

# Underactuated manipulator の非ホロノミック制御

機械技術研究所 荒井 裕彦

## Nonholonomic Control of Underactuated Manipulators

Mechanical Engineering Laboratory Hirohiko Arai

Key words – underactuated manipulator, nonholonomic system, nonlinear control

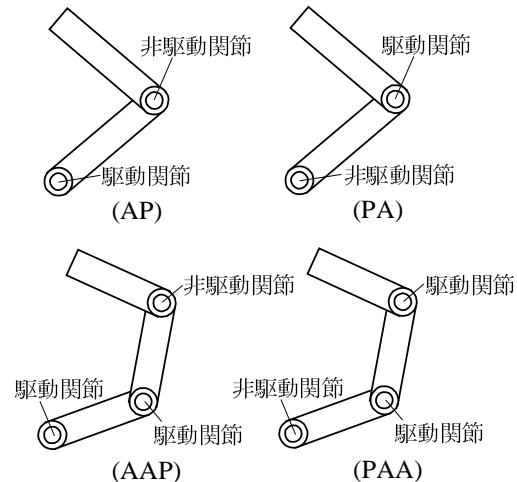
### 1 はじめに

一般にマニピュレータは、各関節にその関節を駆動するアクチュエータを一個ずつ備え、関節の数とアクチュエータの数は等しい。この構成は最も初期の産業用ロボット以来現在まで全く変わっていない。コストダウンなどを目的として、アクチュエータの数よりも多くの関節を駆動するいろいろな機構が提案されてきたが、かえって複雑な構造になってしまう場合が多い。

電車が加速するとその中で立っている人は慣性力の作用で後ろに倒れそうになる。これと同様に、マニピュレータの一つの関節を加減速すると慣性力によって他の関節にもトルクが発生する。この性質を動力的干渉性と呼ぶ。この作用は外乱となるため、従来の制御ではこれを打ち消すトルクをアクチュエータによって発生させていた。ところがこのようなトルクが発生するということは、それ自身はトルクの発生能力をもたない関節の運動を他の関節の運動によって引き起こせることも意味する。

筆者らは 1988 年頃に、アクチュエータをもたない非駆動関節を有する Underactuated manipulator (以下では UAM と略す) を、従来は外乱として扱われてきた動力的干渉性を積極的に利用して制御する方法の研究を開始した。初期の研究 [4, 5] では、アクチュエータをもつ駆動関節と、アクチュエータの代わりに保持ブレーキを備えた非駆動関節の 2 種類の関節でマニピュレータを構成した。非駆動関節はブレーキ ON では一定角度で固定され、その角度に影響を与えることなく駆動関節が制御できる。一方ブレーキ OFF では非駆動関節は自由に回転し、駆動関節の運動によって発生する慣性力を利用して非駆動関節を間接的に制御する。以上の 2 つの状態での制御を組合せて、マニピュレータ全体の姿勢を制御する。

この方法でアクチュエータのいくつかをブレーキに置き換えることにより、軽量化、省エネルギー化、コストダウンなどの効果を見込むことができる。通常のマニピュレータでアクチュエータが故障した際の代替



第 1 図: Underactuated manipulator の例

手段としても役立つと考えられる。また宇宙ロボットへの応用は、重力の影響がないため、より効果的であると思われる。

UAM の研究は、このように実用的な動機から始められたものだが、1991 年に Oriolo と中村 [6] が UAM の非ホロノミック性を指摘し、非駆動関節のブレーキを使わなくても姿勢の変更が原理的に可能であることが明らかになって以後、非線形系としての性質の興味深さに焦点を置いた理論的な研究に関心が集まっている。本稿では UAM の基本的な性質について解説するとともに、その非ホロノミック性を利用した制御に関する最近の研究のいくつかを紹介する。なお、非ホロノミック系全般の理解に関しては、文献 [1, 2, 3] などが役立つと思われる。

### 2 UAM の基本的な性質

本分野の研究は、UAM という具体的な制御対象があって、その特性を把握した上で適切な制御方法を考える、という順序で進められてきた。そこで、まずはじめに次のようなクイズを考えてみたい。

第 1 図のような 4 種類の構造のマニピュレータがある。(AP), (PA) は平面 2 軸マニピュレータである。(AP) の場合, 基部の第 1 軸がアクチュエータを有する駆動関節, 第 2 軸が自由に回転する非駆動関節である。(PA) においては逆に第 1 軸が非駆動関節, 第 2 軸が駆動関節とする。また, (AAP), (PAA) は平面 3 軸マニピュレータである。(AAP) では第 1 軸, 第 2 軸が駆動関節, 第 3 軸が非駆動関節である。(PAA) では第 1 軸が非駆動関節, 第 2 軸, 第 3 軸が駆動関節である。さらに, これらのそれぞれについて, マニピュレータが動作する平面が水平で関節に重力が作用しない場合と, 動作平面が鉛直で重力が作用する場合を考え, 前者を (AP-h) ~ (PAA-h), 後者を (AP-v) ~ (PAA-v) とする。なお, 非駆動関節はブレーキをもたず, 非駆動関節における摩擦は無視できるとする。設問は以下の 3 つである。これら 8 種類の構造・配置の UAM のうち,

問 1 いずれが非ホロノミック系か? また, そのうちでどれが 2 階の非ホロノミック系となるか?

問 2 局所可到達性, 局所可制御性をもつものはどれか? 大域的に可制御となるのはどれか?

問 3 状態フィードバックで安定化できるのはどれか?

