

2階の非ホロノミック系の制御

荒井裕彦*

Control of Second-order Nonholonomic Systems

Hirohiko Arai

*機械技術研究所 茨城県つくば市並木 1-2

Email: harai@mel.go.jp

キーワード：2階非ホロノミック拘束 (second-order nonholonomic constraint), アフィン系 (affine system), ドリフト (drift), 非線形制御 (nonlinear control), 非駆動関節マニピュレータ (under-actuated manipulator)

1 はじめに

ここ数年来盛んに研究が進められてきた非ホロノミック系の代表選手といえば、やはり車輪型移動体と宇宙ロボットが挙げられるだろう。これらにおける非ホロノミック拘束は、前者においては運動の方向が幾何学的に限定されるような運動学的拘束、後者においては角運動量の保存による動力学的拘束であり、ともに一般化座標 q および一般化速度 \dot{q} を含む積分不可能な1階の微分方程式 $H(q)\dot{q} = 0$ (Pfaffian形式)として表される。この意味でこれらは1階の非ホロノミック系と呼ばれる。こうした系はドリフト項がゼロのアフィン系となり、本ミニ特集の記事のほとんどはこの形式の非ホロノミック系を対象としている。

ところが、拘束が一般化座標と一般化速度の他に一般化加速度までも含む積分不可能な2階の微分方程式として表され、Pfaffian形式に変換できない場合がある。これを2階の非ホロノミック拘束と呼ぶ。こうした拘束が典型的に現れる具体例がアクチュエータをもたない非駆動関節を有するUnder-actuated Manipulatorである。(以下ではUAMと略す。より厳密には自由空間内で運動するUAMにおいて、非駆動関節の運動が慣性力に支配される場合といえる。単にUnder-actuatedという軸数よりもアクチュエータ数が少ないことを意味し、1階の非ホロノミック系である文献[14]のマニピュレータも含まれる。) UAMの2階非ホロノミック拘束を最初に指摘した研究は、Orioloと中村による文献[1, 2]であろう。当時筆者はブレーキ付の非駆動関節をもつUAMを動力学的干渉を利用して制御していたが[8, 9, 10], ブレーキによる非駆動関節の固定/解放が可能であるために制御上は線形系としての扱いのみで十分であった。ブレーキを解放した状態での可制御性に関する議論[8]も線形理論のみに基づくかなり不完全なものであり、今更ながら不明を恥じ入る次第である。

さて、2階の非ホロノミック系のダイナミクスはドリフト項を含むアフィン系として表される。このことが、これまでに1階の非ホロノミック系を扱うために考案された数学的手法をそのまま適用することを困難にしている。例えば可制御性のように基本的な性質についても簡単には証明できない。また滑らかな状態フィードバックによる平衡点への安定化も、1階の非ホロノミック系のように一概に不可能

とはいきれない。

本分野はどちらかといえばマイナーな分野であったが、ここ2~3年の間に急速に進展しつつある。ただし理論的にはいまだ十分に整備されているとはいえ、具体的な制御手法の提案は開ループ、閉ループ制御ともに数えるほどしか見られない。本稿ではUAMを中心に扱いつつ、ごく最近に発表された新たな研究も含めて本分野の基礎的な研究を紹介してゆきたい。

2 UAMのモデルと2階非ホロノミック拘束

UAMの運動方程式は、一般に次のような形で表される。

$$M_{11}(q)\ddot{q}_a + M_{12}(q)\ddot{q}_p + b_a(q, \dot{q}) + c_a(q) = \tau \quad (1)$$

$$M_{21}(q)\ddot{q}_a + M_{22}(q)\ddot{q}_p + b_p(q, \dot{q}) + c_p(q) = 0 \quad (2)$$

$$q = \begin{pmatrix} q_a \\ q_p \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} b_a \\ b_p \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_a \\ c_p \end{pmatrix}$$

ただし、 $q_a \in \mathbb{R}^m$ は能動関節の角度、 $q_p \in \mathbb{R}^{n-m}$ は非駆動関節の角度、 $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は慣性行列、 $b \in \mathbb{R}^n$ はコリオリ・遠心力、 $c \in \mathbb{R}^n$ は重力を表す。ここで(1)は能動関節のトルク $\tau \in \mathbb{R}^m$ に関する式、(2)は非駆動関節のトルクがゼロとなることを表す式である。(2)式が系に対する $n-m$ 個の動力学的な拘束となる。

(1),(2)式を部分フィードバック線形化[15]によって変換する。能動関節の角加速度を新たな入力として、 $u = \ddot{q}_a$ とおく。 $n-m$ 次正方行列 M_{22} が正則ならば、(2)式より、

$$\ddot{q}_p = -M_{22}^{-1}(b_p + c_p) - M_{22}^{-1}M_{21}u \quad (3)$$

であるから、系の状態方程式は次のアフィン形式で表される。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q_a \\ q_p \\ \dot{q}_a \\ \dot{q}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q}_a \\ \dot{q}_p \\ 0 \\ -M_{22}^{-1}(b_p + c_p) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ -M_{22}^{-1}M_{21} \end{pmatrix} u \quad (4)$$

右辺第1項がドリフト項である。すなわち入力 u がゼロとなっても、状態はこの項に依存して変化 (drift) する。また能動関節の角加速度を u とするためには、(1),(3)式より、

$$\tau = b_a + c_a - M_{12}M_{22}^{-1}(b_p + c_p) + (M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{21})u \quad (5)$$

