

# メキシカンハット型相互作用が時間変化する系の統計力学

## Statistical Mechanics of time dependent Mexican-hat type interaction

原 一之<sup>†</sup>, 三好 誠司<sup>‡</sup>, 上江渕 達也<sup>††</sup>, 岡田 真人<sup>†††,‡‡</sup>

Kazuyuki Hara, Seiji Miyoshi, Tatsuya Uezu and Masato Okada

<sup>†</sup> 東京都立産業技術高等専門学校, <sup>‡</sup> 関西大学システム理工学部, <sup>††</sup> 奈良女子大学大学院人間文化研究科,

<sup>†††</sup> 東京大学大学院新領域創成科学研究科, <sup>‡‡</sup> 理化学研究所脳科学総合研究センター

hara@s.metro-cit.ac.jp, miyoshi@ipcku.kansai-u.ac.jp, uezu@ki-rin.phys.nara-wu.ac.jp, okada@k.u-tokyo.ac.jp

**Abstract**— We derived the saddle point equations of time dependent interaction of mexican-hat type by usnig the replica analysis method. The interaction is driven by the Langavin equation including Hebb learning of spins. Analytical results show that the dual stable phase of localized and ferromagnetic becomes more stable with the learning.

**Keywords**— Partial Annealing, Mexican-hat type interaction, Statistical Mechanics

### 1 時間的に変化するメキシカンハット型相互作用

メキシカンハット相互作用は側抑制のモデルであり、濱口ら [1] が統計力学の手法であるレプリカ法を用いて詳しく解析した。本文では全結合のイジングスピンニューラルネットワークの相互作用がメキシカンハット相互作用で、相互作用がスピン変化に対して十分ゆっくり変化する場合の統計力学 (パーシャルアニーリング [2] .) を議論する。相互作用  $J = \{J_{ij}\}$  は次の確率微分方程式に従って時間変化する。

$$\tau \frac{dJ_{ij}}{dt} = \frac{1}{N} \epsilon \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{sp} + K_{ij} - \mu J_{ij} + \sqrt{\frac{\tau}{N}} \eta_{ij}(t) \quad (1)$$

ここで  $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{sp}$  はスピン  $\sigma_j$ ,  $\sigma_j$  に対するヘブ則を表す。 $\langle \dots \rangle_{sp}$  は相互作用  $J_{ij}(t)$  を固定したときのスピンについての温度  $T$  での熱平均を意味する。 $\epsilon$  はヘブ則の強さを表す。 $\epsilon = 0$  では濱口らのモデルに一致する。 $\eta_{ij}(t)$  はランジュバンノイズであり、分散は  $\langle \eta_{ij}(t) \eta_{kl}(t') \rangle = 2\tilde{T} \delta_{ik} \delta_{jl} \delta(t - t')$ ,  $i < j, k < l$  である。 $\tilde{T} = \beta^{-1}$  はノイズの温度に相当する。 $K_{ij}$  はメキシカンハット型相互作用であり、 $K_{ij} = K_0/N + K_1/N \cos(\theta_i - \theta_j)$  である。スピンの位置  $\theta_i$  は  $\theta_i = (2\pi i)/N - \pi$ , ( $i = 0 \sim N - 1$ ) と等間隔であり、 $\theta_i \in [-\pi, \pi)$  のような周期境界条件を課す。スピン  $\sigma_i$  は  $\{-1, 1\}$  の 2 値を取る。

### 2 レプリカ解析

実行ハミルトニアン  $\mathcal{H}$  を

$$\mathcal{H} = -\frac{\epsilon}{\beta} \ln Z_\beta - \sum_{i < j} K_{ij} J_{ij} + \frac{N\mu}{2} J_{ij}^2 \quad (2)$$

とすると、式 (1) は

$$N\tau \frac{dJ_{ij}}{dt} = -\frac{d\mathcal{H}}{dJ_{ij}} + \sqrt{N\tau} \eta_{ij}(t) \quad (3)$$

と書ける。このランジュバン方程式の平衡状態はボルツマン分布型で与えられ、分配関数  $\tilde{Z}_\beta$  と自由エネルギー  $\tilde{F}_\beta$  で特徴付けられる。そこでこの平衡状態に注目する。実行ハミルトニアンに対する分配関数  $\tilde{Z}_\beta$  は

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_\beta &= \int d\mathbf{J} \exp(-\tilde{\beta}\mathcal{H}) \\ &= \int \left[ \prod_{i < j} \sqrt{\frac{N\mu\tilde{\beta}}{2\pi}} dJ_{ij} \right] Z_\beta^n \\ &\times \exp \left( \tilde{\beta} \sum_{i < j} K_{ij} J_{ij} - \frac{\tilde{\beta}N\mu}{2} \sum_{i < j} J_{ij}^2 \right) \quad (4) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $Z_\beta$  は

$$Z_\beta = \exp(-\beta H) = \exp(-\beta \sum_{i < j} J_{ij} \sigma_i \sigma_j) \quad (5)$$

