

量子力学序論

Structure of Lecture 7/9

1、シュレーディンガー方程式

井戸型ポテンシャル中の電子状態の記述

トンネル効果について

2、 $\Delta 7$ テスト

1、シュレーディンガー方程式(IV)

井戸型ポテンシャル内の電子状態

定常状態のシュレーディンガー方程式

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi(x) = E \psi(x)$$

一般に、ある演算子を掛けて元の関数の定数倍になっているとき、この方程式を**固有方程式**と呼び、その定数(今は、エネルギー)を**固有値**、またその関数を**固有関数**と呼ぶ。

1、シュレーディンガー方程式(IV)

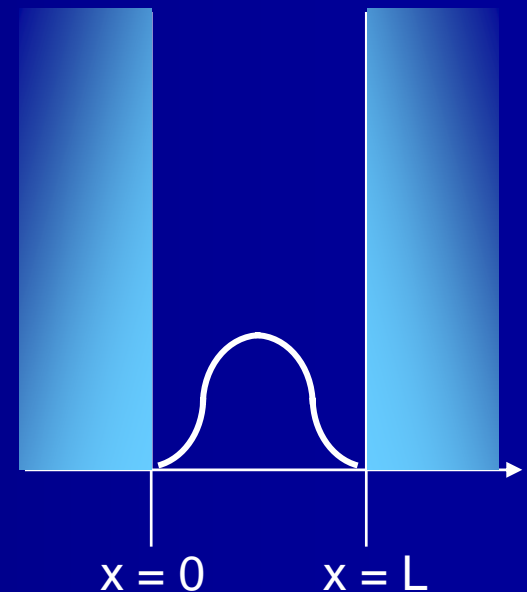
井戸型ポテンシャル内の電子状態

定常状態のシュレーディンガー方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x) = E \psi(x)$$

一次元の無限に深いポテンシャル井戸に電子が閉じ込められているとする。この時、井戸の内側では $V = 0$ 、外側では $V = \infty$ としても良い。また、井戸幅を L とする。

$$V(x) = \infty \quad (x < 0, L < x)$$
$$V(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq L)$$



1、シュレーディンガー方程式(IV)

井戸型ポテンシャル内の電子状態

定常状態のシュレーディンガー方程式

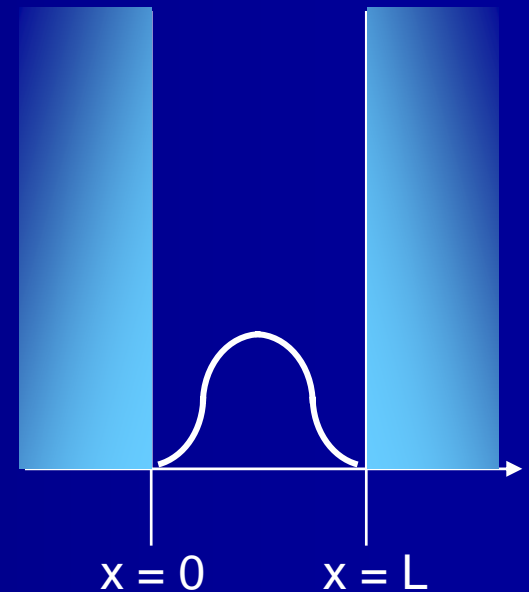
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x) = E \psi(x)$$



$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = E \psi(x) \quad (0 \leq x \leq L)$$

$$\psi(x) = 0 \quad (x < 0, L < x)$$

$$V(x) = \infty \quad (x < 0, L < x)$$
$$V(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq L)$$



1、シュレーディンガー方程式(IV)

井戸型ポテンシャル内の電子状態

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = E \psi(x)$$

式変形する。

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x)$$

一般解は、

$$\psi(x) = a \exp(ikx) + b \exp(-ikx)$$

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

1、シュレーディンガー方程式(IV)