というトルクを能動関節に与えればよい。

ここで注意すべきことは、(4)式の状態変数が一般化座標と一般化速度からなることである。1階の非ホロノミック系の場合、状態変数は一般化座標と同じものになる。したがって平衡点の意味も1階の場合と2階の場合とは異なる。1階の非ホロノミック系はあらゆる状態を平衡点としてとることができる。一方2階の場合、(4)式では $b_p + c_p = 0$, $\dot{q} = 0$ となる状態のみが平衡点となる。

2階の非ホロノミック拘束をもつ系の具体例はUAM以外にもいくつか見いだされている。摩擦のない水平面上あるいは自由空間内の剛体に力を加えて操作する場合[16]のダイナミクスは、不等式拘束条件が付加される点を除き先端に自由リンクをもつUAMと等価になる。反動回転板を用いたトルクユニットマニピュレータ[17]は、UAMの一変形と考えられる。また全関節にアクチュエータを備えた冗長マニピュレータにおいて、先端に力/トルクの形で指令を与えた場合も2階非ホロノミック系となる[18]。水上船舶[19, 20]、水中移動体[21]、ホバークラフト[22]、V/STOL航空機、宇宙機の動力学モデルにおいてスラスターの数が一般化座標の数よりも少ない場合(文献[23]ではこれらをUnder-actuated Vehicleと総称している。)も2階非ホロノミック系である。宇宙機を除いては粘性摩擦の影響が現れることがUAMとの大きな違いである。

なお、車輪型移動体など1階の非ホロノミック拘束をもつ系に対して、制御入力を速度ではなく加速度あるいは力で与えたとき(非ホロノミック系の動的モデルと呼ばれる)にもドリフト項が現われる。しかし拘束に関する性質は保たれるため、速度入力の場合と同様の制御が可能である[24]。

3 不可積分性—2階非ホロノミック系の条件

Orioloと中村[1, 2]は、UAMにおいて一般化座標 q 、速度 \dot{q} 、加速度 \ddot{q} を含む(2)式の拘束が可積分で系がホロノミックとなるための条件を導いた。

[定理1] (2)式が一般化座標、速度、時間の関数である第一積分をもつ、すなわち拘束が $h_1(q, \dot{q}, t) = 0$ という形に帰着するための必要十分条件は、

- a) 非駆動関節に作用する重力項 $c_p(q)$ が定数となる。
- b) 慣性行列 $M(q)$ が非駆動関節の角度 q_p を陽に含まない。

このとき、第一積分は次のように求められる。

$$h_1(q, \dot{q}, t) = (M_{21} \ M_{22})\dot{q} + c_p t + d_1 = 0 \quad (6)$$

d_1 は積分定数を表す。

[定理2] (2)式が一般化座標と時間のみ関数である第二積分をもち、 $h_2(q, t) = 0$ と表される(すなわちホロノミック拘束となる)ための必要十分条件は、

- a) (2)式が第一積分をもつ。
- b) 行列 $(M_{21}(q_a) \ M_{22}(q_a))$ の零空間 $\Delta(q_a)$ が involutive (後述)である。

これらの条件が満たされるとき、第二積分は、

$$h_2(q, t) = h_{20}(q) + \frac{c_p}{2}t^2 + d_1 t + d_2 = 0 \quad (7)$$

という形で表される。ただし $\frac{\partial h_{20}}{\partial q} = (M_{21} \ M_{22})$, d_2 は積分定数である。

定理1の条件は、特にアーム途中に非駆動関節が配置される場合、特殊な条件のもとでしか成立せず、多くのUAMは2階非ホロノミック系となる。またWichlundら[23]はUnder-actuated Vehicleに関して定理1, 2に相当する可積分性の条件を導いている。

4 可制御性

ここで、非線形制御理論における可制御性に関する概念のいくつかを簡単にまとめておく[32, 33]。次のアフィン系

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g_0(x) + G(x)u \\ x &\in M \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad G = (g_1, g_2, \dots, g_m) \\ &(g_0, \dots, g_m \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ 上の滑らかなベクトル場である。}) \end{aligned} \quad (8)$$

を考える。いかなる2つの状態 $x_0, x_f \in M$ についても $x(0) = x_0, x(T) = x_f$ を満たすような時刻 $T > 0$ 、入力 $u(t) : (0 < t < T)$ が存在するならば系は**大域的に可制御**である。

ある状態 x_0 に対してその近傍の開集合 $V \subset M$ が与えられたとき、時刻 $0 < t < T$ において $x(t) \in V$ を満たしながら状態を $x(0) = x_0$ から $x(T) = x_f$ に遷移させる入力 $u(t) : (0 < t < T)$ が存在するような状態 x_f の集合を $R^V(x_0, T)$ と表す。また $R^V(x_0, \leq T) = \cup_{\tau \leq T} R^V(x_0, \tau)$ は x_0 を出発して時刻 T までの間に到達可能な状態の集合である。

いかなる状態 $x_0 \in M$ においても x_0 の任意の近傍 V 、任意の時刻 T に対する可到達集合 $R^V(x_0, \leq T)$ が M で内点をもつとき系は**局所可到達**である。これは、ある状態から出発してその近傍内の軌道を通りながら到達できる状態の集合がゼロでない容積をもつ開集合となることを意味する。

系が局所可到達であり、すべての状態 $x_0 \in M$ において x_0 の任意の近傍 V 、任意の時刻 T に対して $R^V(x_0, \leq T)$ が x_0 自身の近傍を含むならば、系は**微小時間局所可制御**(以下では単に局所可制御と略す。)である。局所可制御性は、状態や入力の定義域に特別の制限がなければ、大域的な可制御性の十分条件である。ある初期状態 x_0 と目標状態 x_f が与

えられたとき、それらを結ぶ経路を p 個に分割する中間点 x_1, \dots, x_p ($x_p = x_f$) を考える. 分割を無限に細かくすれば x_i ($i = 0, \dots, p-1$) からの可到達集合が x_i と x_{i+1} の両方を含むようにすることができる. すなわち状態はすべての中間点を通して x_0 から x_f に到達できる.