## 2.1 非ホロノミック拘束

まず問 1 を考えるために, ホロノミック/非ホロノミックという言葉の説明しておこう。力学系の拘束条件のうち, 時間  $t$  と一般化座標  $q$  のみを含む代数方程式,

$$g(q, t) = 0 \quad (1)$$

として表わされるものをホロノミックと呼ぶ。そうでない拘束はすべて非ホロノミックである。ロボット工学や制御工学では, 一般化座標の時間微分すなわち速度や加速度を含む積分不可能な微分方程式で表わされる非ホロノミック拘束が主に扱われる。こうした力学系としては, 車輪型移動体や宇宙ロボットなどがよく知られている。

これらにおける非ホロノミック拘束は, 前者では運動の方向が幾何学的に限定されるような運動学的拘束, 後者では角運動量の保存による動力的拘束であり, ともに一般化座標  $q$  および一般化速度  $\dot{q}$  を含む積分不可能な 1 階の微分方程式

$$H(q)\dot{q} = 0 \quad (\text{Pfaffian 拘束}) \quad (2)$$

として表される。この意味でこれらは 1 階の非ホロノミック系と呼ばれる。こうした系の状態方程式は駆動

部分の速度を入力  $u$  として, 次のようなドリフト項をもたないアフィン形式で表すことができる。

$$\dot{q} = G(q)u \quad (3)$$

ところが, UAM では拘束が一般化座標と一般化速度の他に加速度までも含む積分不可能な 2 階の微分方程式として表され, Pfaffian 拘束に変換できない場合が多い。これを 2 階の非ホロノミック拘束と呼ぶ。

UAM の運動方程式は, 次のような形で表される。

$$M_{aa}(q)\ddot{q}_a + M_{ap}(q)\ddot{q}_p + b_a(q, \dot{q}) + c_a(q) = \tau \quad (4)$$

$$M_{pa}(q)\ddot{q}_a + M_{pp}(q)\ddot{q}_p + b_p(q, \dot{q}) + c_p(q) = 0 \quad (5)$$

ただし,  $q_a \in \mathbb{R}^m$  は駆動関節の角度,  $q_p \in \mathbb{R}^{n-m}$  は非駆動関節の角度,  $M_{aa}, M_{ap}, M_{pa}, M_{pp}$  は慣性行列,  $b_a, b_p$  はコリオリ・遠心力項,  $c_a, c_p$  は重力項を表す。ここで式 (4) は駆動関節のトルク  $\tau \in \mathbb{R}^m$  に関する式である。式 (5) は非駆動関節のトルクが零となることを表し, これが系に対する  $n-m$  個の動力的な拘束となる。

さて, 問題は加速度を含む式 (5) の拘束がどのような場合に可積分で式 (2) や式 (1) のような形に帰着できるか, ということである。この疑問に対する答えが Oriolo と中村 [6] による以下の定理である。

[定理 1]: 式 (5) が一般化座標, 速度, 時間の関数である第一積分をもち,  $h_1(q, \dot{q}, t) = 0$  という 1 階の非ホロノミック拘束に帰着するための必要十分条件は,

条件 1 非駆動関節の重力項  $c_p(q)$  が定数である。

条件 2 慣性行列  $M_{aa}, M_{ap}, M_{pa}, M_{pp}$  が非駆動関節の角度  $q_p$  を陽に含まない。

このとき, 第一積分は次のように求められる。

$$h_1(q, \dot{q}, t) = (M_{pa} \quad M_{pp})\dot{q} + c_p t + d_1 = 0 \quad (6)$$

[定理 2]: さらに, 式 (6) が一般化座標と時間のみの関数である第二積分をもち,  $h_2(q, t) = 0$  と表されるホロノミック拘束となるための必要十分条件は, 行列  $(M_{pa}(q) \quad M_{pp}(q))$  の零空間  $\Delta(q)$  が involutive となる, すなわち  $\Delta(q)$  から取り出した任意の 2 つの列ベクトル  $g_i, g_j$  の Lie 括弧  $[g_i, g_j] = \frac{\partial g_j}{\partial q} g_i - \frac{\partial g_i}{\partial q} g_j$  が  $\Delta(q)$  に属することである。この条件が満たされるとき, 第二積分は,

$$h_2(q, t) = h_{20}(q) + \frac{c_p}{2} t^2 + d_1 t + d_2 = 0 \quad (7)$$

と表される。ただし,  $\partial h_{20} / \partial q = (M_{pa} \quad M_{pp})$  である。

これらの定理に基づいて問 1 を検討する。まず, UAM が鉛直平面内にある (AP-v) ~ (PAA-v) では, 関節角  $q$  に依存した重力  $c_p(q)$  が非駆動関節に作用するため,

定理 1 の条件 1 を満たさない。(AP-h) ~ (PAA-h) は水平面内にあるため  $c_p(q) = 0$  となり条件 1 は満たす。しかし、(AP-h) と (AAP-h) では慣性行列が非駆動関節の角度  $q_p$  に依存するため、条件 2 を満たさない。

(PA-h) と (PAA-h) は定理 1 の条件を両方とも満たすから、少なくとも第一積分をもつ。基部関節が非駆動関節で、外部からトルクが加わらないために角運動量保存が成り立ち、宇宙ロボットと同様にそれが角速度に関する拘束条件になるのである。非駆動関節の重力項は零であるから、初期角運動量が零ならば、式 (6) は式 (2) と同じ形になる。定理 2 でいう零空間  $\Delta(q)$  は、式 (2) に対応するアフィン形式 (3) における  $G(q)$  のベクトル場が張る線形空間と等価である。