井戸型ポテンシャル内の電子状態

一般解は、

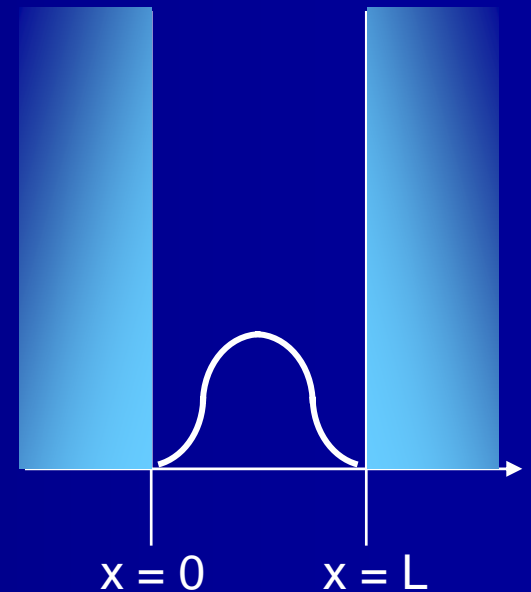
$$\psi(x) = a \exp(ikx) + b \exp(-ikx)$$

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

まず、 $x = 0$ での境界条件、

$\psi(0) = 0$ より、 $a + b = 0$ 、即ち $b = -a$

$$V(x) = \infty \quad (x < 0, L < x)$$
$$V(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq L)$$



1、シュレーディンガー方程式(IV)

井戸型ポテンシャル内の電子状態

$$\psi(x) = a \exp(ikx) + b \exp(-ikx)$$

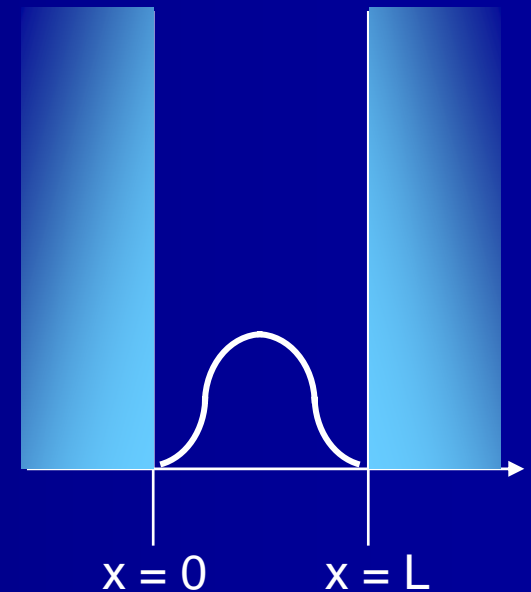
$$\psi(0) = 0 \text{ より、} a + b = 0、\text{ 即ち } b = -a$$

$$\begin{aligned}\psi &= a \cos kx + ia \sin kx - a \cos(-kx) - ia \sin(-kx) \\ &= a \cos kx + ia \sin kx - a \cos kx + ia \sin kx \\ &= 2ia \sin kx \\ &= c \sin kx \quad (c = 2ia)\end{aligned}$$

次に、 $x = L$ での境界条件、

$$\psi(L) = 0 \text{ より、}$$

$$\psi(L) = c \sin kL = 0$$



1、シュレーディンガー方程式(IV)

井戸型ポテンシャル内の電子状態

次に、 $x = L$ での境界条件、

$$\psi(L) = 0 \text{ より、}$$

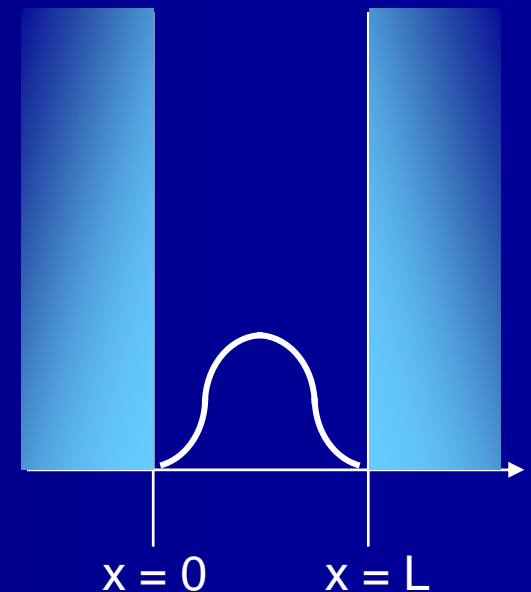
$$\psi(L) = c \sin kL = 0$$

よって $c = 0$ or $\sin kL = 0$ となる。

しかし $c = 0$ は解とはならない。
なぜならば、どこにも電子がいなくなってしまうからである。

結果として、 $\sin kL = 0$ が解となる。

$$V(x) = \infty \quad (x < 0, L < x)$$
$$V(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq L)$$