(8) 式のベクトル場の集合 $\{g_0(x), \dots, g_m(x)\}$ が x において張る線形空間 $\Delta(x)$ を g_0, \dots, g_m によって定められる distribution と呼ぶ. ある distribution から任意の2つのベクトル g_i, g_j を取り出して Lie 括弧 $[g_i, g_j] = \frac{\partial g_j}{\partial x} g_i - \frac{\partial g_i}{\partial x} g_j$ を求めたとき、それがまた元の distribution に属することを involutive という. Δ を含む involutive な最小の distribution を $\bar{\Delta}$ とすると、 $\bar{\Delta}$ は Lie 代数としての性質 (skew symmetry, Jacobi identity) を満たす. この Lie 代数の階数は $\bar{\Delta}$ の次元で定義される.

distribution $\bar{\Delta}$ の次元が x の次元 n と等しいとき、(8) 式の系は Lie 代数階数条件を満たすという. このとき、 $\bar{\Delta}$ は x の定義域 M の接空間となる. これは状態 x から局所的に M 内のあらゆる方向に動くことができることを意味し、したがって Lie 代数階数条件は局所可到達性の必要十分条件である (そのため可到達性階数条件とも呼ばれる).

1 階の非ホロノミック系の場合、局所可到達性が成立すれば同時に局所可制御性も満たされる. (8) 式でドリフト項 $g_0 = 0$ のとき、 $G \cdot (-u) = -Gu$ であるから入力に関して系の対称性が成立する. すなわちある入力によって到達した状態から、入力の符号を逆にすれば軌道をさかのぼって元の状態に戻ることができる. 局所可到達性の定義より、ある状態を出発して到達できる状態の集合はゼロでない容積をもつ開集合となり、一方である状態から出発して微小な時間で元の状態に戻る軌道が存在するから、可到達集合は元の状態の近傍を含む. すなわち局所可制御である. 通常、局所可制御性がいえれば大域的な可制御性も成立するから、1 階の非ホロノミック系では Lie 代数階数条件を可制御性階数条件と呼ぶ.

ところが、2 階の非ホロノミック系ではドリフト項があるために対称ではなく (局所可到達性 \Rightarrow 局所可制御性) が成り立たない. Lie 代数階数条件で証明できるのは局所可到達性までである. 当然大域的な可制御性も保証されない. そこで別の新たな条件が必要となる.

Sussmann[26] はドリフト項を含む一般的なアフィン系が局所可制御となるための十分条件を示している. (8) 式において、 g_i ($i = 0, \dots, m$) からなる Lie 括弧の繰り返し (例えば $[g_0, [g_1, [g_0, g_2]]]$ など) を考える. このような Lie 括弧 B に対して、 $\delta_i(B)$ を B の中に g_i が現われる回数、 B の度数を $\sum_{i=0}^m \delta_i(B)$ と定義する. $\delta_0(B)$ が奇数でかつ $\delta_i(B)$ ($i = 1, \dots, m$) がすべて偶数のとき、 B を「悪い」括弧と呼ぶ. それ以外の場合、 B を「良い」括弧と呼ぶ. 上の例は $\delta_0 = 2, \delta_1 = \delta_2 = 1$ であるから度数 4 の「良い」括弧である.

[定理 3] (8) 式の系は以下の 2 つの条件を満たせば局所可制御である.

- a) 系が Lie 代数階数条件を満たす.
- b) すべての「悪い」括弧がそれより低い度数の「良い」括弧の線形結合となる (このことを「悪い」括弧が「中和される」と呼ぶ).

この定理は 2 階の非ホロノミック系の局所可制御性を判定する有力なツールとなっている. Lynch[16] はこの定理を用いて摩擦のない水平面上の剛体に力を加えた際の局所可制御性を論じている. Lewis と Murray[25] は 2 階の非ホロノミック系を含む広いクラスの Lagrange 力学系について、形状可制御性 (状態変数のうち一般化座標にのみ限定した可制御性) を定義し、力学系のもつ数学的構造に基づき Sussmann の定理を用いて局所形状可制御性の条件を導いた.

5 フィードバック安定化

1 階の非ホロノミック系では、系が可制御であっても、滑らかな状態フィードバックによる平衡点への漸近安定化が不可能であることがよく知られている [27]. 2 階の場合、事情はもう少し複雑で、拘束が非ホロノミックだから安定化状態フィードバックが存在しないとは必ずしもいえない. 例えば倒立振り子は 2 階の非ホロノミック系となるが、近似線形系に対する状態フィードバックで平衡点に安定化できる.

2 階の非ホロノミック系のフィードバック安定化可能性の議論は Brockett[27] による下記の定理に基づいて行われる.

[定理 4]

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (x \in M \subset \mathbb{R}^n, u \in U \subset \mathbb{R}^m) \quad (9)$$

で表される系が平衡点 x_0 を漸近安定化させる滑らかな状態フィードバックをもつための必要条件は、

- a) 線形化された系が、固有値の実部が正となる不可制御なモードをもたない.
- b) x_0 の近傍を N として、 N に属する任意の ξ に対して状態を $x(0) = \xi$ から $x(\infty) = x_0$ に移す制御入力 $u_\xi(t) : (t \geq 0)$ が存在するような N がある.
- c) $\gamma : (x, u) \mapsto f(x, u)$ で定義される写像 $\gamma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ が原点 0 を含む開集合への上への写像である.