(PA-h) の場合、このベクトル場はただ一つのベクトルで構成されるから、 $\Delta(q)$  は involutive となり、定理 2 の条件を満たす。すなわち第二積分も存在する。一方 (PAA-h) では、 $\Delta(q)$  を構成する 2 つのベクトルの Lie 括弧は一般に元の線形空間に属さず、この条件は満たされない。

以上の結果をまとめると、問 1 に対する解答は、

- ホロノミック系：(PA-h)
- 1 階の非ホロノミック系：(PAA-h)
- 2 階の非ホロノミック系：(AP-h), (AAP-h), (AP-v) ~ (PAA-v)

ということになる。

これらの拘束によってマニピュレータの挙動には以下のような違いが現れる。初期速度が零の状態から出発した場合、ホロノミック系である (PA-h) の UAM では、速度に関係なく非駆動関節の角度と駆動関節の角度が 1 対 1 に対応する。また、1 階の非ホロノミック系である (PAA-h) の UAM では、駆動関節が停止すると同時に非駆動関節も停止する。ただし関節角の間に関係を見いだすことはできない。それ以外の UAM では、運動している状態から駆動関節を停止させても、非駆動関節は一般には運動し続ける。

## 2.2 可制御性

重力が作用する (AP-v) ~ (PAA-v) は、非駆動関節よりも先の部分の重心が非駆動関節の直上または直下にある姿勢で速度零の状態に平衡点をもつ。これらの場合、平衡点近傍で状態方程式を線形近似すると可制御な線形系が得られることが、倒立振り子においてよく知られている。(AP-h) ~ (PAA-h) は重力項が零であるため線形近似系は不可制御である。ただしこれらは

線形近似系の性質であって、UAM においていかなる制御が実現できるかを知るためには、問 2 に挙げたような非線形系としての可制御性を調べる必要がある。

局所可到達性とは、大ざっぱに言って、系がある状態  $x_0$  から出発してその近傍内の軌道を通りながら到達できる状態の集合  $\Lambda(x_0)$  が状態空間内で零でない容積をもつ開集合となることを意味する。また、局所可制御性 (STLC) とは、系が局所可到達の上、集合  $\Lambda(x_0)$  が元の状態  $x_0$  の近傍を含むことである。また、任意の初期状態から別の任意の状態へと系を移すことができる場合、系は大域的に可制御である。すべての関節が駆動される普通のマニピュレータにおいては、あらゆる姿勢で任意の関節角速度を発生することができる。関節角と角速度を合わせたものを状態変数とすれば、局所可到達性、局所可制御性、大域的な可制御性はすべて成り立つ。一方、非駆動関節をもつ UAM でこれらが成立するかどうかは自明な問題ではない。

さて、問 2 は問 1 の解答とも密接に関連する。例えば拘束条件が時間に依存せず  $g(q) = 0$  となるホロノミック系の運動は、一般化座標  $q$  がこの式で表される超曲面上のみに限定される。また、式 (2) のような 1 階の非ホロノミック系も、状態を一般化座標  $q$  と一般化速度  $\dot{q}$  で表すならば、式 (2) を満たさない状態には到達し得ない。すなわち、可制御性を論ずる前に、状態空間をどのように設定するか、という問題が存在する。拘束をあらかじめ考慮して状態空間の次元を低く設定すれば、その状態空間内では可制御性が成立する、という場合もありうる。

例えば、(PA-h) の UAM はホロノミック系であって、初期速度を零とすれば駆動関節の角度  $q_a$  で非駆動関節の角度  $q_p$  が決定される。ということは駆動関節の角度  $q_a$  および角速度  $\dot{q}_a$  のみで系の状態が完全に記述できる。駆動関節に任意の角度・角速度を与えることは可能であるから、これらを状態変数とすれば、系は局所的にも大域的にも可制御であるとも言える。もちろん、状態変数を 2 つの関節の角度・角速度にとれば、局所可到達性、局所可制御性、大域的な可制御性はすべて成り立たない。

また、1 階の非ホロノミック系である (PAA-h) の UAM の状態方程式は、駆動関節の角速度  $\dot{q}_a$  を入力  $u$  として、式 (3) のように表せるから、3 つの関節角  $q$  のみを状態変数として系の挙動を記述できる。さきに述べたように  $G(q)$  を構成する 2 つのベクトルおよびそれらの Lie 括弧が張る線形空間の次元は 3 となり、状態空間の次元と等しいため系は局所可到達である。また、この系では入力  $u$  の符号を反転させると軌道を逆にさかのぼれるために、局所可到達が言えれば局所可

制御性も成り立つ．さらに，微小な可到達集合を接続してゆけば，任意の状態にたどりつくことができるから，大域的にも可制御である．この場合も状態変数に関節角速度を含めると，局所可到達性，局所可制御性，大域的可制御性は成立しない<sup>1</sup>．

一方で，(AP-h)，(AAP-h)，(AP-v) ~ (PAA-v) の UAM は関節角加速度の間で拘束をもつから，角度と角速度を合わせたものを状態変数としなければ系の挙動が表現できない．式 (5) より，これらの状態方程式は，駆動関節加速度  $\ddot{q}_a$  を入力  $u \in \mathbb{R}^m$  として，以下のアフィン形式となる．