であり、 $T = \beta^{-1}$  はスピンの温度である。このように、スピン  $\sigma$  と相互作用  $J$  の変化は、それぞれ異なる逆温度  $\beta$  と  $\tilde{\beta}$  で特徴付けられる。つぎに式 (4) をレプリカ法で解く。レプリカ対称性を考慮すると、鞍点法により、自由エネルギー  $\tilde{F}_\beta$  を最小にする巨視的変数の鞍点方程式が求められる。

$$m_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\int Dz \cosh^n \beta(\Xi) \tanh \beta(\Xi)}{\int \cosh^n \beta(\Xi)} \quad (6)$$

$$m_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\int Dz \cos(\theta - \varphi) \cosh^n \beta(\Xi) \tanh \beta(\Xi)}{\int \cosh^n \beta(\Xi)} \quad (7)$$

$$q = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\int Dz \cosh^n \beta(\Xi) \tanh^2 \beta(\Xi)}{\int \cosh^n \beta(\Xi)} \quad (8)$$

ここで  $\Xi = J\sqrt{q}z + \frac{K_0}{\mu} m_0 + \frac{K_1}{\mu} m_1 \cos(\theta - \varphi)$ ,  $n = \tilde{\epsilon}\tilde{\beta}/\beta$ ,  $J = 1/\sqrt{\tilde{\beta}\mu}$ ,  $m_1 = \sqrt{m_C^2 + m_S^2}$ ,  $\varphi = \tan^{-1}(m_S/m_C)$ ,  $Dz \equiv \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{z^2}{2})$  である。また、鞍点での巨視的変数は  $m_0 = \sum_i \sigma_i/N$ ,  $m_C = \sum_i \sigma_i \cos \theta_i/N$ ,  $m_S =$

$\sum_i \sigma_i \sin \theta_i / N$ ,  $q = \sum_i \sigma_i^\alpha \sigma_i^\beta / N$  となる.  $\alpha, \beta$  はレプリカ指標である. レプリカ法ではレプリカ数  $n$  は  $n \rightarrow 0$  とするが, 本手法では  $n$  が有限であることに注意する.

### 3 解析結果

次に鞍点方程式 (式 (6),(7),(8)) を数値的に解いた結果を図 1 に示す. スピンの温度は低温から高温へと変化させた. 図で横軸はスピンの逆温度  $K_1$ , 縦軸は巨視的変数  $m_1$  である. パラメータは  $K_0 = 0, K_1 = 1, \mu = 1, \beta = 1.0, \tilde{\beta} = 10$  とした. 従って, ランジュバンノイズは非常に小さい.  $\epsilon = 1.0$  のときを「学習」,  $\epsilon = 0.0$  のときを「学習なし」とした. 図中の実線は安定解, 点線は不安定解である. 安定解は反復法を用いて, 不安定解はニュートン法を用いて求めた.

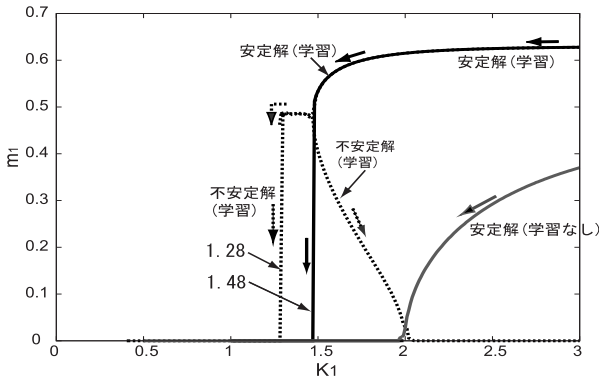


図 1: 巨視的変数  $m_1$  の温度依存性と相転移温度

図より,  $m_1$  が有限の値をとる局在相 (L 相,  $m_1 \neq 0, q \neq 0, m_0 = 0$ ) から  $m_1$  が 0 となるパラ相 ( $m_1 = m_0 = q = 0$ ) への相転移は学習なしでは 2 次であるが, 学習を行った場合は 1 次になった. 局在相からパラ相への相転移温度は, 学習なしで  $K_1 = 2.0$  であるが, 学習を行うと  $K_1 = 1.48$  と高温側にシフトした. また, 学習なしの場合は安定解しか現れないが, 学習を行うと  $K_1 = 2$  から  $K_1 = 1.48$  の間で不安定解が発生することがわかった. なお, 巨視的変数  $m_0$  に対しても同様の結果が得られた.