Oriolo と中村 [1, 2] は上の定理に基づいて重力が作用しない UAM においては滑らかな状態フィードバックによる平衡点への安定化が不可能であることを示した. また Wichlund ら [23] によれば、Under-actuated Vehicle において駆動力がゼロとなる部分に関わる重力項 ((2) 式の c_p に相当) がゼロのときにはこの定理の条件を満たさない. さらに、濃沼と中村 [6] は、この定理をドリフト項を含むアフィン系 (8) に適用し、以下の必要条件を導いている.

[定理 5] (8) 式の系を平衡点に漸近安定化する滑らかな状態

フィードバック則が存在するための必要条件は, $\frac{\partial \mathbf{g}_0(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{g}_0(\mathbf{x})}{\partial x_n}, \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{g}_m(\mathbf{x})$ の張る nonsingular で滑らかな distribution の次元が n となることである.

倒立振り子や体操ロボット [15] のように 2 階のホロノミック系であってもこの条件を満たし, 実際に滑らかな状態フィードバックで安定化可能な系もある. しかし重力が作用しない UAM や Under-actuated Vehicle は条件を満たさず, 1 階の非ホロノミック系と同様に, 平衡点の安定化のためには時変状態フィードバック [19, 21] や区分解析的フィードバック [20] などを用いる必要がある.

6 例 1 : 水平 2 軸 UAM

本節では, 最も単純な形態の UAM として, 水平面内に置かれ関節に重力が作用しない回転 2 軸マニピュレータを考え, いくつかの基本的な性質や制御則を紹介する. まず, 3 節で紹介した不可積分性の判定法 [1, 2] によれば, 第 1 軸が自由に回転する非駆動関節, 第 2 軸がアクチュエータを備えた能動関節のとき, および第 1 軸が能動, 第 2 軸が非駆動で, 先端の自由リンク重心位置が非駆動関節と一致するときには, 拘束はホロノミックとなる. 初期速度がゼロのとき, これらのマニピュレータの形状は能動関節の角度で完全に決定され, 能動関節への入力のみで両方の関節を任意の角度へ位置制御することは不可能である. 一方で, 第 1 軸が能動関節, 第 2 軸が非駆動関節で, 自由リンク重心が非駆動関節上にはないときには拘束は 2 階非ホロノミックである. したがって, 能動関節の運動によってマニピュレータ全体を目標の形状に位置制御できる可能性があり, ここでは主にこの場合について扱う.

文献 [7] によれば, この構造のマニピュレータは 4 節で紹介した Lie 代数階数条件を満たし局所可到達ではあるが, Sussmann による局所可制御性の十分条件 [26] は満たさない. ただしこの定理は十分条件を示したものであって, それを満たさないからといって局所可制御でないとはいえない. 大域的な可制御性についても解析的には証明されていない. もっとも以下で示すように事実上いくつかの方法で任意の 2 点間の位置決めが実現されている.

このマニピュレータには重力が作用しないため, 5 節に述べたように滑らかな状態フィードバックによる平衡点への漸近安定化は不可能である. しかし平衡多様体への安定化は可能で, Oriolo と中村 [1, 2] は単純な PD 制御でそれが実現できることを示した. すなわち, 能動関節の角度偏差および角速度に基づく PD フィードバックによって能動関節トルクを与えれば, 能動関節角度は目標値に, 能動・非駆動両関節の角速度はゼロに収束する. 非駆動関節の角度がどのような値をとるかは決定できないものの, ある角度で停止することは保証される.

中村ら [3] は Fig.1 の UAM の能動関節に周期入力を与えて非駆動関節角度を $\theta_2 = \pm\pi/2$ に漸近安定化することに

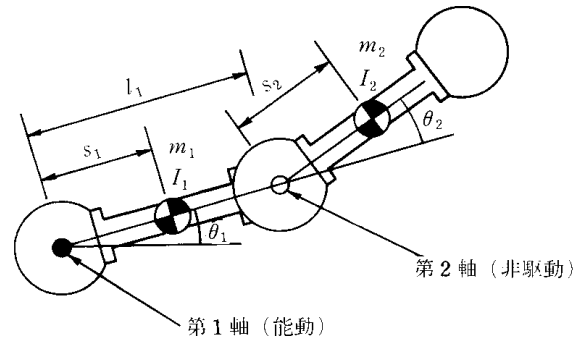


Fig. 1: 水平 2 軸 UAM

成功した. 能動関節がある角度から回転して元の角度に戻るような bang-bang 状の区分一定加速度の軌道を与える. そのとき往復運動前後で非駆動関節の角度・角速度に生ずる変化分 $\delta\theta_2, \delta\dot{\theta}_2$ を $(\theta_2, \dot{\theta}_2)$ の位相平面上のベクトル場として表現する. ベクトル場をドリフト項, 加速度振幅 a に比例する項, a^2 に比例する項に分解し, それらをベクトル場が $(\theta_2, \dot{\theta}_2) = (\pm\pi/2, 0)$ に収束するように重ね合わせる. すなわち $(\theta_2, \dot{\theta}_2)$ の位相平面上での位置に応じて能動関節の加速度振幅を切り換え, $(\pm\pi/2, 0)$ が安定平衡点となるようなベクトル場を作り出している.