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} &= g_0(q, \dot{q}) + G(q)u \quad (8) \\ &= \begin{pmatrix} \dot{q} \\ u \\ -M_{pp}^{-1}(b_p + c_p + M_{pa}u) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ただし， $G(q) = (g_1, g_2, \dots, g_m)$  とする．入力  $u$  が零となっても，状態は  $g_0$  に依存して変化するから， $g_0$  をドリフト項と呼ぶ．これらでは状態変数間の拘束によって状態が存在しうる領域が狭められていないため，角度・角速度ともに可制御となる可能性がある．

式 (8) の系の局所可到達性は Lie 代数階数条件によって判定できる．Lie 括弧は 2 つのベクトル場の流れを組み合わせて状態が動きうる新たなベクトル場を生成する操作である．ベクトル場の集合  $\{g_0, \dots, g_m\}$  から重複を許して 2 つのベクトル場を取り出し，それらの Lie 括弧によって生成したベクトル場を元の集合に加える．この操作を繰り返してできたベクトル場の集合が張る線形空間の次元が状態空間の次元と等しくなる，というのが Lie 代数階数条件である．このとき系は状態空間のあらゆる方向に動くことができるから，局所可到達となる ( involutive というのはその逆に元のベクトル場の線形結合で表された方向以外の流れが生成できないことを意味する ) ．(AP-h)，(AAP-h)，(AP-v) ~ (PAA-v) の UAM はこの条件によって局所可到達であることを示せる．

式 (8) はドリフト項をもつために局所可到達性から局所可制御性を導けない．Sussmann [7] はこのような系が局所可制御となるための十分条件を示している． [ 定理 3 ] : 式 (8) において， $g_0, \dots, g_m$  からなる Lie 括弧の繰り返し ( 例えば  $[g_0, [g_1, [g_0, g_2]]]$  など ) を考える．このような Lie 括弧  $B$  に対して， $\delta_i(B)$  を  $B$  の中に  $g_i$  が現われる回数， $B$  の度数を  $\sum_{i=0}^m \delta_i(B)$  と定義する． $\delta_0(B)$  が奇数でかつ  $\delta_1(B), \dots, \delta_m(B)$  がす

<sup>1</sup> 1 階の非ホロノミック系である車輪型移動体や宇宙ロボットが可制御であるというも前者の意味であって，一般化速度を考慮した状態空間ではこれらも可制御ではない．

べて偶数のとき， $B$  を「悪い」括弧と呼ぶ．それ以外の場合， $B$  を「良い」括弧と呼ぶ．上の例は度数 4 の「良い」括弧である．式 (8) の系は以下の条件を満たせば局所可制御である．

条件 1 系が Lie 代数階数条件を満たす．

条件 2 すべての「悪い」括弧がそれより低い度数の「良い」括弧の線形結合となる．

(AP-h) の UAM は上記の条件を満たさない [13] ．ただし Sussmann の条件は局所可制御性の十分条件であって，それを満たさないからといって局所可制御でないとは断定できない．一方，(AAP-h) の UAM は全関節の角速度が零であるという前提のもとではこの条件を満たし，局所可制御である [17] ．また，可制御な線形近似系をもつ非線形系は局所可制御性が成り立つことが知られており，(AP-v) ~ (PAA-v) の UAM は平衡点の周りで局所可制御である．

平衡点で局所可制御性が成立する (AAP-h)，(AP-v) ~ (PAA-v) の UAM においては，平衡多様体上で微小な可到達集合を接続してゆけば理論上は大域的な可制御性も示せる．しかし平衡多様体上では速度零であるので，こうした軌道では到達に無限の時間を要する．(AAP-h) の UAM に関しては，任意の 2 つの状態 ( 角度・角速度 ) を有限時間で結ぶ軌道が実際に存在するという意味の大域的可制御性も示されている [15] ．また，(AP-h) の UAM について大域的可制御性を理論的に証明した例はこれまで見られないものの，後で示すように任意の 2 つの平衡点間の位置決めが実現されている．

## 2.3 フィードバック安定化

次に問 3 を考えてみよう．非線形系は線形系と異なり，可制御性がただちにフィードバックによる可安定性を意味しない．非ホロノミック系のフィードバック制御の難しさを示しているのが Brockett の定理 [8] である．

[ 定理 4 ] :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (x \in M \subset \mathbb{R}^n, u \in U \subset \mathbb{R}^m) \quad (9)$$

で表される系が平衡点  $x_0$  を漸近安定化させる滑らかな時不変状態フィードバックをもつための必要条件は，条件 1 線形化された系が，不安定な不可制御モードをもたない．

条件 2  $x_0$  の近傍のすべての初期値に対して，式 (9) の解が  $x_0$  に収束する制御入力  $u(t)$  が存在する．

条件 3  $\gamma : (x, u) \mapsto f(x, u)$  で定義される写像  $\gamma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  が原点近傍への上への写像である．

これらのうち可制御性で示せるのは条件2のみである。式(3)で表される1階の非ホロノミック系は、条件3を満たさない。したがって、(PAA-h)のUAMは、車輪型移動体や宇宙ロボットと同様に、滑らかな状態フィードバックで平衡点を漸近安定化することはできない。

2階の非ホロノミック系となるUAMのうち、重力が作用しない(AP-h)、(AAP-h)について考えてみる。式(8)の線形近似系は不可制御なモードをもつが、固有値の実部は零となるため条件1を満たす。一方、式(8)左辺を $\dot{q} = 0, \ddot{q} \neq 0$ とすると、 $g_0 = 0$ となるため、これを満たす $q, \dot{q}, u$ は特別な場合を除いて存在しない。したがって条件3が満たされず、平衡点を漸近安定化する滑らかな状態フィードバックは存在しない[6]。一方で、(AP-v)~(PAA-v)のUAMは重力によるポテンシャル項のためにこれらの条件をすべて満たす。こうした構造の倒立振り等は近似線形系に対する線形状態フィードバックを用いても平衡点に安定化できる。