1、シュレーディンガー方程式(IV)

井戸型ポテンシャル内の電子状態

$$\sin kL = 0$$

$$kL = n\pi \quad k = \frac{\pi}{L} n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

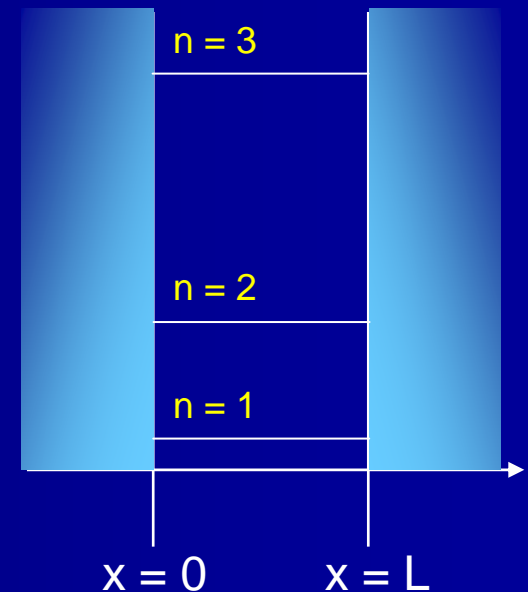
$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad \text{より、}$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

井戸型ポテンシャル内の電子は

- 1, とびとびのエネルギー準位をとる
- 2, そのエネルギー幅は井戸幅に逆比例する

$$V(x) = \infty \quad (x < 0, L < x)$$
$$V(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq L)$$

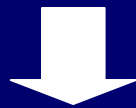


1、シュレーディンガー方程式(IV)

トンネル効果について

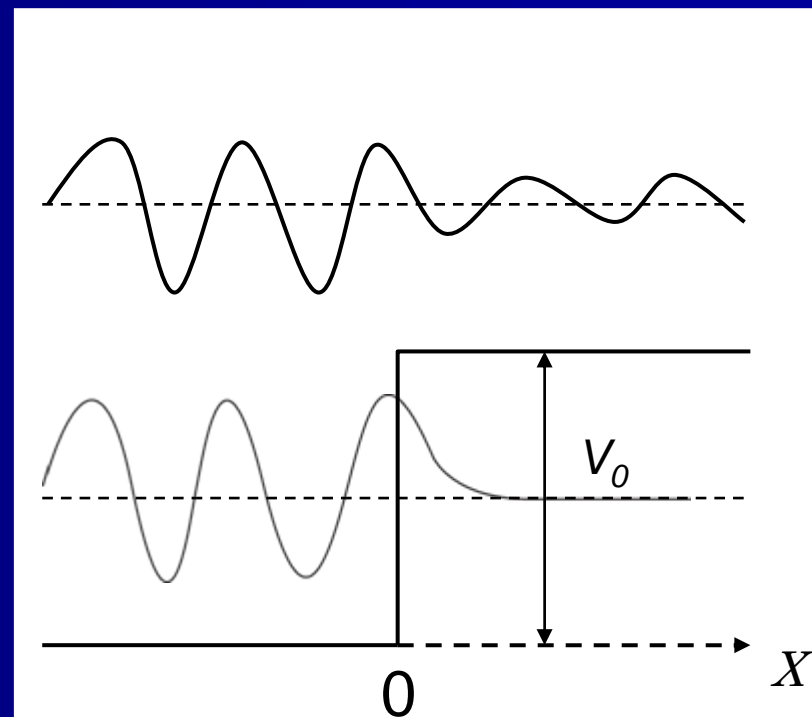
定常状態のシュレーディンガー方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x) = E \psi(x)$$



$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = E \psi(x) \quad (x < 0)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0 \right] \psi(x) = E \psi(x) \quad (0 \leq x)$$



1、シュレーディンガー方程式(IV)