中村ら [4] はさらに, 両方の関節を任意の角度に位置制御している. まず能動関節を目標角度に位置決めし, 次に能動関節への周期入力によって非駆動関節を目標角度で停止させる. 能動関節には

$$\theta_1 = \theta_{1d} + \gamma(\cos \psi - 1) \quad (\psi = \omega t) \quad (10)$$

という正弦波状の入力を与える. ここで θ_{1d} は能動関節の目標角度である. 2 階の非ホロノミック拘束は,

$$\ddot{\theta}_2 + (1 + \mu \cos \theta_2)\dot{\theta}_1 + \mu\dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 = 0 \quad (11)$$

ただし $\mu = m_2 l_1 s_2 / (m_2 s_2^2 + I_2)$ である. 上式に (10) を代入し, $\Omega = \frac{d\theta_2}{d\psi} (= \dot{\theta}_2 / \omega)$ という変数変換を行うと,

$$\frac{d}{d\psi} \begin{pmatrix} \Omega \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma(1 + \mu \cos \theta_2) \cos \psi - \gamma^2 \mu \sin \theta_2 \sin^2 \psi \\ \Omega \end{pmatrix} \quad (12)$$

さまざまな初期値から (12) を数値積分し, 各周期で能動関節が目標角度に戻ったとき ($\psi = 2n\pi$: n は整数) の $(\theta_2, \dot{\theta}_2)$ を位相平面上にプロットすると, 振幅 γ が小さい場合には Fig.2 のような閉軌道群が得られる. $(\theta_2, \dot{\theta}_2)$ は 1 周期毎にこれらの軌道上を推移するから, $(\theta_2, \dot{\theta}_2) = 0$ を通る軌道に系を安定化すれば, 非駆動関節は目標角度 θ_{2d} に到達して停止できる. ところで閉軌道の形状は振幅 γ が大きくなるほど θ_2 方向の径が長くなる. $(\theta_2, \dot{\theta}_2)$ の位相平面内での位置に応じ振幅 γ を変調して軌道を変形すれば, 目標軌道への安定化を行うことができる. Fig.3 はこの方法で非駆動関節を $\theta_2 = 0$ へ位置

7 例2：水平3軸 UAM

筆者は中村らの研究に刺激を受けて、水平3軸 UAM のブレーキを用いない位置制御を試みている。第1, 2軸は能動関節, 第3軸は鉛直軸回りに回転する非駆動関節である。この UAM も第一積分の存在条件を満たさず, 2階の非ホロノミック系である。また [16, 25] ではこの UAM と等価な系の平衡点における局所可制御性が証明されている。

筆者 [11] は, 任意の初期状態から任意の目標状態に到達可能な軌道を実際に見出すという構成的方法によって, このマニピュレータの大域的な可制御性を証明した。こうした軌道の存在は大域的な可制御性の定義を満足する。また構成された軌道は制御の段階で目標軌道として使える。

Fig.4 に自由リンクの動力学モデルを示す。 $\lambda = l + I/(ml)$ とすれば, 系の拘束は,

$$-\ddot{x} \sin \theta + \ddot{y} \cos \theta + \lambda \ddot{\theta} = 0 \quad (13)$$

と表される。 [11] では関節に対するリンクの撃心の挙動に着目して軌道を構成している。撃心の位置を (x_P, y_P) とし, 関節の並進加速度の関節-重心方向成分を a_{xL} , それに直交する成分を a_{yL} で表す。

$$x_P = x + \lambda \cos \theta, \quad y_P = y + \lambda \sin \theta$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = a_{xL} \cos \theta + a_{yL} \sin \theta \\ \ddot{y} = a_{xL} \sin \theta - a_{yL} \cos \theta \end{cases}$$

を (13) に代入し, さらに新たな入力 (u_t, u_n) を $a_{xL} = u_t + \lambda \dot{\theta}^2$, $a_{yL} = u_n$ とすると,

$$\ddot{\theta} = u_n/\lambda, \quad \ddot{x}_P = u_t \cos \theta, \quad \ddot{y}_P = u_t \sin \theta \quad (14)$$

という関係が得られる。

ここで $u_t \neq 0, u_n = 0$ とし, 関節をリンク重心の方向に加減速すると, (14) よりリンクの角加速度 $\ddot{\theta}$ はゼロとなる。これを利用すれば回転を伴わない並進運動が可能である。また, $u_t = 0, u_n \neq 0$ とすると, (14) より $\ddot{x}_P = 0, \ddot{y}_P = 0$ となり, 撃心の初期速度がゼロならばリンクの角速度・角加速度に関係なく撃心は基準座標系の1点にとどまる。すなわち撃心を中心とした円周軌道上でどのように関節の位置を加減速しても撃心の位置は変化しない。これにより並進を伴わない回転運動が可能である。

これらの軌道要素を組合せて, 任意の2点間の位置決め軌道が構成できる (Fig.5)。まず撃心を中心 A から C までリンクを回転させる。次に関節を重心の方向に D まで並進させる。最後に D から B まで撃心を中心リンクを回転させる。以上の操作で A から B への位置制御が完了する。

状態変数としては, 一般化座標のみでなく一般化速度も含まれるから, 初期速度, 目標速度がゼロでない場合も考えねばならない。しかし, 運動中のリンクを停止する軌道,