次に図 2(a) に  $K_0 = 3.0$  に固定して  $K_1$  を低温 ( $K_1 = 5$ ) から高温 ( $K_1 = 0$ ) へ変化したときの結果, (b) に  $K_1 = 5.0$  に固定して低温 ( $K_0 = 5$ ) から高温 ( $K_0 = 0$ ) へ変化したときの結果を示す. 各図の縦軸は, 上から  $q, m_0, m_1$  である. 横軸は  $K_0 = 3.0$  の場合は逆温度  $K_1$ ,  $K_1 = 5.0$  の場合は逆温度  $K_0$  である. 図中で実線は学習なし, 点線は学習ありの結果を示す. 図 (a) で学習なしの場合,  $K_1 > 3.7$  では局在相,  $K_1 < 3.7$  では相転移してフェロ相 ( $q \neq 0, m_0 \neq 0, m_1 = 0$ ) となった. また, 図 (b) では  $K_0 > 1.3$  ではフェロ相,  $K_0 < 1.3$  では相転移して局在相となった. 一方, 学習ありの場合, 相転移温度は  $K_1 = 3.1, K_0 = 0.81$  となったことから, 学習により相転移温度が高温側にシフトすることがわかった.

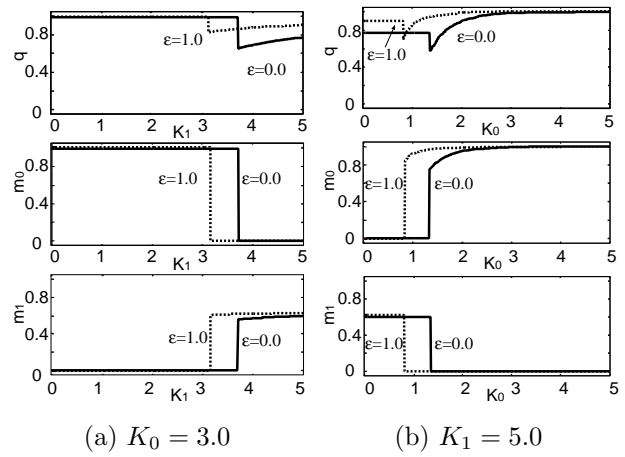


図 2: 巨視的変数の温度依存性

図 2 の結果を  $K_0 - K_1$  平面にプロットしたのが図 3(a) である. 図では巨視的変数の値でなく局在相を実線で, フェロ相を点線で示した. 図中の数字は相転移温度を表す. 図より  $K_0 = 3, K_1 = 5$  の交点 (F+L) ではフェロ相と局在相が混在していることが分かる. 次に系の相図を (b) に示す. 図中で "P" はパラ相, "F" はフェロ相, "L" は局在相を表す. 実線は学習なし, 点線は学習ありの結果である. 図のようにこの系ではパラ相, フェロ相, 局在相, フェロと局在の混合相の 4 つの相が存在し, 学習により混在相が拡大することが分かった. 今後はパラ相がスピングラス相になるランジュバンノイズの大きな場合 (濱口ら [1] が指摘) を解析する予定である.

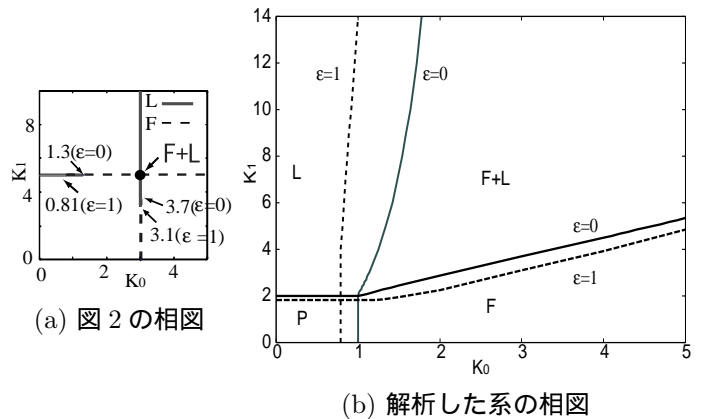


図 3: 相図

### 参考文献

- [1] K. Hamaguchi, J. P. L. Hatchett and M. Okada, Analytic solution of neural network with disordered lateral inhibition, Physical Review E, **73**, 051104 (2006).
- [2] 三好誠司, 上江洩達也, 岡田真人, パーシャルアニーリングのレプリカ解析-2 体ソールス符号の場合-, 情報論的学習理論ワークショップ (IBIS2007) 予稿集 pp. 115-120, 11 月 (2007).