トンネル効果について

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = E \psi(x)$$

式変形する。

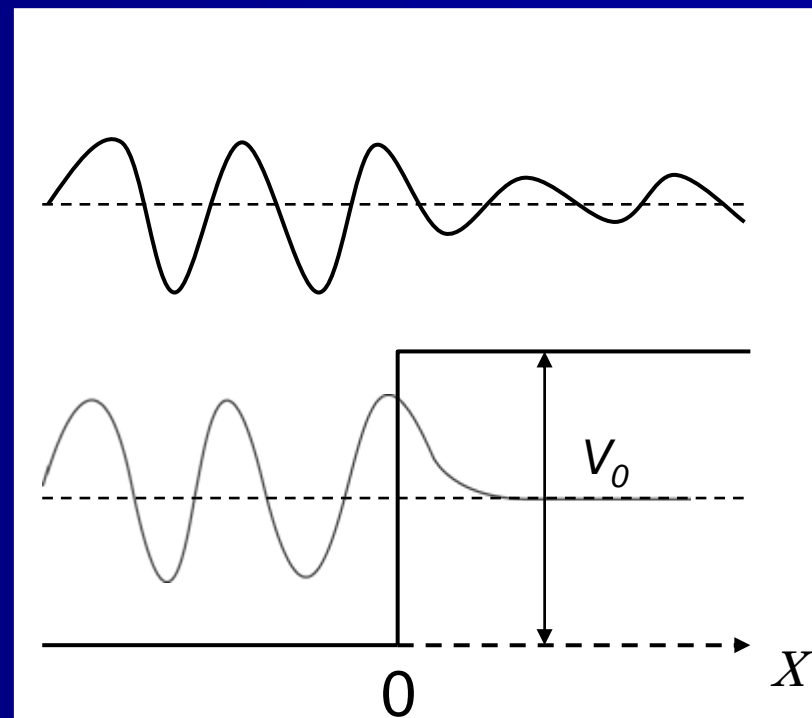
$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x)$$

一般解は、

$$\psi(x) = a \exp(ikx) + b \exp(-ikx)$$

入射波 反射波

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (x < 0)$$



1、シュレーディンガー方程式(IV)

トンネル効果について

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0 \right] \psi(x) = E \psi(x) \quad (0 \leq x)$$

式変形する。

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \psi(x)$$

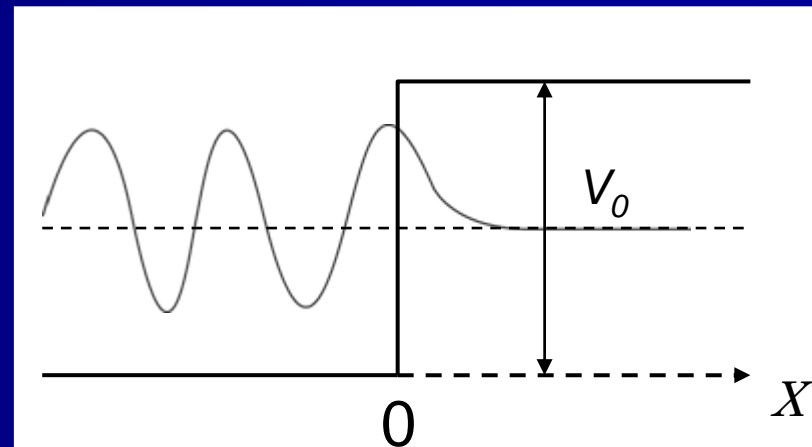
$$K^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \quad (0 \leq x)$$

一般解は、

$$\psi(x) = c \exp(-Kx) + d \exp(Kx)$$

$x = \infty$ にて $\psi(x) = 0$ より

$$\psi(x) = c \exp(-Kx)$$



1、シュレーディンガー方程式(IV)

トンネル効果について

$$\psi(x) = a \exp(ikx) + b \exp(-ikx) \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (x < 0)$$

$$\psi(x) = c \exp(-Kx) \quad K^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \quad (0 \leq x)$$