ただし、Brockettの定理で不可能とされているのは、1)状態のみに依存する、2)滑らかなフィードバックを用いた、3)平衡点への安定化である。これらはそれぞれ、1)時変フィードバック、2)区分解析的フィードバック、3)軌道への安定化、を用いることで避けることができる。次章で示すUAMの制御においては、これらのうちいずれかに属するフィードバック則を用いている。

### 3 UAMの非ホロノミック制御

前章問1~問3への解答を通じて、ひとくちにUAMと言っても、基本的な性質が異なるさまざまな系が存在することを明らかにした。第1図のUAMはすべて非駆動関節を1個しかもたず平面内で運動する単純な構造だったが、一般のUAMはこれらのもつ性質が混在する複雑な力学系となる。例えば、1階・2階の非ホロノミック拘束をあわせもつUAM、姿勢によって可制御性・可安定性が変わるUAMなども考えうる。このことがUAMの制御において、あらゆる構造の系に適用できる普遍的な手法が構築しにくい原因となっている。

実際、これまでに実現されているUAMの非ホロノミック制御は、水平2軸(AP-h)または水平3軸(AAP-h)を対象としたものが中心であって、どんなUAMにも共通して使える制御則はいまだ確立していない。そこで本章では(AP-h)および(AAP-h)のUAMの制御に関する最近の研究をいくつか紹介する。前章で示したように、これらはUAMの最大の特徴である2階の非ホロノミック拘束をもつ。線形近似系が不可制御という、非線形制御系としてもきわめて厳しい条件があるため、その特性を十分に利用しなくては制御できな

い。ここでの主な制御目標は駆動関節の運動によってマニピュレータ全体を目標の形状に位置決めし、停止させることである。

#### 3.1 水平2軸UAM

水平2軸UAM(AP-h)は最も基本的な構造のUAMである。これが制御できれば、アーム中間に1個の非駆動関節をもつ水平UAMは同じ方法ですべて制御できる。中村らはこのタイプのUAMの非ホロノミック制御について先駆的な研究を進めてきた。平衡多様体への安定化[6]、非駆動関節角度が $\theta_p = \pm\pi/2$ となる平衡点への安定化[9]を経て、両方の関節を任意の角度に位置決めすることに成功している[10, 11]。

まず駆動関節を目標角度に位置決めし、そこから小振幅で周期的に運動させることによって、非駆動関節を目標角度まで回転させる。各周期で駆動関節が目標角度に戻ったときの非駆動関節角度・角速度を位相平面上にプロットすると、 $(\theta_p, \dot{\theta}_p) = (\pm\pi/2, 0)$ を中心とした楕円状の閉軌道群が得られる。周期入力を与えた系の時間平均をとって簡単な形に近似する平均化法をこのUAMに適用すれば、閉軌道群は楕円関数で表現できる。目標角度を角速度零で通る軌道に系を安定化すれば、非駆動関節は目標角度に到達して停止する。駆動関節の振幅と閉軌道の形状の係数に着目し、 $(\theta_p, \dot{\theta}_p)$ の位相平面内での位置に応じ振幅を変調して軌道を変形すれば、目標軌道への安定化が行える。また文献[12]では、このUAMの先端に非駆動関節をもう1つ付加した水平3軸UAMに平均化法を適用して系の挙動を解析し、振幅変調による不変多様体への安定化を試みている。

同じ構造のUAMについて、De Lucaら[13]は、状態を目標平衡点に近づける開ループ制御の反復による位置制御を提案している。駆動関節に与える開ループ軌道は系のnilpotent近似に基づいて計画する。これは目標点周りのベクトル場を一種の多項式近似で表す方法で、1次線形近似では失われる可到達性がこの近似法によれば保存される。駆動関節の軌道は毎回目標角度に戻るように入れる。非駆動関節が目標平衡点に近づくには初期状態が特定の領域内にあることが必要で、そうでない場合は状態がその領域に入るまで非駆動関節を自由回転させる。

筆者らはこれらとは異なる観点から、駆動関節軌道の時間軸伸縮と初期位置・目標位置からの双方向軌道計画を用いて、(AP-h)のUAMの位置制御を行った[14]。非駆動関節の角加速度 $\ddot{q}_p$ は、式(5)の拘束条件より駆

駆動関節角加速度  $\ddot{q}_a$  を用いて次のように表される．

$$\ddot{q}_p = -M_{pp}(q)^{-1}(M_{pa}(q)\ddot{q}_a + b_p(q, \dot{q})) \quad (10)$$