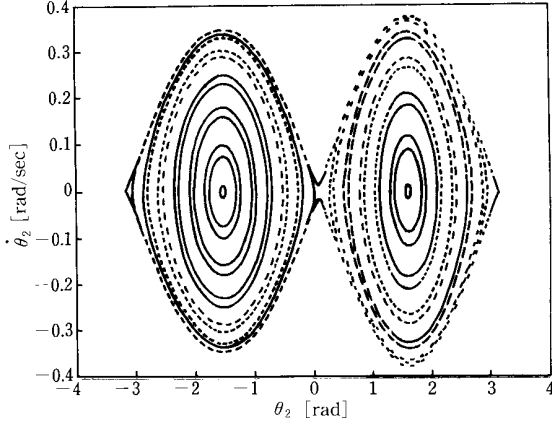


Fig. 2: 周期入力による閉軌道群

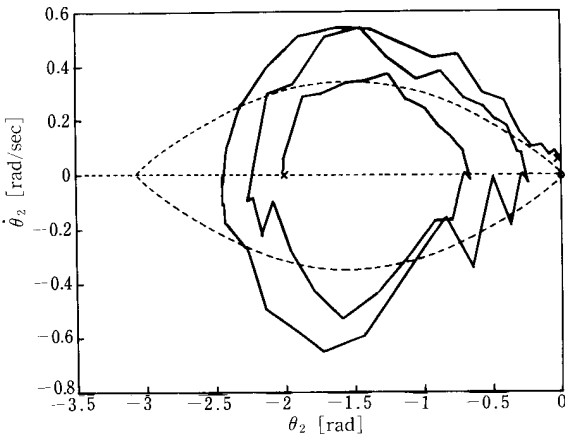


Fig. 3: 位置制御の実験結果

制御した際の実験結果である。また文献 [4] では振幅 γ が大きくなると系がカオスの挙動を示すことも報告されている。

上で述べた制御方法はヒューリスティックに構築されていたが, 鈴木ら [5] は周期入力を与えた系の時間平均をとって簡単な形に近似する平均化法を適用し, リアプノフ関数を用いて解析的に安定化フィードバックを設計している。

また De Luca ら [7] は, 同じ構造の UAM について, 状態を目標点に近づける開ループ制御を繰り返すことによる位置制御を提案した。開ループ制御は能動関節が1回毎に目標角度に戻るような区分一定加速度入力として与え, 系の nilpotent 近似に基づいて入力振幅と制御時間を決定する。この開ループ制御によって非駆動関節が目標角度に, 角速度がゼロに近づくには初期状態がある領域内にある必要がある。そうでない場合は一時的に入力をゼロとして, 状態がその領域に入るまで非駆動関節を回転させるという方法を取っている。

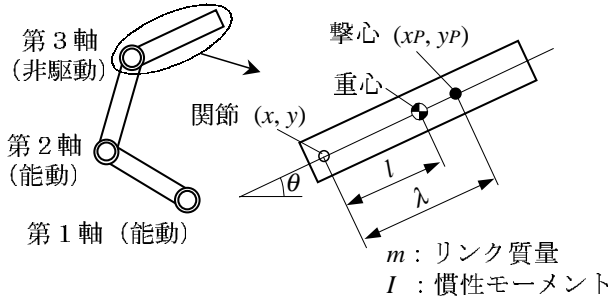


Fig. 4: 自由リンクのモデル

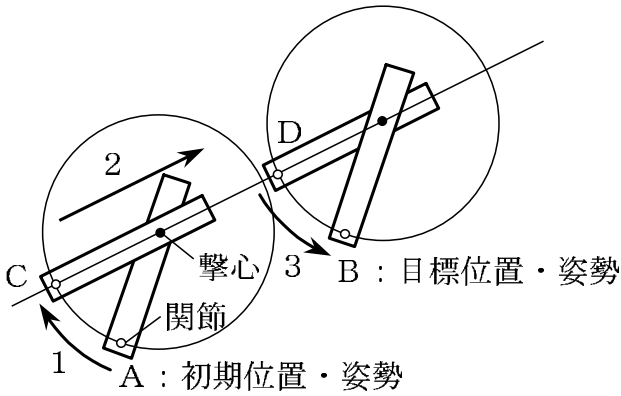


Fig. 5: リンクの位置制御

および静止状態から目標位置で目標速度を与える軌道も容易に構成できる。初期運動からの停止点と、目標位置・速度への出発点を位置決め操作によって結べば、速度を含む任意の2つの状態を結ぶ軌道が構成できる。すなわち、このマニピュレータの大域的な可制御性が示せる。

このUAMも水平面内にあるため平衡点を漸近安定化する滑らかな状態フィードバック則は存在しない。そこで、筆者ら [12] は目標点ではなく目標軌道を安定化するフィードバック制御を提案している。2つの入力 u_t , u_n のうち一方を用い、3つの一般化座標のうち1つに関して目標軌道にしたがった運動を生じさせる。その速度や加速度は、残り2つの座標の挙動を表す部分系におけるパラメータとなる。部分系がフィードバック安定化可能となるようにこれらのパラメータの値を選ぶ。最後にもう一方の入力を用いてフィードバックを構成し、部分系を目標軌道へ安定化する。

直観的にはこれを次のように説明できる。並進軌道の場合、一方の入力を用いて関節を目標軌道と平行に加減速すると、リンクには加速度と逆方向に慣性力が作用する。そのときリンクは仮想的な重力場における振りまたは倒立振り子と等価な挙動を示す。そこで目標軌道と垂直な方向の加速度を入力として振り子/倒立振り子と同様の安定化フィードバック則を構成し、リンク角度と関節位置を目標軌道上へ安定化することができる。また回転軌道の場合は遠心力を

仮想的な重力として利用すれば安定化のためのフィードバックが構成可能である。

並進軌道の安定化には厳密線形化 [28] を用いた。目標軌道を基準座標系の x 軸とする。入力 $u_t = a_{xB} / \cos \theta$ を与え、 \ddot{x}_P を一定値 a_{xB} とする。座標変換

$$z = (y_P \quad \dot{y}_P \quad a_{xB} \tan \theta \quad a_{xB} \dot{\theta} / \cos^2 \theta)^T \quad (15)$$