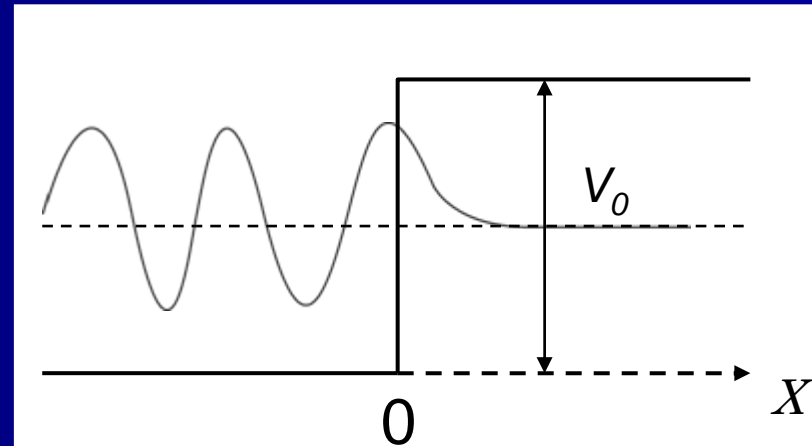
$x = 0$ で 連続(なめらかにつなぐ)

$\psi(x)$ が一致より

$$a + b = c$$

$\frac{d}{dx} \psi(x)$ が一致より

$$ik(a - b) = -Kc$$



1、シュレーディンガー方程式(IV)

トンネル効果について

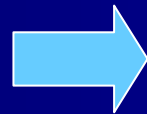
$x = 0$ で 連続(なめらかにつなぐ)

$\psi(x)$ が一致より

$$a + b = c$$

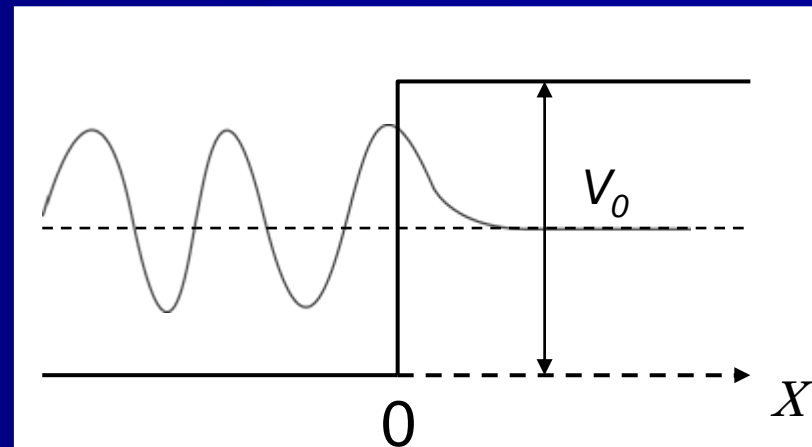
$\frac{d}{dx}\psi(x)$ が一致より

$$ik(a - b) = -Kc$$



$$\frac{c}{a} = \frac{2k}{k + iK}$$

古典力学では進入が不可能な
 $0 < x$ の領域に、電子が
浸み出している！！



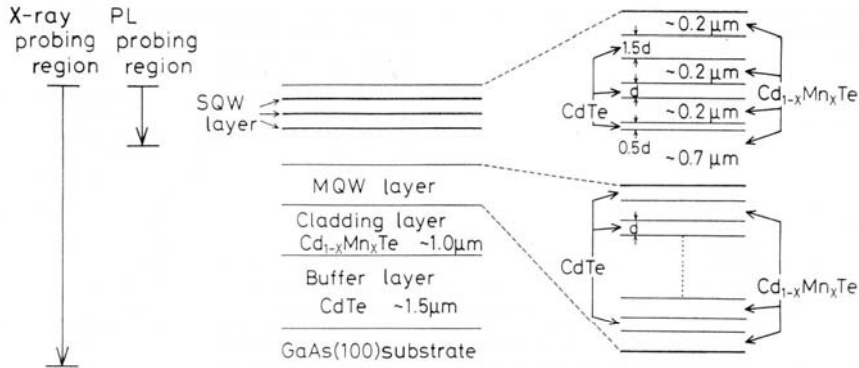


Fig. 1. The stacking structure of the SQW's on the MQW sample.

with the use of R6G synchronously pumped by a mode-locked Nd:YAG laser. Luminescence light was collected in the backscattering geometry, passed through a spectrometer, and finally time-resolved using a synchroscan streak camera. The time resolution of the experimental system in the present setup was about 80 ps.

