

# 線形パーセプトロンの適応型ノードパータベーション学習 Adaptive node perturbation learning for liner perceptron

長 竜也 (PY)<sup>†</sup>, 片平 健太郎<sup>‡</sup>, 岡田 真人<sup>‡</sup>

Tatsuya Cho(PY), Kentaro Katahira, and Masato Okada

<sup>†</sup> 東京大学大学院新領域創成科学研究科, <sup>‡</sup> 理化学研究所脳科学総合研究センター

cho@mns.k.u-tokyo.ac.jp

**Abstract**— In conventional node perturbation learning, the noise disturbs the system from reaching zero error. We proposed a new learning method with time diminished perturbation to achieve zero error asymptotically. This method gives a smaller error than conventional method independently of parameters.

**Keywords**— on-line learning, reinforcement learning, residual error, stochastic gradient method

## 1 はじめに

ニューラルネットワークの学習法の一つであるノードパータベーション学習とは、出力素子に摂動を与える確率的勾配学習法のことである。それを模式的に描いたものが図1である。最急降下法で学習を行うためには個々のニューロンの出力に対する誤差が必要になるのに対し、ノードパータベーションでは出力全体に対する評価値のみを用いて学習することが出来る。それゆえ強化学習に応用する事が容易である。結合に摂動を与えるウェイトパータベーションでも、同様に誤差の値のみを用いて学習できるが、入力次元の分だけノードパータベーションよりも遅くなる [1]。このような特長から、ノードパータベーションが実際の脳の学習で使われているという期待がもたれている [2][3]。

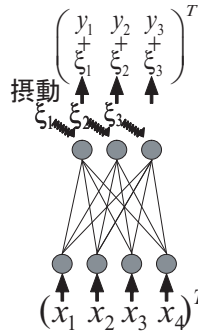


図 1: ノードパータベーション概念図

しかし、摂動強度が時間に依存しない従来のノードパータベーション (摂動一定型) では、摂動に由来する残留誤差が残ってしまうことが報告されている [1]。この問題を解決するため、本稿では摂動強度と学習係数を時間に対し適応的に変化させる学習則 (適応型) を提案する。この適応型ノードパータベーションに対し学習曲線を解析的に導いた結果、誤差は漸近的にゼロに収束する事を確認した。導出した学習曲線はシミュレーションとよく一致することを示す。適応型は摂動一定型と比べ常に小さな誤差を実現することを証明する。

## 2 適応型ノードパータベーションの解析

### 2.1 線形パーセプトロン

線形パーセプトロンに対し、ノードパータベーションを使って教師あり学習をさせ、その性能を 2 乗誤差を使って評価する。パーセプトロンの入力信号を  $x_j (j = 1, \dots, N)$ , 出力を  $y_i = \sum_j w_{ij} x_j (i = 1, \dots, M)$  とする。教師の出力と結合には \* をつけ  $y_i^*, w_{ij}^*$  とする。入力信号  $\{x_j\}$  は平均 0, 分散 1 のガウス分布に従うとした。

### 2.2 ノードパータベーション

本稿では、ノードパータベーションを結合更新則が

$$\Delta w_{ij} = -\eta_{(t)}(E_{NP} - E)\xi_i x_j$$

で与えられる学習則であると定式化する。それぞれ学習のステップ回数  $t$ , 学習係数  $\eta_{(t)}$ , 摂動を与えた時の誤差  $E_{NP} = \frac{1}{2} \sum_i (y_i + \xi_i - y_i^*)^2$ , 摂動を与えなかった時の誤差  $E = \frac{1}{2} \sum_i (y_i - y_i^*)^2$  である。摂動  $\{\xi_i\}$  は平均 0, 分散  $\sigma_{(t)}^2$  のガウス分布に従うとする。

この場合、汎化誤差の時間発展は漸化式

$$\langle E_{(t+1)} \rangle = \langle E_{(t)} \rangle \{1 - 2\eta_{(t)}\sigma_{(t)}^2 + \eta_{(t)}^2\sigma_{(t)}^4(M+2)(N+2)\} + \frac{1}{8}\eta_{(t)}^2\sigma_{(t)}^6MN(M+2)(N+2)$$