と非線形状態フィードバックによる入力変換

$$u_n = -2\lambda \dot{\theta}^2 \tan \theta + \lambda v \cos^2 \theta / a_{xB} \quad (16)$$

を (14) の系に加えることにより、状態 z と入力 v による

$$\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v \quad (17)$$

という可制御な線形系が得られる。これを線形コントローラによって $z \rightarrow 0$ とすれば、 $y_P, \dot{y}_P, \theta, \dot{\theta} \rightarrow 0$ となる。すなわち撃心位置、リンク姿勢は目標軌道上に収束する。

また、回転軌道においては、入力 u_n を用いて目標角速度・角加速度を与えながら u_t によって撃心位置 (x_P, y_P) を目標軌道中心 (x_C, y_C) に収束させる。撃心の位置偏差を、関節一重心方向の成分 e_t およびそれと直交する成分 e_n で表す。

$$\begin{pmatrix} e_t \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_C - x_P \\ y_C - y_P \end{pmatrix} \quad (18)$$

$\dot{\theta} = \omega$, $\ddot{\theta} = \alpha$ とすると、撃心の位置偏差の挙動は、

$$\frac{de}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \omega^2 & -\alpha & 0 & -2\omega \\ \alpha & \omega^2 & 2\omega & 0 \end{pmatrix} e + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} u_t \quad (19)$$

$$e = (e_t \quad e_n \quad \dot{e}_t \quad \dot{e}_n)^T$$

という係数時変の線形系で表される。これを定係数の線形系で近似してコントローラを設計すればよい。以上の制御則を用いた位置制御の実験結果を Fig. 6 に示す。

最近、井村ら [13] は同じ構造のUAMにおいて座標変換および入力変換により、 $\xi_1 = u_1$, $\xi_2 = u_2$, $\xi_3 = \xi_2 u_1$ という2階の chained form を導出した。実はこの変換と (15), (16) の変換とはほぼ等価である。また [13] では任意の初期状態から目標点への安定化を行う区分解析的な時変フィードバック則を提案している。

8 おわりに

UAM を扱っていて感ずることは、一つ一つの系の「個性」である。軸数、非駆動関節の配置、重力項の有無、あるいはリンクの質量分布によってさえも性質が根本的に変わり、制御にも異なるアプローチが要求される。これはホロ

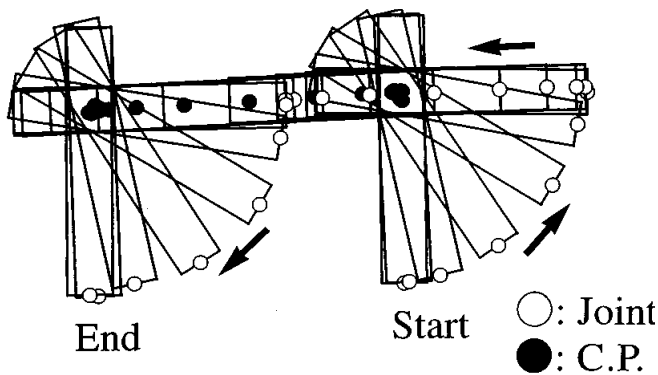


Fig. 6: 実験結果

ノミクなマニピュレータでは経験しなかったことである。統一的な美しい形をめざす定式化も重要だが、逆に個々の系の性質に深く入り込むことによっても新たな着想が得られるのではないかと、とひそかに思いつつ研究を進めている。

非ホロノミック系研究の中でも未開拓だった本分野は、最近めざましい発展を見せており、今後が期待される。昨年神戸で開催された CDC'96 でも多くの関連論文が発表された。Reyhanoglu ら [29] による完全 2 階非ホロノミック系の定義と強可到達性に関する議論、また Rathinam と Murray [30] による differential flatness の問題など、本稿で紹介しきれなかった研究については参考文献を参照されたい。

2 階非ホロノミック系に関連した WWW サイト

本分野の研究グループの WWW アドレスをここにいくつか紹介しておく（筆者自身は残念ながら公開していない）。これらから直接入手できる参考文献も多い。

<http://mitsukuni.t.u-tokyo.ac.jp/>

(東京大学吉本・中村研 [3, 4, 5, 6, 14])

<http://labrob.ing.uniroma1.it/>

(Universita degli Studi di Roma "La Sapienza" [1, 2, 7, 18])

<http://avalon.caltech.edu/~murray/>

(California Institute of Technology [25, 30])

<http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/project/mlab/www/>

(Carnegie Mellon University [16])

<http://www.isr.umd.edu/Labs/ISL/isl.html>

(University of Maryland [22])

http://www.itk.ntnu.no/ansatte/Egeland_Olav/

(Norwegian University of Science and Technology [23, 19, 21])

参考文献

[1] G. Oriolo and Y. Nakamura: Free-Joint Manipulators: Motion Control under Second-Order Nonholonomic Constraints, Proc. IEEE/RSJ Int. Workshop on Intelligent Robots and Systems (IROS'91), 1248/1253 (1991)

[2] G. Oriolo and Y. Nakamura: Control of Mechanical Systems with Second-order Nonholonomic Constraints: Underactuated Manipulators, Proc. 30th IEEE Int. Conf. on Decision and Control, 2398/2403 (1991)

[3] 中村, 岩本, 吉本: ドリフト項をもつ非ホロノミック機械の制御, 日本ロボット学会誌, 13-6, 830/837 (1995)