駆動関節にある決まった形の加減速軌道を与え、その時間軸を一定の倍率で伸縮させた際の実験結果の非駆動関節の運動を考える．時間伸縮率を  $\kappa > 0$  とし、新たな時間変数を  $s = \kappa t$  とおく．式 (10) には重力項  $c_p(q)$  が含まれず、コリオリ・遠心力項が  $b_p(q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^j b_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k$  と表せることに注意すると、

$$\dot{q}_i = \kappa dq_i/ds, \quad \ddot{q}_i = \kappa^2 d^2q_i/ds^2$$

より、

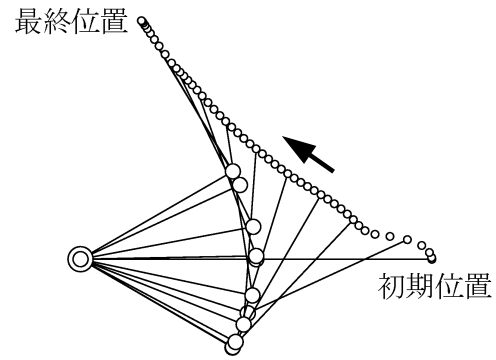
$$\frac{d^2q_p}{ds^2} = -M_{pp}(q)^{-1}(M_{pa}(q)\frac{d^2q_a}{ds^2} + b_p(q, \frac{dq}{ds}))$$

という関係が得られる．上式には  $t$  も  $\kappa$  も含まれない．すなわち、駆動関節に軌道  $q_a(t)$  を与えたときに非駆動関節の軌道  $q_p(t)$  が得られたとすると、駆動関節に軌道  $q_a(\kappa t)$  を与えたときには、時間軸を同じ倍率で伸縮した非駆動関節の軌道  $q_p(\kappa t)$  が式 (5) の拘束を満たす解軌道の一つになる．

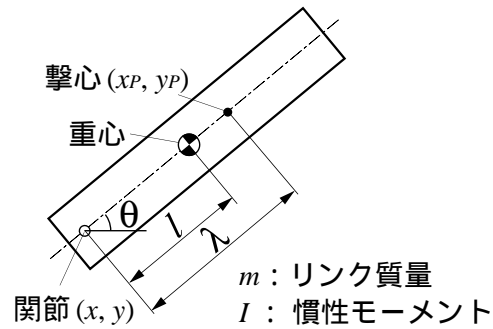
上記の性質を利用して、この UAM の 2 点間の位置決め軌道を計画する．まず駆動関節を初期角度から適当な中間角度まで動かす (スイング A)．この角度で駆動関節をある時間停止する．最後に駆動関節を目標角度まで動かす (スイング B)．各スイングにおける駆動関節軌道の時間軸伸縮を考える．スイング A 直後の非駆動関節の角度は時間伸縮率に依存せず一定である．一方、角速度は時間伸縮率に比例する．またスイング B によって非駆動関節が目標角度に到達した瞬間に停止するような、スイング B 開始時の非駆動関節の角度・角速度と時間伸縮率についても同様の関係が成り立つ．

駆動関節が中間角度で停止している間、非駆動関節は一定角速度で自由回転する．時間軸の伸縮によりスイング A 直後とスイング B 直前の非駆動関節の角速度を等しくすれば、スイング A, B を自由回転区間で接続することができる．時間伸縮率を 1 としたときの非駆動関節角速度を、式 (10) の数値積分により求め、これらを用いて各スイングの時間軸伸縮率を決定する．

また、運動中の UAM の姿勢をフィードバックによって一般化座標空間における目標経路上に拘束すれば、時間軸の伸縮が自動的に行われ、経路に沿った加減速の軌道は目標軌道の時間軸を定数倍に伸縮したものになる．目標軌道は軌道終端において全関節の角速度が零となるよう計画されているから、どのように時間軸が伸縮されたとしても UAM は目標位置で停止する．位置制御の実験結果を第 2 図に示す．



第 2 図: 実験結果



第 3 図: 自由リンクのモデル

### 3.2 水平 3 軸 UAM

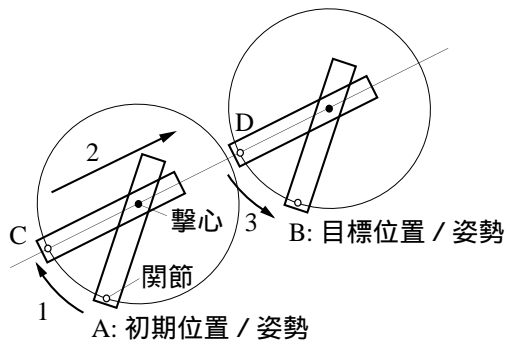
水平 3 軸 UAM (AAP-h) は水平 2 軸 UAM (AP-h) では見られない興味深い性質をいくつかもち、これらを利用して制御することが可能である．UAM 先端の自由リンクの挙動は、摩擦のない水平面上を滑る平面剛体の 1 点に方向と大きさを調節できる並進力を加えた場合と等価である．水上船舶、ホバークラフト、平面上の物体の pushing manipulation、ボールキャスター台車によるトレーラーなども同じ力学系となり、UAM 以外にも応用分野をもつ．

筆者はこの UAM について、任意の初期状態から任意の目標状態に到達可能な軌道を実際に見出すという構成的方法によって、大域的な可制御性を証明した [15]．第 3 図に自由リンクの動力学モデルを示す． $\lambda = l + I/(ml)$  とすれば、系の拘束は、

$$-\ddot{x} \sin \theta + \ddot{y} \cos \theta + \lambda \ddot{\theta} = 0 \quad (11)$$

と表される．関節に対するリンクの撃心の挙動に着目して軌道を構成する．撃心の位置を  $(x_p, y_p) \equiv (x + \lambda \cos \theta, y + \lambda \sin \theta)$  とする．また、入力  $(u_t, u_n)$  を

$$\begin{cases} \ddot{x} = (u_t + \lambda \dot{\theta}^2) \cos \theta + u_n \sin \theta \\ \ddot{y} = (u_t + \lambda \dot{\theta}^2) \sin \theta - u_n \cos \theta \end{cases}$$