により求められる。 $\{\xi_i\}, \{x_j\}$  についての平均を  $\langle \rangle$  で表した。第 1 項の中括弧が誤差の減少する速さを決定する因子 (減少因子) で、1 より小さい場合のみ学習が成功する。

### 2.3 適応型ノードパータベーション (ANP)

摂動がステップ数に対し指数関数的に減少する場合 ( $\sigma_{(t)}^2 = \sigma_0^2 e^{-t/T}$ ) に対し、減少因子を最も小さくする適応的な学習係数を求める。すると、適応的な学習係数は  $\eta_{(t)} = 1/\sigma_0^2 e^{-t/T}(M+2)(N+2)$  であることがわかる。時間に依存する部分  $\sigma_0^2 e^{-t/T}$  を分離させ、それ以外を  $\eta_0$  に押し付けて、学習曲線を  $\eta_{(t)} = \eta_0/\sigma_0^2 e^{-t/T}$  と設定する。すると漸化式の繰り返しは等比級数になる。 $\tau = 1/\log \frac{1}{1-2\eta_0+\eta_0^2(M+2)(N+2)}$  を定義し、減少因子を  $e^{-t/\tau}$  と書き換えて学習曲線を計算すると

$$\langle E_{ANP(t)} \rangle = \left( E_{(0)} - \frac{\eta_0^2 \sigma_0^2 (M+2)(M+4)MN}{8(e^{-1/T} - e^{-1/\tau})} \right) e^{-t/\tau} + \frac{\eta_0^2 \sigma_0^2 (M+2)(M+4)MN}{8(e^{-1/T} - e^{-1/\tau})} e^{-t/T}$$

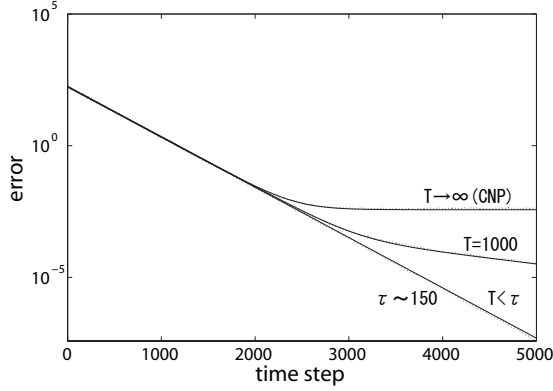


図 2: 適応型ノードパーティションの学習曲線  
 $M=17, N=10, \sigma_0 = 10^{-2}, \eta_0 = \frac{1}{(M+2)(N+2)}$  での結果  
(実線が理論, 破線がシミュレーション)

となる. 第 1 項目を主要誤差と呼び, 第 2 項目を摂動起因誤差と呼ぶ. 摂動減少パラメタ  $T$  は自由に設定できるが,  $\tau$  はシステムサイズが大きくなるに従い増加するパラメタである.

### 3 他の学習則との比較

#### 3.1 摂動一定型 (CNP) と適応型の比較

摂動がステップ数に依存せず, 常に一定  $\sigma(t) = \sigma_0$  の場合, 学習係数を  $\eta(t) = \eta_0/\sigma_0^2$  と設定すると

$$\langle E_{\text{CNP}(t)} \rangle = \left( E_{(0)} - \frac{\eta_0^2 \sigma_0^2 (M+2)(M+4)MN}{8(1-e^{-1/\tau})} \right) e^{-t/\tau} + \frac{\eta_0^2 \sigma_0^2 (M+2)(M+4)MN}{8(1-e^{-1/\tau})}$$

と計算できる [1]. これは適応型での  $T \rightarrow \infty$  に相当する. 第 1 項目の主要誤差は適応型と同じ速度で 0 に漸近するが第 2 項目の摂動起因誤差は時間によらないので残留誤差となる. 図 2 に  $T$  を変化させたときの学習曲線の振る舞いを示す. 3 本の曲線が重なっている部分が主要誤差の寄与で, 3 本に枝分かれしている部分が摂動起因誤差の寄与である.

