2 階微分を用いたホモトピー法による脳磁界逆問題における連立代数方程式の数値解法

The numerical solution of systems of algebraic equations arising in a Magnetoencephalography inverse problem by using second derivative of homotopy function.

石井 政行 (PY)

Masayuki Ishii(PY)

元情報数理研究所所員,mishiiodn@max.odn.ne.jp

Abstract— We solved algebraic equations arising in a MEG inverse problem by using normal homotopy method. But to solve them, it is difficult to determine two initial parameters. So, my aim is to solve only one parameter. In order to realize it, I supposed extended homotopy method by using second derivative of homotopy function.

Keywords— **MEG, Inverse problem, Homotopy method,Second derivative of homotopy functions.**

1 はじめに

磁場や磁場の空間高階微分の情報から発生する連立代数方程式をホモトピー法で解いたわけであるが [5], 2 つの初期値のパラメタが必要になり, 逆問題の解を推定するのには難がある．そこで, 2 階微分を用いたホモトピー法が 2 変数でもかかった時間やホモトピーパスの追跡や初期値から近い解の算出などにおいて有利な所があるので [6], 今回は n 変数 (双極子は 2 個なので連立代数方程式は 8 本だから $n = 8$) までに拡張させて, 実際に逆問題の解を推定できた (初期値を決めるパラメタがある程度の範囲内で) ので報告をする．

2 連立代数方程式の導出

まず, 頭部を表す領域 Ω を球と仮定すると, Ω の境界における磁場の径方向成分は電流双極子が一様無限媒体中に存在する場合の磁場の径方向成分に等しい [1]．そこで, Ω を単位球として規格化し, 観測点が北極 $(0,0,1)$ になるような座標系 (x,y,z) をとる．北極点での磁場の z 成分は, ビオ・サバールの法則により

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{\mu}{4\pi}\sum_{k=1}^{N}\mathbf{m}_k \times \frac{\mathbf{d}_k}{{d_k}^3}\Bigg|_z \\ &= \frac{\mu}{4\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k y_k - b_k x_k}{\sqrt{{x_k}^2+{y_k}^2+(1-z_k)^2}} \end{aligned} \tag{1}$$

で与えられる． ただし, N を双極子の数, $\mathbf{r}_k = (x_k,y_k,z_k)^{\mathbf{T}}$ を第 k 番目の双極子の位置, $\mathbf{m}_k = (a_k,b_k,c_k)^{\mathbf{T}}$ を双極子のモーメント, μ を透磁率, $\cdot|_z$ を $\cdot$ の z 成分, $\mathbf{d}_k = (x_k, y_k, z_k-1)^{\mathbf{T}}$, $d_k = \|\mathbf{d}_k\|$ とし, $\|\cdot\|$ はユークリッド・ノルムを表わすものとする. (1) より, c_k が消えることがわかる．

ここで, 観測点において

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{1}{(2n+1)!!}\frac{4\pi}{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)^n B_z \\ \delta_n &= \frac{1}{(2n+3)!!}\frac{4\pi}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)^n B_z \end{aligned}$$

の形式の高階微分を考える．ただし, $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ とする．空間微分は，等面積で逆巻きの 2 つのコイルを各軸の微分方向につなげたグラディオメータにより測定できる．高階微分に関しても，2,3 階 [1, 2, 3] の空間微分を計測するグラディオメータが提案されている．そこで, γ_n, δ_n は観測量であり, 既知の量とする．

結果として, 未知量 $\chi_k, \psi_k, p_k, q_k\,(k=1,2,\cdots,N)$ に関する次の連立代数方程式が得られる．

$$\sum_{k=1}^{N} q_k {\chi_k}^n - \frac{n}{2n+1}\sum_{k=1}^{N} p_k {\chi_k}^{n-1} = \gamma_n \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{N} q_k {\chi_k}^n \psi_k - \frac{n}{2n+3}\sum_{k=1}^{N} p_k {\chi_k}^{n-1}\psi_k = \delta_n \tag{3}$$