第 4 図: 位置決め軌道

と定義する．これらを式 (11) に代入すると，

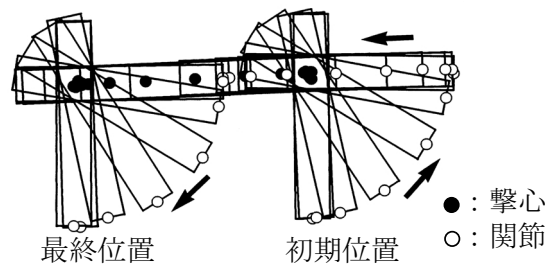
$$\ddot{\theta} = u_n / \lambda, \quad \ddot{x}_P = u_t \cos \theta, \quad \ddot{y}_P = u_t \sin \theta \quad (12)$$

という関係が得られる．

ここで  $u_t \neq 0, u_n = 0$  とし，関節をリンク撃心の方向に加減速すると，式 (12) よりリンクの角加速度  $\theta$  は零となる．これを利用すれば回転を伴わない並進運動が可能である．また， $u_t = 0, u_n \neq 0$  とすると， $\ddot{x}_P = 0, \ddot{y}_P = 0$  となり，撃心の初期速度が零ならばリンクの角速度・角加速度に関係なく撃心は基準座標系の 1 点にとどまる．これにより並進を伴わない回転運動が可能である．

これらの軌道要素を組合せて，任意の 2 点間の位置決め軌道が構成できる (第 4 図)．まず撃心を中心に A から C までリンクを回転させる．次に関節を撃心の方向に D まで並進させる．最後に D から B まで撃心を中心にリンクを回転させる．以上の操作で A から B への位置制御が完了する．また，運動中のリンクを停止する軌道，および静止状態から目標位置で目標速度を与える軌道も容易に構成できる．初期運動からの停止点と，目標位置・速度への出発点を位置決め操作によって結べば，速度を含む任意の 2 つの状態を結び軌道が構成できる．すなわち，このマニピュレータの大域的な可制御性が示せる．

こうして計画された位置決め軌道の並進および回転軌道要素に対して，目標軌道を安定化するフィードバック制御を適用した [16]．制御則は次のようなアイデアに基づいている．並進軌道の場合，関節を目標軌道と平行に加減速すると，リンクには加速度と逆方向に慣性力が作用する．そのときリンクは仮想的な重力場における振りまたは倒立振りと同様な挙動を示す．そこで目標軌道と垂直な方向の加速度を入力として振り／倒立振りと同様の安定化フィードバック則を構成し，リンク角度と関節位置を目標軌道上へ安定化することができる．



第 5 図: 実験結果

並進軌道では，入力  $u_t$  を用いてリンクの進行方向の運動を制御する．目標軌道に沿った撃心加速度が一定となるように  $u_t$  を与えると，リンク姿勢および撃心の目標軌道からの偏差の挙動を表す部分系が入力  $u_n$  を用いて厳密線形化できる．これを線形フィードバックにより原点に安定化すれば，撃心位置，リンク姿勢は目標軌道上に収束する．また回転軌道においては，入力  $u_n$  を用いてリンクに目標角速度・角加速度を与える．撃心位置  $(x_P, y_P)$  の目標軌道中心  $(x_C, y_C)$  に対する偏差の挙動は，入力  $u_t$  を用いて係数時変の線形系で表される．これを定係数の線形系で近似して制御器を設計し，偏差を零に収束させる．以上の制御則を用いた位置制御の実験結果を第 5 図に示す．

小林ら [18] はこのタイプの UAM において，式 (12) が座標変換および入力変換により， $\xi_1 = u_1, \xi_2 = u_2, \xi_3 = \xi_2 u_1$  という 2 階のチェインド形式とフィードバック等価になることを示した．また，この性質を利用して任意の目標点への指数安定化を行う制御則を提案している．これは目標点に指数関数的に収束する参照軌道を与え，その軌道に状態を指数関数的に収束させるフィードバック則を構成するというものである．

また，(AAP-h), (AAP-v) の UAM には，differential flatness という性質がある [19, 20]．簡単に言えば，系の状態を  $x = x(y, \dot{y}, \dots, y^{(q)})$ ，入力を  $u = u(y, \dot{y}, \dots, y^{(q)})$  と表すことができるような出力 (flat output)  $y = y(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(p)})$  が存在することを differential flatness という．出力  $y$  の軌道を滑らかに計画すれば，それを実現する入力  $u$  と状態  $x$  が完全に決定できる．そのためこの性質は非ホロノミック系の軌道計画において注目を集めている．1 階の非ホロノミック系では，例えば自動車の後輪軸中点が flat output である．

(AAP-h) の UAM では撃心位置  $(x_P, y_P)$  が flat output となる．式 (12) より， $\theta = \tan^{-1}(\ddot{y}_P / \ddot{x}_P)$  である．また  $x = x_P - \lambda \cos \theta, y = y_P - \lambda \sin \theta$  となる．それぞれを時間微分すれば速度  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}$  も求められる．また  $u_t = \ddot{x}_P / \cos \theta, u_n = \lambda \ddot{\theta}$  であるから，状態および入力

をすべて  $(x_P, y_P)$  とその時間微分の関数で表すことができる。この性質は、実現可能な軌道を見出すこと自体が難しい UAM の軌道計画のために、有望な手段の一つになると思われる。