比較のため  $\Delta E = \langle E_{\text{CNP}(t)} \rangle - \langle E_{\text{ANP}(t)} \rangle$  を定義して計算すると

$$\Delta E = \frac{1}{8} \eta_0^2 \sigma_0^2 MN (M+2)(M+4) \times \sum_{k=0}^{t-1} (1 - e^{-k/T}) e^{(-k+t-1)/\tau}$$

となり, すべての因子が正の値のため  $\Delta E > 0$  といえる. すなわち適応型の方が, 常に性能が良くなる.  $T \rightarrow 0$  の極限で  $\Delta E$  は最大になるので,  $T$  の値は 0 に近いほど性能が良いといえる.  $T, t \rightarrow \infty$  において,  $\Delta E$  は残留誤差の値に等しくなる.

#### 3.2 学習係数を一定にした学習則との比較

摂動強度を時間的に減少させても, 学習係数を時間変化させずに学習を行うと, 摂動減少パラメタ  $T$  の取り方によって学習曲線の振る舞いが大きく変化してしま

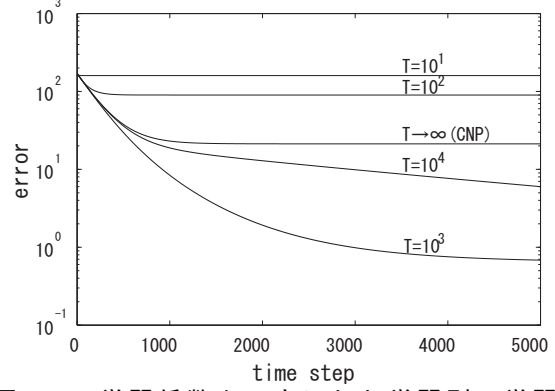


図 3: 学習係数を一定にした学習則の学習曲線  
 $M=17, N=10, \sigma_0 = 1, \eta = \frac{1}{(M+2)(N+2)}$

い, 値の取り方によっては摂動一定型よりも性能が悪くなることもある. その様子を 図 3 に示す.

#### 4 $T$ の決め方

理論的には任意パラメタ  $T$  は 0 に近いほど性能が良くなる. しかしながら 0 に設定してしまうとアルゴリズムは破綻してしまう. そこで,  $T$  をどの程度まで小さくすればよいかを考える.

図 2 において  $T > \tau$  のとき,  $1/T$  が枝分かれしている部分の傾きになる. つまり,  $T$  の値が小さいほど誤差の値は速く 0 に収束する. ところが  $T$  を小さくして  $T < \tau$  を満たすようにすると, ほとんど主要誤差だけが誤差に寄与するようになるので,  $T$  だけ小さくして摂動起因誤差を小さくしても, その寄与は主要誤差に比べ指数関数的に小さくなる. ゆえに,  $T$  は  $\tau$  と同程度まで小さいすればよく, それ以上小さくしても性能にほとんど差は出ない.

#### 5 まとめ

我々は適応型ノードパーティションを提案し, その学習曲線を解析的に計算した. その結果はシミュレーションと一致した. また, 適応型において誤差は漸近的に 0 に近づき, 残留誤差の問題は解決された. 適応型は摂動一定型と比べ常に小さい誤差の値を実現した.

#### 参考文献

- [1] J. Werfel, X. Xie and H. S. Seung (2005) "Learning Curves for Stochastic Gradient Descent in Linear Feedforward Networks." *Neural Comput*, **17**, 2699–2718.
- [2] I. R. Fiete, M. S. Fee and H. S. Seung (2007) "Model of birdsong learning based on gradient estimation by dynamic perturbation of neural conductances." *J Neurophysiol* **98**, 2038 - 2057
- [3] I. R. Fiete and H. S. Seung (2006) "Gradient learning in spiking neural networks by dynamic perturbation of conductances." *Phys Rev Lett* **97**, 048104.