3. Experimental Results and Discussion

The time-integrated PL spectra from the SQW layers are shown in Fig. 2. The PL line observed at about 1.85 eV is assigned to the emission from Cd_{0.81}Mn_{0.19}Te barrier layers. Three PL lines are the emissions from the heavy-hole excitons in the CdTe SQW's. Because of the quantum confinement effect, the peak position is considered to increase with the decrease of the well thickness. Therefore, the three

lines in order from the higher-energy side are assigned to the respective emissions from the quantum wells, SQW#1, #2 and #3, as shown in the figure. The peak positions of these PL lines are consistent with a simple calculation.

Figure 3 displays the time-resolved PL spectrum arising from the SQW#1 layer in a contour map. The solid line in the figure shows the temporal energy shift of the PL peak position. As shown in the figure, the peak position shifts 4.8 meV to lower energy within several hundreds picoseconds. This energy is represented by the notation ΔE in the figure. We interpret the observed temporal red shift as being caused by magnetic polaron formation.^{9,11)} The exciton in the CdTe quantum well can decrease its energy due to an additional gain from

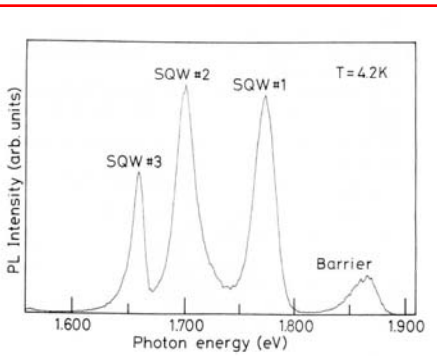


Fig. 2. The time-integrated photoluminescence spectra at 4.2 K of the SQW sample. The notations, SQW#1, #2, #3 and Barrier, show the emission lines from the SQW layers with the thicknesses of 18 Å, 35 Å, 53 Å and the Cd_{0.81}Mn_{0.19}Te barrier layer, respectively.

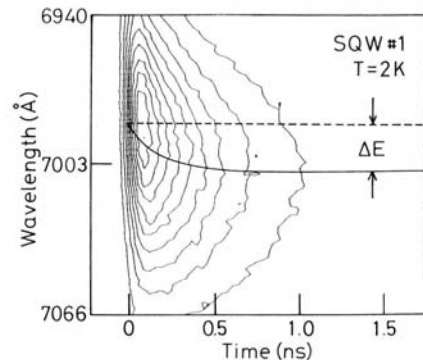
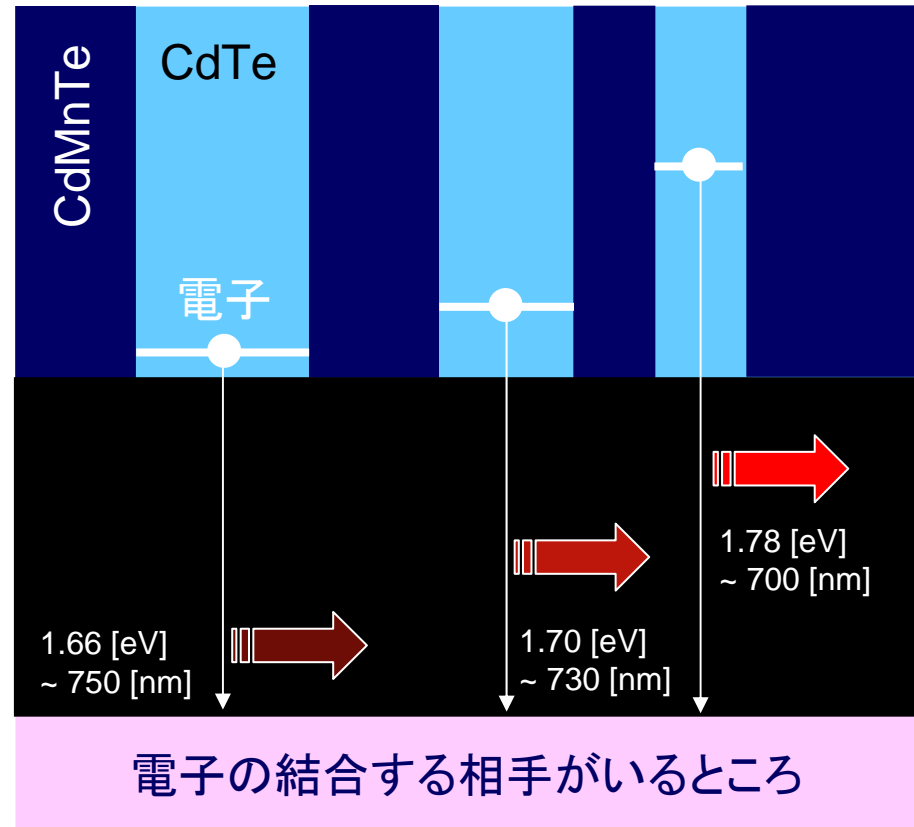