ただし

$$\begin{aligned} \chi_k &= \frac{x_k + \mathrm{i}y_k}{{d_k}^2}, \qquad \psi_k = \frac{1-z_k}{{d_k}^2} \\ q_k &= \frac{a_k y_k - b_k x_k}{{d_k}^3}, \qquad p_k = \frac{\mathrm{i}\,(a_k + \mathrm{i}b_k)}{{d_k}^3} \\ d_k &= \sqrt{{x_k}^2+{y_k}^2+(1-z_k)^2} \end{aligned}$$

である．ここで，χ_k, ψ_k, p_k, q_k の幾何学的な意味については文献 [4] を参照されたい．そこで既知の量 $\gamma_n, \delta_n\,(n=0,1,\cdots,2N-1)$ より連立代数方程式 (2),(3) を解いて, 未知の量 $\chi_k, \psi_k, p_k, q_k\,(k=1,\cdots,N)$ を求めることにより, 双極子の位置やモーメントを同定する問題を考える．

3 拡張ホモトピー法

3.1 新しい予測子法の提案

拡張ホモトピー法について説明する．ホモトピー関数 $\mathbf{h}(\mathbf{z},t)=(1-t)\mathbf{g}(\mathbf{z})+t\mathbf{f}(\mathbf{z})$, $\mathbf{z}\in\mathbf{C}^n$,$t\in[0,1]$, 解析的に解ける関数を $\mathbf{g}(\mathbf{z})$, 求めたい関数を $\mathbf{f}(\mathbf{z})$ として, $\mathbf{h}(\mathbf{z},t)$ をテイラー展開して, $\mathbf{z}$ に関して 2 階の微分項を残しておくと次の式ができる．但し, D_{zz} は変数 $\mathbf{z}$ に関する 2 階の微分である m は反復回数である．

$$\begin{aligned}&\mathbf{h}\left(\mathbf{z}^{(m)}+\mathrm{d}\mathbf{z}^{(m)},t^{(m)}+\mathrm{d}t^{(m)}\right)\\ &\cong\mathbf{h}\left(\mathbf{z}^{(m)},t^{(m)}\right)+\mathrm{D}_z\mathbf{h}\left(\mathbf{z}^{(m)},t^{(m)}\right)\mathrm{d}\mathbf{z}^{(m)}\\ &+\mathrm{D}_t\mathbf{h}\left(\mathbf{z}^{(m)},t^{(m)}\right)\mathrm{d}t^{(m)}\\ &+\frac{1}{2}\mathrm{d}\mathbf{z}^{(m)}\mathrm{D}_{zz}\mathbf{h}\left(\mathbf{z}^{(m)},t^{(m)}\right)\mathrm{d}\mathbf{z}^{(m)}=\mathbf{0}\end{aligned}$$

よりここで, $dt^{(m)}=1$ とおいて, 平野法 [7] のアイデアであ 2 項近似を参考にすると 1 階の微分の予測子 $\mathrm{d}\mathbf{z}_1^{(m)}$ は (4) を満たし, 2 階の微分の予測子 $\mathrm{d}\mathbf{z}_2^{(m)}$ は (5) を満たすことになる．

$$\mathrm{D}_z\mathbf{h}\mathrm{d}\mathbf{z}_1^{(m)}+\mathrm{D}_t\mathbf{h}\mathrm{d}t^{(m)}=\mathbf{0} \tag{4}$$

$$\min\left\|\frac{1}{2}\mathrm{d}\mathbf{z}_2^{(m)}\mathrm{D}_{zz}\mathbf{h}\mathrm{d}\mathbf{z}_2^{(m)}+\mathrm{D}_t\mathbf{h}\mathrm{d}t^{(m)}\right\| \tag{5}$$

よって, n 変数系で考えれば (5) を満たす式は以下の様に変形できる．

$$M=\begin{pmatrix}\partial_{z_1z_1}h_1 & \cdots & 2\partial_{z_{n-1}z_n}h_1\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ \partial_{z_1z_1}h_n & \cdots & 2\partial_{z_{n-1}z_n}h_n\end{pmatrix} \tag{6}$$