#### 4 おわりに

非駆動関節・非ホロノミック・非線形と、本分野を表す言葉には「非」の付くものが多い。「非」は対象を狭めるのではなく、むしろ制約を外してより広い対象を相手にすることを意味する。それを研究することで、「非」の付かない世界の理解も深まるように思われる。広がった対象をすべてカバーするオールマイティな理論を一気に追求するにはなかなか力が及ばないが、逆に現実の制御対象に根ざした系の個別性に十分に注意を払うことで、その中からなんらかの普遍的な意味を拾い出すことができれば、と願っている。

#### UAM に関連した WWW サイト

本分野の研究グループの URL アドレスをいくつか紹介しておく。これらから直接入手できる参考文献も多い。

<http://www.mel.go.jp/staff/harai.html>

(機械技術研究所バイオロボティクス研究室)

<http://mitsukuni.t.u-tokyo.ac.jp/>

(東京大学吉本・中村研究室)

<http://labrob.ing.uniroma1.it/>

(Universita degli Studi di Roma "La Sapienza")

<http://avalon.caltech.edu/~murray/>

(California Institute of Technology)

<http://lims.mech.nwu.edu/~lynch/>

(Northwestern University)

#### 参考文献

- [1] 中村: 非ホロノミックロボットシステム 第1回~第5回; 日本ロボット学会誌, Vol. 11, No. 4~7 (1993), Vol. 12, No. 2 (1994)
- [2] 中村ほか: ミニ特集 非ホロノミック系の制御; 計測と制御, Vol. 36, No. 6, pp. 384-416 (1997)
- [3] I. Kolmanovsky and N. H. McClamroch: Developments in Nonholonomic Control Problems; IEEE Control Systems, Vol. 15, No. 6, pp. 20-36 (1995)
- [4] 荒井, 舘: 非駆動関節を有するマニピュレータの動力学的干渉による位置制御; 計測自動制御学会論文誌, Vol. 25, No. 9, pp. 1012-1017 (1989)
- [5] 荒井, 舘: 非駆動関節を有するマニピュレータの経路追従制御; 計測自動制御学会論文誌, Vol. 27, No. 7, pp. 800-805 (1991)
- [6] G. Oriolo and Y. Nakamura: Free-Joint Manipulators: Motion Control under Second-Order Nonholonomic Constraints; Proc. IEEE/RSJ Int. Workshop on Intelligent Robots and Systems (IROS'91), pp. 1248-1253 (1991)
- [7] H. J. Sussmann: A General Theorem on Local Controllability; SIAM J. Control and Optimization, Vol. 25, No. 1, pp.158-194 (1987)
- [8] R. W. Brockett: Asymptotic Stability and Feedback Stabilization; Differential Geometric Control Theory (R. W. Brockett, R. S. Millman, and H. J. Sussmann, eds.), pp. 181-191, Birkhäuser, Boston (1983)
- [9] 中村, 岩本, 吉本: ドリフト項をもつ非ホロノミック機械の制御; 日本ロボット学会誌, Vol. 13, No. 6, pp.830-837 (1995)
- [10] 中村, 濃沼, 鈴木: 自由関節を持つ平面アームのカオスの挙動と非線形制御 - ドリフトを持つ非ホロノミック機械の制御 - ; 日本ロボット学会誌, Vol. 14, No. 4, pp. 602-611 (1996)
- [11] 中村, 鈴木: 非ホロノミック機械系の平均化法による挙動解析と振幅変調制御 - 平面 2 R 自由関節マニピュレータの位置制御 - ; 日本ロボット学会誌, Vol. 16, No. 3, pp. 407-416 (1998)
- [12] T. Suzuki and Y. Nakamura: Control of Manipulators with Free-Joints via the Averaging Method; Proc. 1997 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp. 2998-3005 (1997)
- [13] A. De Luca, R. Mattone and G. Oriolo: Control of Underactuated Mechanical Systems: Application to the Planar 2R Robot; Proc. 35th IEEE Int. Conf. on Decision and Control, pp.1455-1460 (1996)
- [14] 荒井, 谷江, 城間: 非駆動関節を有するマニピュレータの時間軸伸縮による制御; 日本ロボット学会誌, Vol. 16, No. 4, pp. 561-568 (1998)
- [15] 荒井: 非駆動関節を有する 3 自由度マニピュレータの非ホロノミック拘束下における可制御性, 日本ロボット学会誌, Vol. 14, No. 5, pp. 751-758 (1996)

- [16] 荒井, 谷江, 城間: 非駆動関節を有する水平 3 軸マニピュレータの非ホロノミック拘束下におけるフィードバック制御; 日本ロボット学会誌, Vol. 15, No. 6, pp. 943–952 (1997)
- [17] H. Arai, K. Tanie and N. Shiroma: Nonholonomic Control of a Three-DOF Planar Underactuated Manipulator; IEEE Trans. on Robotics and Automation, Vol. 14, No. 5, pp. 681–695 (1998)
- [18] 小林, 井村, 吉川: 自由関節を含む 3 自由度マニピュレータの非ホロノミック制御; 計測自動制御学会論文集, Vol. 33, No. 8, pp. 799–804 (1997)
- [19] R.M. Murray, M. Rathinam and W. Sluis: Differential Flatness of Mechanical Control Systems: A Catalog of Prototype Systems; 1995 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition (1995)
- [20] M. Rathinam and R.M. Murray: Configuration Flatness of Lagrangian Systems Underactuated by One Control; SIAM J. Control and Optimization, Vol. 36, No.1, pp.164–179 (1998)