Fig. 3. The time behavior of the photoluminescence spectrum at 2 K following excitation at $t=0$ ns of the SQW layer with thickness of 18 Å is shown as a contour map. The temporal energy shift of the peak position is shown by the solid line. The total energy shift is represented as ΔE .



井戸幅の異なる単一量子井戸構造からの発光スペクトル

2、Δ7 テスト

井戸型ポテンシャル内の電子状態

第1問、井戸型ポテンシャル内の電子の持つエネルギーが下記の式で表されるとき、最低エネルギー状態 ($n=1$) と井戸底との間のエネルギーの差 (量子効果) を計算せよ。
答えは[eV]の単位で示すこと。

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2 \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

$$\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ [Js]}$$

$$m \sim 0.1 \times m_e = 9.1 \times 10^{-32} \text{ [Kg]} \quad \dots \text{ CdTe 井戸の場合を想定}$$

$$L = 15 \text{ [nm]} = 15 \times 10^{-9} \text{ [m]}$$

$$1 \text{ [eV]} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ [J]}$$

第2問、この量子効果は液体窒素温度 (77[K]) で観測可能か？
室温 (300[K]) ではどうか？その根拠と共に説明せよ。
ヒント: 熱エネルギーは $k_B T$ で与えられる。
 T は温度。単位は[K]。
 k_B はボルツマン定数。 $1.38 \times 10^{-23} \text{ [JK}^{-1}\text{]}$

2、Δ7 テスト

井戸型ポテンシャル内の電子状態

第1問、井戸型ポテンシャル内の電子の持つエネルギーが下記の式で表されるとき、最低エネルギー状態 ($n=1$) と井戸底との間のエネルギーの差 (量子効果) を計算せよ。
答えは[eV]の単位で示すこと。

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2 \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

$$\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ [Js]}$$

$$m \sim 0.1 \times m_e = 9.1 \times 10^{-32} \text{ [Kg]} \quad \dots \text{ CdTe 井戸の場合を想定}$$

$$L = 15 \text{ [nm]} = 15 \times 10^{-9} \text{ [m]}$$

$$1 \text{ [eV]} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ [J]}$$

$$E = \frac{\pi^2 \times 1.05^2}{2 \times 9.11 \times 15^2} \times 10^{-34 \times 2 + 32 + 9 \times 2} = 2.66 \times 10^{-3-18} \text{ [J]} = \frac{2.66}{1.602} \times 10^{-21+19} \text{ [eV]}$$

$$E = 1.7 \times 10^{-2} \text{ [eV]} = 17 \text{ [meV]}$$

2、 $\Delta 7$ テスト

井戸型ポテンシャル内の電子状態

第2問、この量子効果は液体窒素温度(77[K])で観測可能か？
室温(300[K])ではどうか？その根拠と共に説明せよ。

ヒント:熱エネルギーは $k_B T$ で与えられる。

Tは温度。単位は[K]。

k_B はボルツマン定数。 1.38×10^{-23} [JK⁻¹]

$$\begin{aligned} E(300\text{K}) &= 1.38 \times 10^{-23} \times 300 \text{ [J]} \\ &= 4.14 \times 10^{-21} \text{ [J]} \\ &= 26 \text{ [meV]} \sim 1/40 \text{ [eV]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(77\text{K}) &= 1.38 \times 10^{-23} \times 77 \text{ [J]} \\ &= 1.06 \times 10^{-21} \text{ [J]} \\ &= 7 \text{ [meV]} \end{aligned}$$

300[K]においては、
熱による準位(level)のぼけ(broadening)によって、
2つの準位が分解できなくなる。

