて得られる，$\boldsymbol{z}$ から $\boldsymbol{x}$ への推定式は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{m} \tag{9}$$

となる．ただし，$\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{m}$ はそれぞれ $q(\boldsymbol{W})$, $q(\boldsymbol{\mu})$ の平均値である．

3 実験

訓練データには USC-SIPI 画像データベース [3] の #4.1.[01-08] を用い，低解像度パッチは人工的に生成した．性能は，Lena 標準画像（#4.1.04）を 1/2 に縮小した低解像度画像を 2 倍に拡大した際の PSNR[1]で測った．

低解像度パッチの大きさが 19×19 のとき MLRS により学習されたフィルタを図 2 に示す．係数はすべて非ゼロであった．疎ベイズ学習 BayesRS により得られたフィルタを図 3 に，その台（係数が非ゼロの領域）を図 4 に示す．図 6 は，MLRS についてはフィルタの大きさを変化させたときの PSNR の軌跡を，BayesRS については元々のフィルタの大きさは 19×19 に固定したままハイパパラメタ $a_{\alpha 0}$ を 1 から 150 まで変化させたときの PSNR の軌跡を示している．横軸は学習されたフィルタの台の大きさである．一般に，BayesRS の方がより小さな台でより高い PSNR を実現できている．また，図 5 に示すように，双三次補間法に比べても 1.6 dB 程度良い PSNR が得られている．

[1] Peak signal-to-noise ratio．$PSNR = 10 \log_{10}(\kappa^2/MSE)$ と定義され，高いほど誤差が小さいことを示す．ここで κ は最大画素値，MSE は平均 2 乗誤差である．

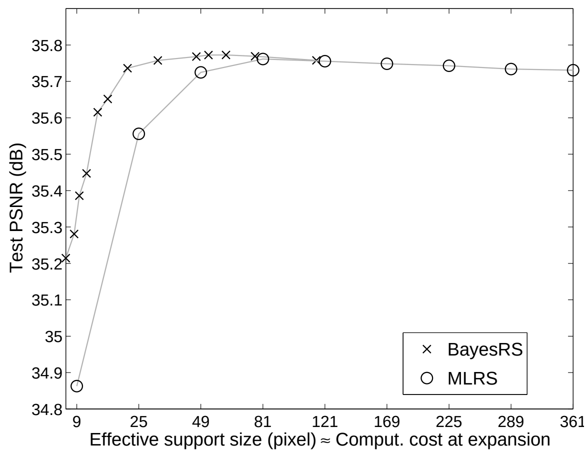


図 6: PSNR と台の変化.

4 まとめ

疎ベイズモデリングにより，より小さな台でより高い性能を発揮する，解像度合成のためのフィルタの学習が実現できた．拡大処理時の計算量は，台の大きさに比例するので，BayesRS によればより効率的な解像度合成が可能である．いったん最適なフィルタ係数 $\boldsymbol{M}$ とバイアス $\boldsymbol{m}$ が得られれば，BayesRS は単純な線形フィルタであるため実装は簡便であり，画像処理ソフトウエアや組み込み系等への応用に有用であると期待できる．

参考文献

[1] C. B. Atkins (1998) “Classification-based methods in optimal image interpolation.” Ph.D. thesis, Perdue University.

[2] M. E. Tipping (2001) “Sparse Bayesian learning and the relevance vector machine.” JMLR, **1**, 211-244.

[3] “The USC-SIPI image database.” `http://sipi.usc.edu/database/`.