とすれば, 次の (7),(8) を得る．ただし $dt^{(m)}=1$ とした．

$$\mathrm{d}\mathbf{z}_1^{(m)}=-\left(\mathrm{D}_z\mathbf{h}\right)^{-1}\mathrm{D}_t\mathbf{h} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\left(\mathrm{d}z_1^{(m)}\right)^2\\ \vdots\\ \mathrm{d}z_{n-1}^{(m)}\mathrm{d}z_n^{(m)}\end{pmatrix} &= -2\left(M^TM\right)^{-1}M^T\mathrm{D}_t\mathbf{h}\\ &\equiv \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_{n+(n-1)!}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{8}$$

2 階微分の成分について考える． (8) より, $\left|dz_j^{(m)}\right|$ の候補は $\left(\left|\alpha_j^{\frac{1}{2}}\right|,\left|\alpha_{n+j}^{\frac{1}{2}}\right|,\cdots,\left|\alpha_{(n-1)!+j)}^{\frac{1}{2}}\right|\right)$ となる． この候補の中から $\left|dz_j^{(m)}\right|$ が最小となるようなものを $dz_j^{(m)}=\alpha_{j_*}^{\frac{1}{2}}$ とする．
さらに、2 乗根の分岐を考える。$dz_j^{(m)}=|\alpha_{j_*}|^{\frac{1}{2}}\exp(\mathrm{i}\psi_s)$ ($\mathrm{i}=\sqrt{-1}$である), かつ $\psi_s=\pi s+\arg(\alpha_{j_*})^{\frac{1}{2}}$ $(s=0,1)$ なので, $\left|z_j^{(m)}+dz_j^{(m)}\right|$ が最小となるような s を探す． ここでもとまった $\left(dz_1^{(m)},\cdots,dz_n^{(m)}\right)$ を $d\mathbf{z}_2$ と表記する．
こうやって求めた予測子法の修正ベクトルを $d\mathbf{z}_k$ として, $\left\|d\mathbf{z}^{(m)}\right\|=\min\left\{\|d\mathbf{z}_1\|,\|d\mathbf{z}_2\|\right\}$ となるような、$d\mathbf{z}^{(m)}$ を形成していく．
そこで, 刻み幅を ω_m として,

$$\begin{pmatrix}\mathbf{z}^{(m+1)}\\ t^{(m+1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{z}^{(m)}\\ t^{(m)}\end{pmatrix}+\omega_m\begin{pmatrix}\mathrm{d}\mathbf{z}^{(m)}\\ 1\end{pmatrix}$$

とする．ただし, ω_m は 3.2 節で述べるように修正子法のニュートン法の収束に要する反復数によって適切に選ぶ必要がある．

3.2 刻み幅

ここで, 修正子法におけるニュートン法が収束に要する反復数によって予測子法の刻み幅 ω_m を決定してパス追跡を行なう [8]. 数値実験結果は後ほど示す．

参考文献

[1] M. Hämäläinen, R. Hari, R. J. Ilmoniemi, J. Knuutila and O. V. Lounasmaa, Magnetoencephalography − theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain, *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 65, No.2, pp. 413–197, 1993.

[2] K. Shirae, A. Matani, M. Yoshida, S. Kiyono and H. Furukawa, A new superconducting gradiometer complex for vector detection of weak magnetic field, *Japan Journal of Applied Physics*, Vol.30, No.8 B, pp. 1535–1537, 1991.

[3] J. Vrba, *Multichannel SQUID Biomagnetic Systems*, NATO Science Series E: Applied Sciences, Kluwer Academic Publishers, pp. 61–138, 2000.

[4] T. Nara and S. Ando, A projective method for an inverse source problem of the Poisson equation, *Inverse Problems*, Vol. 19, No. 2, pp. 355–369, 2003.

[5] 石井政行, 速水謙, 脳磁界逆問題で生じる連立代数方程式の数値解法, 日本応用数理学会論文誌, Vol 16, No.3, pp.135 − 147, 2006.

[6] 石井政行, 2 階微分を用いた複素数のホモトピー法, 日本応用数理学会論文誌, 投稿中.

[7] 杉原正顯, 室田一雄, 数値計算法の数理, 岩波書店, 1998, p.77.

[8] 山村清隆, 非線形現象の解析手法〔V〕非線形方程式の数値解法, 電子情報通信学会誌, Vol. 79, No.7, pp. 740–745, 1996.