[4] 中村, 濃沼, 鈴木: 自由関節を持つ平面アームのカオスの挙動と非線形制御—ドリフトを持つ非ホロノミック機械の制御—, 日本ロボット学会誌, 14-4, 602/611 (1996)

[5] 鈴木, 濃沼, 中村: 非ホロノミック動力学システムの非線形制御—平均化法を用いた周期入力に対する挙動の解析とそれに基づくフィードバック制御系の設計—, 日本機械学会ロボティクス・メカトロニクス講演会'96 講演論文集, 1101/1104 (1996)

[6] 濃沼, 鈴木, 中村: 自由関節を持つリンク系の非線形構造について, 第 13 回日本ロボット学会学術講演会予講集, 693/694 (1995)

[7] A. De Luca, R. Mattone and G. Oriolo: Control of Underactuated Mechanical Systems: Application to the Planar 2R Robot, Proc. 35th IEEE Int. Conf. on Decision and Control, 1455/1460 (1996)

[8] 荒井, 館: 非駆動関節を有するマニピュレータの動力学的干渉による位置制御, 計測自動制御学会論文集, 25-9, 1012/1017 (1989)

[9] 荒井, 館: 非駆動関節を有するマニピュレータの作業座標系における動的制御, 日本機械学会論文集 C 編, 57-537, 1621/1624 (1991)

[10] 荒井, 館: 非駆動関節を有するマニピュレータの経路追従制御, 計測自動制御学会論文集, 27-7, 800/805 (1991)

[11] 荒井: 非駆動関節を有する 3 自由度マニピュレータの非ホロノミック拘束下における可制御性, 日本ロボット学会誌, 14-5, 751/758 (1996)

[12] H. Arai, N. Shiroma and K. Tanie: Feedback Control of a 3-DOF Manipulator with a Passive Joint under a Non-holonomic Constraint, Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation (1997)

[13] J. Imura, K. Kobayashi and T. Yoshikawa: Nonholonomic Control of 3 Link Planar Manipulator with a Free Joint, Proc. 35th IEEE Int. Conf. on Decision and Control, 1435/1436 (1996)

[14] O. J. Sordalen, Y. Nakamura and W. J. Chung: Design of a Nonholonomic Manipulator, Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, 8/13 (1994)

[15] M. W. Spong: The Swing Up Control Problem for the Acrobot, IEEE Control Systems, 15-1, 49/55 (1995)

[16] K. M. Lynch: Nonprehensile Robotic Manipulation: Controllability and Planning, Tech. Rep. CMU-RI-TR-96-05, Carnegie Mellon University (1996)

[17] 大須賀, 吉田, 小野: トルクユニットマニピュレータの提案, 日本ロボット学会誌, 14-7, 1018/1025 (1996)

[18] A. De Luca, R. Mattone and G. Oriolo: Dynamic Mobility of Redundant Robots using End-Effector Commands, Proc. 1996 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 1760/1767 (1996)

[19] K. Y. Pettersen and O. Egeland: Exponential Stabilization of an Underactuated Surface Vessel, Proc. 35th IEEE Int. Conf. on Decision and Control, 967/972 (1996)

[20] M. Reyhanoglu: Control and Stabilization of an Underactuated Surface Vessel, Proc. 35th IEEE Int. Conf. on Decision and Control, 2371/2376 (1996)

[21] K. Y. Pettersen and O. Egeland: Position and Attitude Control of an Autonomous Underwater Vehicle, Proc. 35th IEEE Int. Conf. on Decision and Control, 987/991 (1996)

- [22] V. Manikonda and P. S. Krishnaprasad: Dynamics and Controllability of a Planar Rigid Body with a Thruster, Proc. 30th Annual Conference on Information Sciences and Systems (1996)
- [23] K. Y. Wichlund, O. J. Sørдалen and O. Egeland: Control Properties of Underactuated Vehicles, Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, 2009/2014 (1995)
- [24] A. M. Bloch, M. Reyhanoglu and N. H. McClamroch: Control and Stabilization of Nonholonomic Dynamic Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, **37**-11, 1746/1757 (1992)
- [25] A. D. Lewis and R. M. Murray: Configuration Controllability of Simple Mechanical Control systems, SIAM J. Control and Optimization, to appear.
- [26] H. J. Sussmann: A General Theorem on Local Controllability, SIAM J. Control and Optimization, **25**-1, 158/194 (1987)
- [27] R. W. Brockett: Asymptotic Stability and Feedback Stabilization, Differential Geometric Control Theory (R. W. Brockett, R. S. Millman, and H. J. Sussmann, eds.), 181/191, Birkhäuser, Boston (1983)
- [28] 三平: 厳密な線形化とそのけん引車両の軌道制御への応用, 計測と制御, **31**-8, 851/858 (1992)
- [29] M. Reyhanoglu, A.J. van der Schaft, N.H. McClamroch and I. Kolmanovsky: Nonlinear Control of a Class of Underactuated Systems, Proc. 35th IEEE Int. Conf. on Decision and Control, 1682/1687 (1996)
- [30] M. Rathinam and R.M. Murray: Configuration Flatness of Lagrangian Systems Underactuated by One Control, Proc. 35th IEEE Int. Conf. on Decision and Control, 1688/1693 (1996)
- [31] 中村: 非ホロノミックロボットシステム 第1回～第5回, 日本ロボット学会誌, **11**-4～7 (1993), **12**-2 (1994)
- [32] H. Nijmeijer and A. J. van der Schaft: Nonlinear Dynamical Control Systems, Springer-Verlag (1990)
- [33] R. M. Murray, Z. Li and S. S. Sastry: A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation, CRC Press (1994)